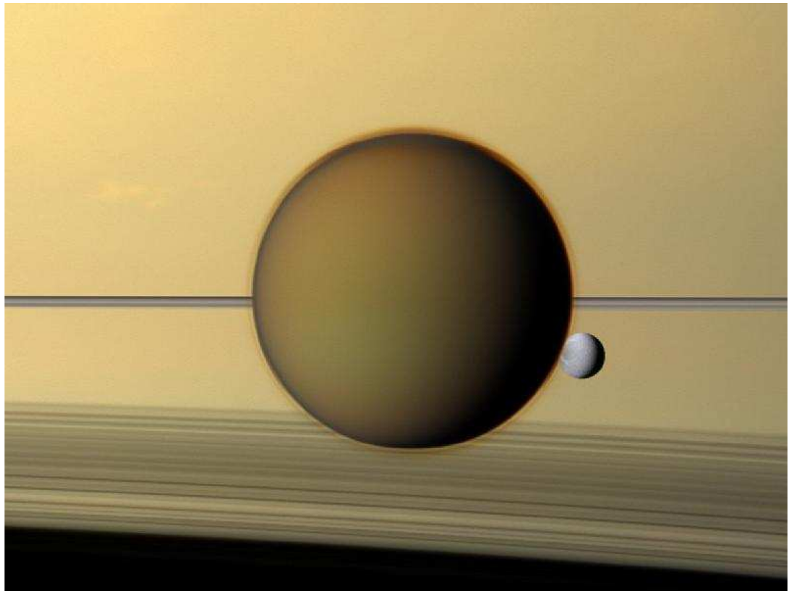
Com i perquè es pot viatjar per l'espai.

Universitat de Barcelona, Facultat de Matemàtiques

21/28 de Novembre de 2012



21/05/2011: Titan-Dione from NASA's Cassini spacecraft.

Arturo Vieiro

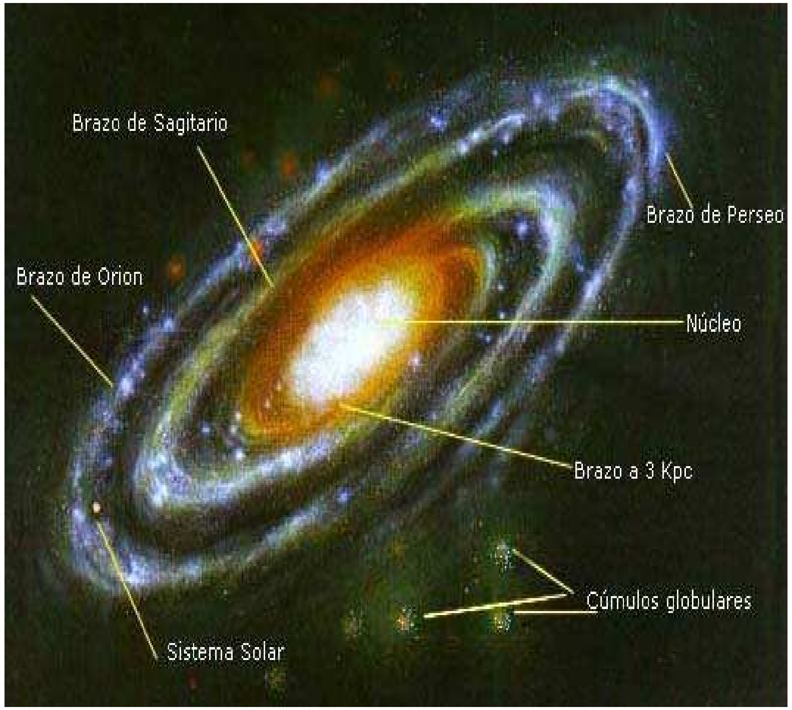
(conjuntament amb Antoni Benseny)

Contingut de la xerrada

1. El Sistema Solar.
2. Cinemàtica dels planetes: lleis de Kepler.
3. Dinàmica dels planetes: lleis de Newton.
4. El problema de 2 cossos: geometria de les òrbites.
5. Maniobres orbitals: transferència tipus Hohmann.
6. Necessitat de l’ajuda gravitatòria per viatjar per l’espai: Flybys.

El Sistema Solar: on som?

Ocupa una petita àrea d'una galàxia espiral anomenada la Via Làctia.

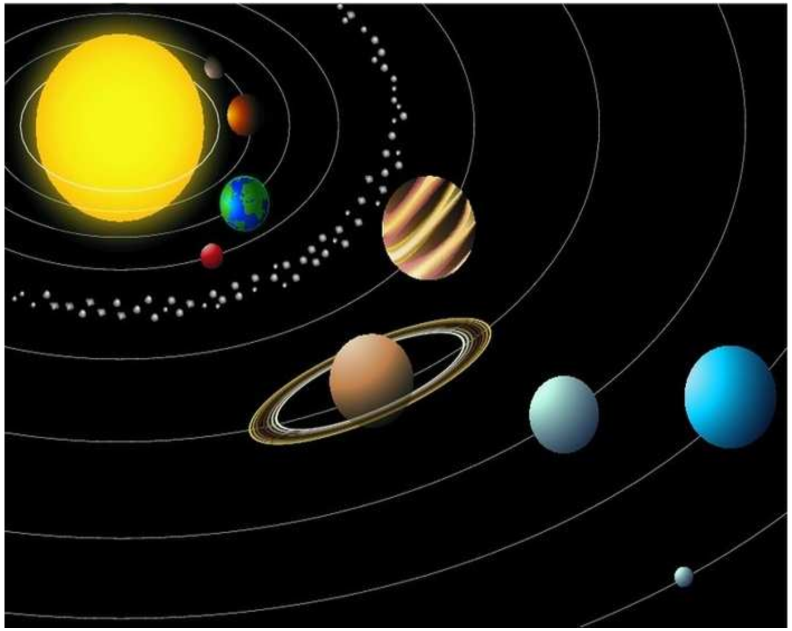


Massa VL $\approx 10^{12}$ massa Sol (massa Sol $\approx 1.9891 \times 10^{30}$ Kg).

Distància Sol – centre VL: $27\,700$ anys llum (any llum $\approx 9.460728 \times 10^{12}$ km).

El Sistema Solar: què és?

El Sol i els cossos que es mouen en òrbita al seu voltant: 8 planetes, > 61 satèl·lits naturals, milers d'asteroides, cometes, meteorits i pols interplanetària.



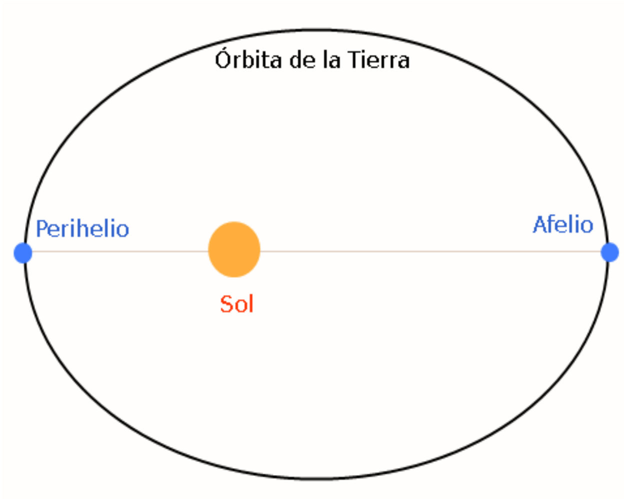
La massa del Sol és $\approx 99.98\%$ de la massa del sistema.

El Sistema Solar: distàncies?

El Sistema Solar s'extén fins *l'heliopausa*: ≈ 100 UA

(1 UA $\approx 149.597.870$ km $\Rightarrow$ 15 mil milions de kilòmetres!!)

Distància Terra-Sol (peri-apo): $147\,098\,290$ km – $152\,098\,232$ km.



Una curiositat històrica: La llei de Bode

$$a = (n+4)/10, \quad n = 0, 3, 6, 12, \boxed{24}, 48, \ldots.$$

A espatlles de gegants...

L'observació i l'estudi dels cossos celestes va atraure l'home des de l'antiguitat per motius pràctics i d'interés de coneixement.

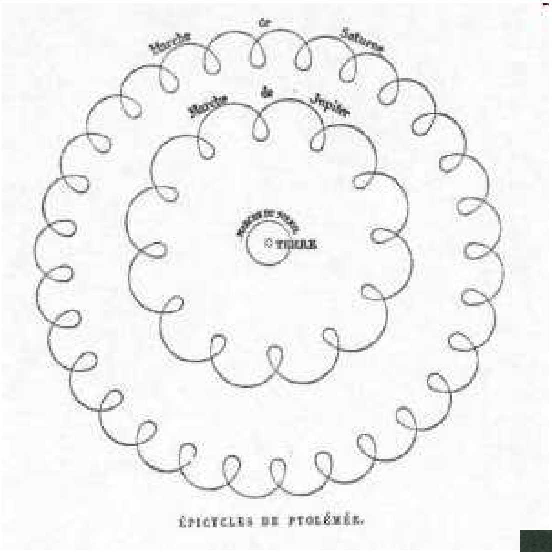
> Entre los muchos y variados estudios sobre las letras y las artes, con los que se vivifican las inteligencias de los hombres, pienso que principalmente han de abarcarse y seguirse con el mayor afán las que versan sobre las cosas más bellas y más dignas del saber. Tales son las que tratan de las maravillosas revoluciones del Mundo y del curso de los astros, de las magnitudes, de las distancias, del orto y del ocaso, y de las causas de todo lo que aparece en el cielo y que finalmente explican la forma total. Pues, ¿qué hay más hermoso que el cielo, que contiene toda la belleza?

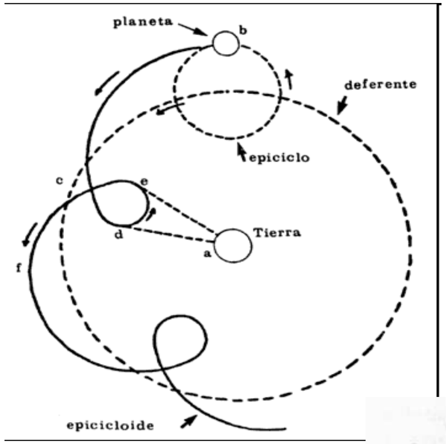
Nicolau Copèrnic (1473–1543).

Avui en dia sabem molt més del Sistema Solar o de l'Univers, però...

com es mouen els planetes? I per què?

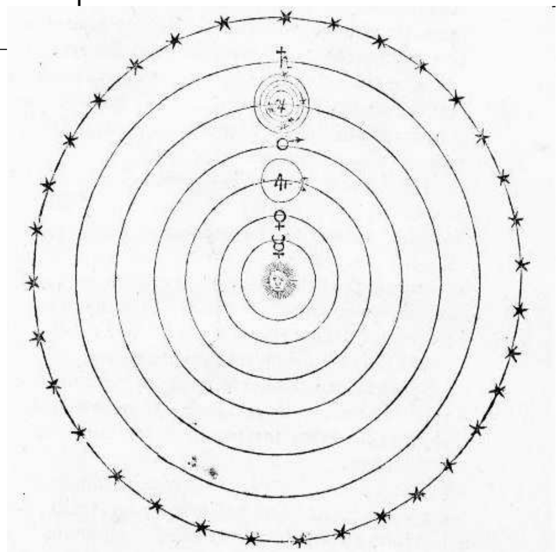
Cinemàtica dels planetes





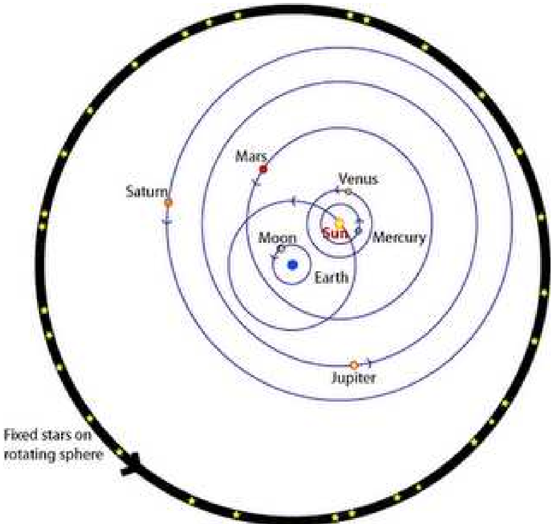
Ptolomeu

85 – 165 dC



Copèrnic

1473 – 1543



The Tychonic Model

Brahe

1546 – 1601

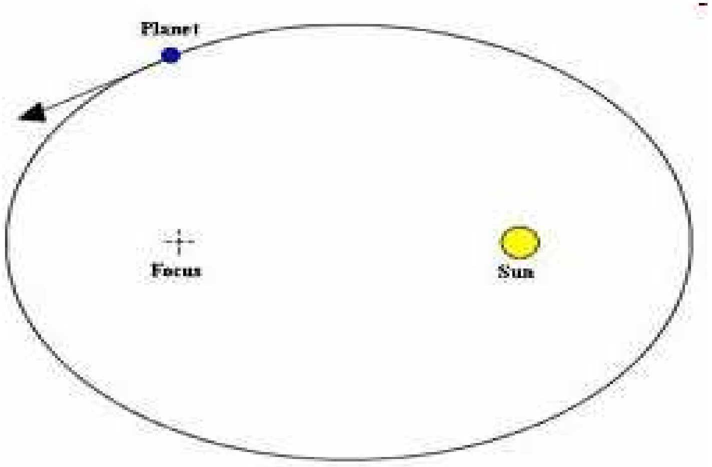
Cinemàtica dels planetes: Kepler (I)

1571–1630

En 1609, publicà *Astronomia Nova*: les dues primeres lleis basant-se en l'observació del planeta Mart. Entre 1617 i 1620, publicà en tres volums la seva obra *Epitome Astronomia Copernicanae* on va incloure la seva 3a llei.

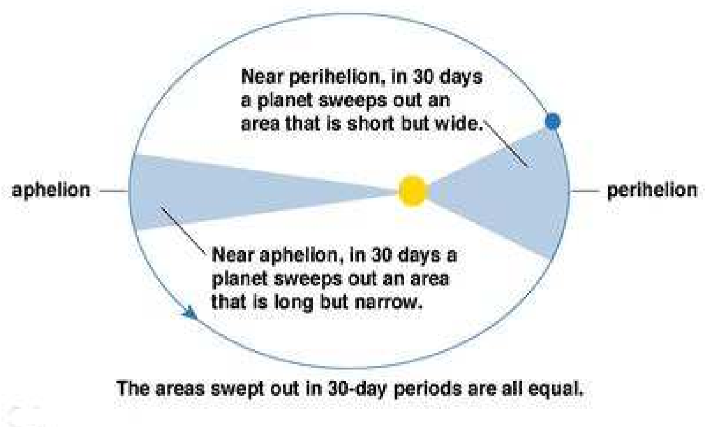
A partir de les dades de T. Brahe va determinar que:

1a llei de Kepler: Els planetes descriuen òrbites el·líptiques i el Sol ocupa un dels focus de l'el·lipse.



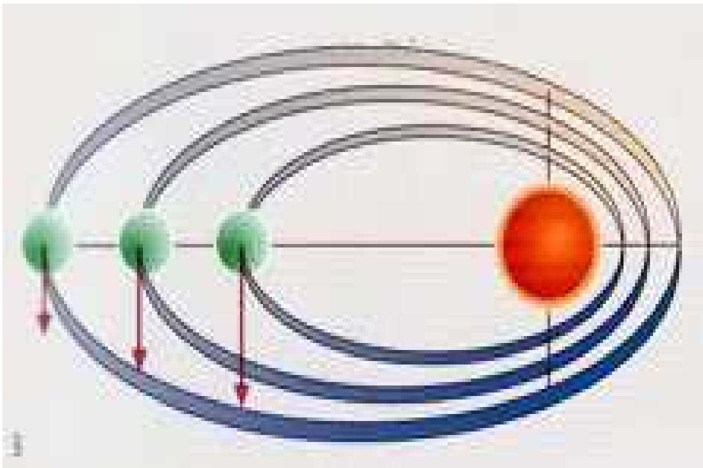
Cinemàtica dels planetes: Kepler (II)

2a llei de Kepler: Les àrees recorregudes en intervals de temps iguals són iguals: la velocitat (areolar) d'escombrada de les àrees és constant.



3a llei de Kepler: El quadrat del període és proporcional al cub del semieix major.

$$\boxed{\text{dist planeta-sol} \approx \sqrt[3]{T^2}}$$



Kepler proporciona una descripció completa i precisa del moviment dels planetes, però...

per què les òrbites són el·líptiques?

1684: Enfadat amb R. Hook, que deia ser capaç de deduir la llei de les òrbites el·líptiques de Kepler a partir de la idea de que la gravetat era una força d'emanació, E. Halley li plantejà a I. Newton la pregunta següent:

Quina seria l'òrbita d'un planeta al voltant del Sol si fos atret cap a aquest per una força inversament proporcional al quadrat de la distància?

"Seria una el·lipse" - contestà Newton sense pensar...

Dinàmica dels planetes: Newton (I)

1643–1727

En 1687, va publicar els *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* on formulava els principis de la Mecànica Clàssica: lleis de la Mecànica Clàssica, llei de la Gravitació Universal, conservació de l'energia i del moment angular.

Primera llei de Newton: Llei de la inèrcia

Tot cos lliure, sobre el que no actua cap força, manté el seu estat moviment, ja sigui en repós o ja sigui en moviment rectilini uniforme **(principi de Galileu)**.

Segona llei de Newton: Llei fonamental de la dinàmica

Tot cos sobre el que actua una força es mou de tal manera que la variació de la seva quantitat de moviment $p = mv$ respecte al temps t és igual a la força F que produeix el moviment

$$p' = mv' = ma = F$$

on m indica la massa; v, la velocitat i a, l'acceleració.

Dinàmica dels planetes: Newton (II)

Tercera llei de Newton: Llei d'acció- reacció

Sempre que un cos **1** exerceixi una força F_{12} sobre un altre cos $\mathbf{2}$, aquest segon cos **2** exerceix una força F_{21} igual i de sentit contrari sobre el primer:

$$F_{21} = -F_{12}.$$

A més, aquestes forces es troben sobre la línea que uneix els dos cossos.

Llei de la gravitació universal

Qualsevol objecte en l'univers que tingui massa exerceix una força d' atracció gravitatòria sobre qualsevol altre objecte amb massa, tot i que estiguin separats per una gran distància. Aquesta força es troba en la línia que uneix els dos cossos i la seva magnitud F és proporcional a les masses m_1 i m_2 dels dos cossos i inversament proporcional al quadrat de la distància r entre els dos objectes (puntuals):

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

on $G \approx 6.67 \times 10^{-11} Nm^2 Kg^{-2}$ indica la constant de gravitació universal.

El problema de 2 cossos

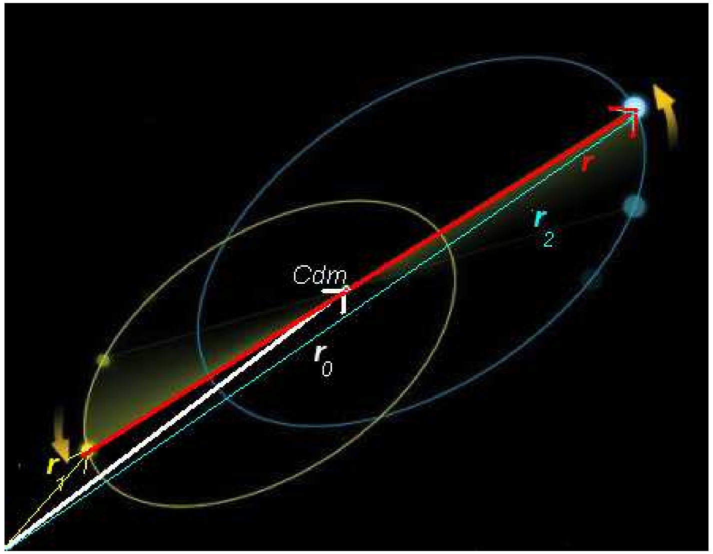
Considerem només 2 cossos i estudiem el moviment d'un objecte (planeta) al voltant del Sol:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{r_1''} &= -G m_1 m_2 (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})/r_{12}^3, \\ m_2 \mathbf{r_2''} &= -G m_1 m_2 (\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1})/r_{12}^3. \end{aligned}$$

- Centre de masses: $\mathbf{r_0} := m_1 \mathbf{r_1} + m_2 \mathbf{r_2}$ segueix moviment rectilini uniforme.
- Posició relativa $\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$, compleix el *problema de Kepler* (força central)

$$\mathbf{r}'' = -Gm\mathbf{r}/r^3,$$

on $m = m_1 + m_2$ és la massa total del sistema.



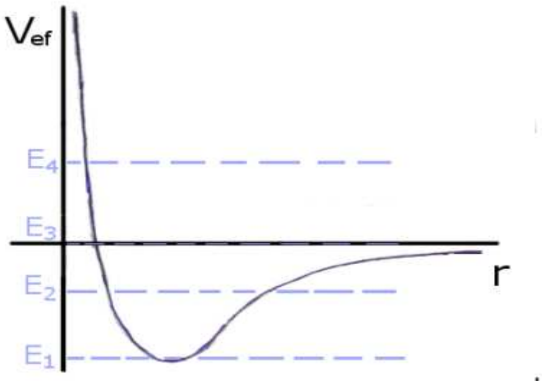
OBS: Si $m_1 >> m_2$ llavors m_2 compleix prob. de Kepler ($m(\text{Sol}) \approx 99.98\%\ m(\text{Sist. Solar})$).

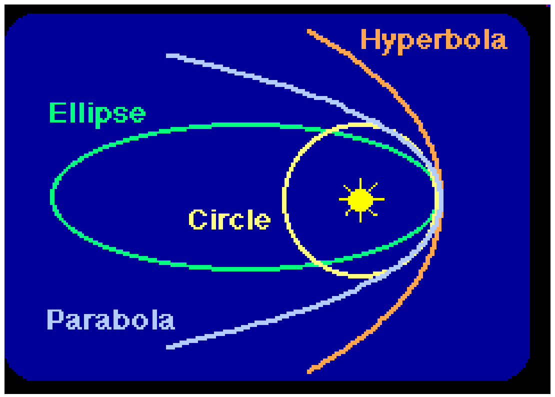
Constants del moviment

- Moment angular: $\boxed{\mathbf{L} := \mathbf{r} \wedge \mathbf{r}'}$
  - Moviment en el pla Π perpendicular a $\mathbf{L}$.
  - Llei de les àrees (Kepler). En Π introduïm coordenades polars (r, θ):

$$\begin{aligned} r'' - r(\theta')^2 &= -Gm/r^2 \quad \text{(equació diferencial radial),} \\ 2r'\theta' + r\theta'' &= 0 \quad \text{(equació diferencial angular)} \Leftrightarrow \text{ 2a llei de Kepler.} \end{aligned}$$

- Energia: $\boxed{E := v^2/2 - Gm/r}$
  - Energia potencial: $V(r) = -Gm/r$ (la gravetat és una força conservativa).
  - Es pot escriure: $E = (r')^2/2 + V_{\text{ef}}(r), \quad V_{\text{ef}}(r) := L^2/(2r^2) - Gm/r.$



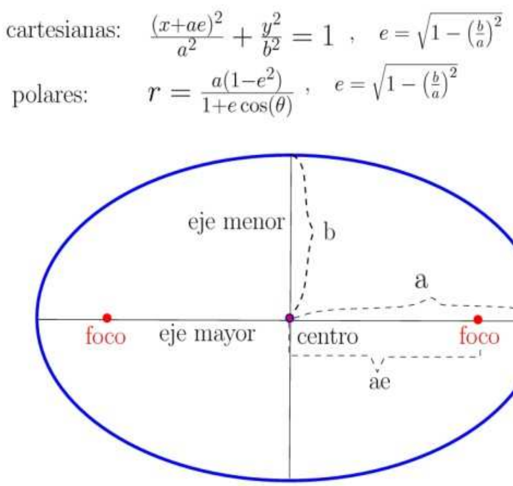


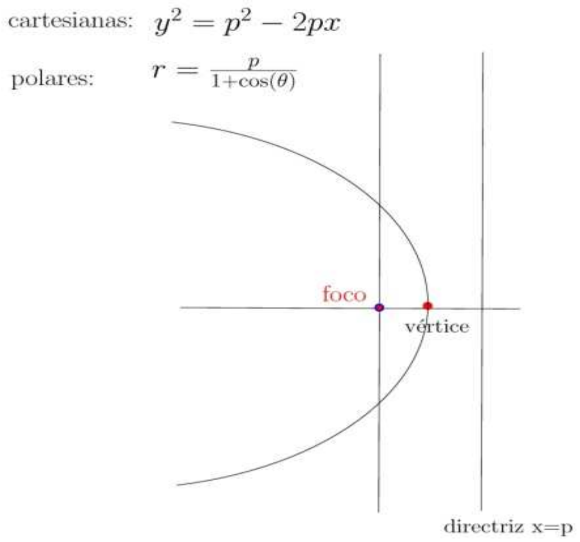
Conclusió: les òrbites bàsiques

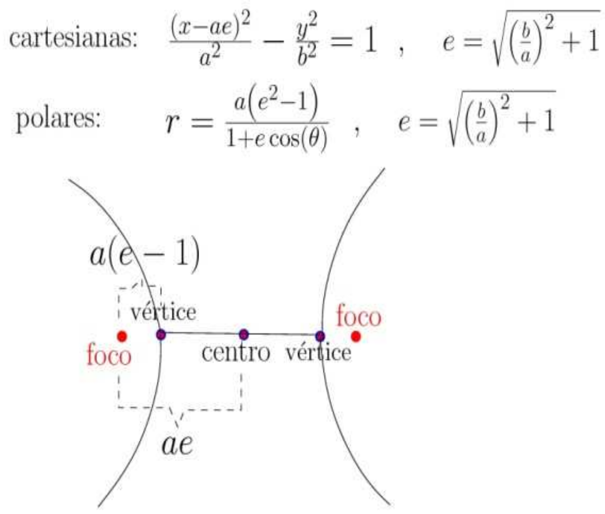
Les òrbites del problema de Kepler tenen forma de còniques amb focus a l'origen

$$r = p/(1 + e\cos(\theta - \theta_0)) \qquad \text{(equació focal)}$$

amb paràmetre $p = L^2/(Gm)$ i excentricitat $e = (1 + 2EL^2/(Gm)^2)^{1/2}$.







Maniobres orbitals

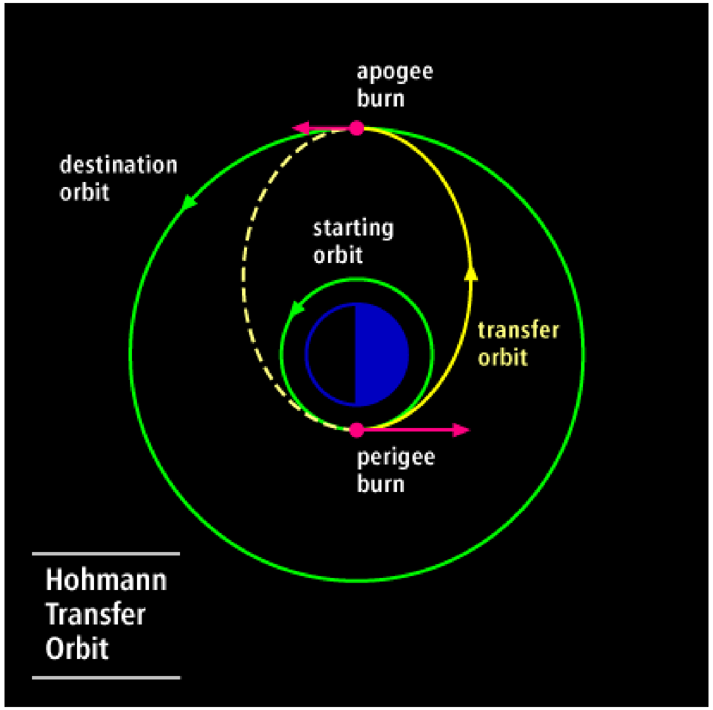
Suposem que tenim un vehicle (nau espacial, satèl·lit,...) en una òrbita concreta que volem modificar.

Per simplificar, suposem que el moviment té lloc en un camp de forces central: la nau ($m_s = 0$) orbita al voltant d'un cos massiu (M) i la influència dels altres cossos és menyspreable.

Si el motor està apagat l'òrbita restarà inalterada. L'encesa dels motors de la nau farà, en general, canviar els 6 elements orbitals. Suposarem que el motor actua de manera instantània (propulsió infinita).

Transferència entre òrbites coplanàries

Suposem que la nau es mou en òrbita circular de radi R_1 al voltant de la massa M i que volem fer una transferència a una òrbita de radi $R_2 > R_1$.



$\rightarrow$ La transferència Hohmann (2 tangent burns) requereix el mínim Δv.

$\rightarrow$ TOF $= \pi\sqrt{a_t^3/GM}$ (la meitat del període de l'òrbita de transferència).

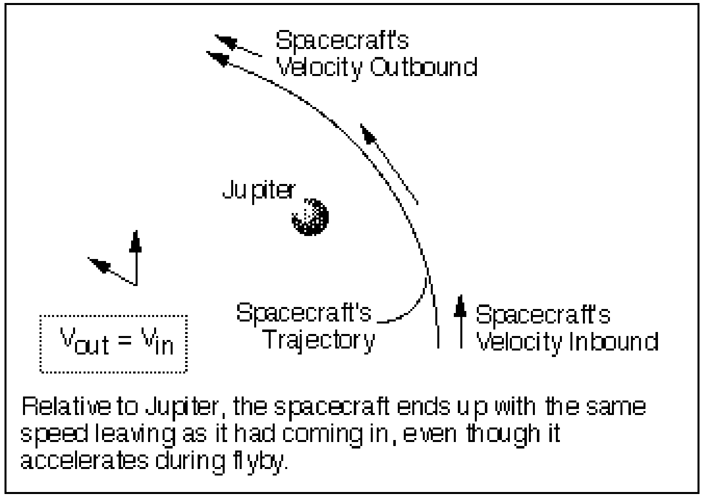
Missions interplanetàries

The patched-conic approximation:

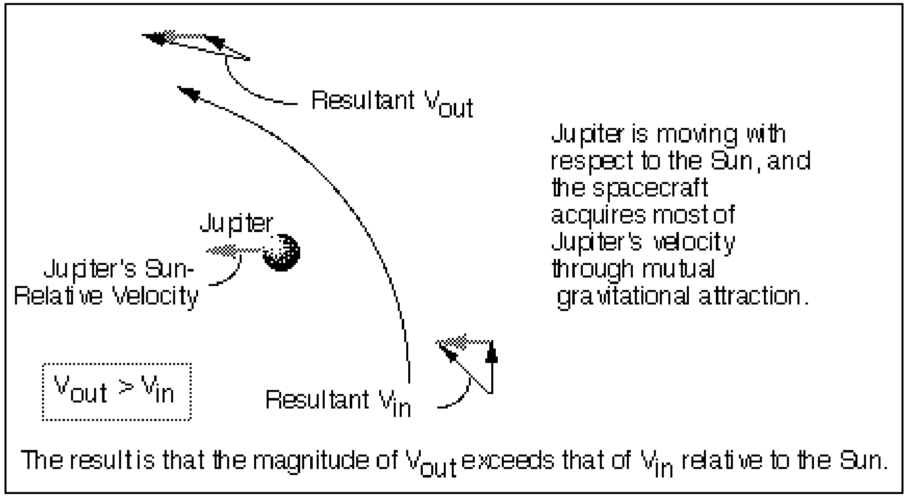
- Les trajectòries segueixen bàsicament solucions del Kepler central (Sol).
- Al voltant de cada planeta es determina una zona (esfera d'influència) on la trajectòria es veu afectada per la gravetat del planeta.
- Dintre de l'esfera d'influència es gasta un Kepler central amb el planeta al centre (aproximació local).
- Per escapar de la influència del planeta cal assolir un trajectòria parabòlica/hiperbòlica del problema local.
- Per dissenyar la trajectòria podem pensar en transferències tipus Hohmann amb el Kepler central (Sol).

La necessitat de fly-bys

Ex. Cassini-Huygens necessita un $\Delta v \geq 15.7\,km/s$ si intentem una transferència Hohmann directa a Saturn des de la Terra. No hi ha cap coet actual capaç de proporcionar un Δv semblant.



Alternativa: fer servir la gravetat dels planetes! Calen 3 cossos RTBP!!



Rellevància històrica dels fly-bys

1. Abans de 1961 s'intentava millorar els coets per aconseguir més Δv.
2. Les lleis de termodinàmica impliquen que els coets no poden tenir $v_e > 4.7$ km/s.
3. Es pensava que caldrien motors nuclears i/o elèctrics molt sofisticats.
4. Era un repte anar fins Venus o Mart (calien grans avenços en propulsió).

Els efectes gravitatoris eren un problema en el disseny d'òrbites usant aproximacions del problema de Kepler.

L'any 1961 M. Minovitch va treballar en el problema restringit de 3 cossos buscant solucions aproximades. Usant àlgebra vectorial va veure que l'ús de la gravetat dels planetes permet guanyar velocitat.

Va obrir la porta a viatges interplanetaris!

The end...

Nature and nature's laws lay hid in night;

God said 'Let Newton be' and all was light.

Alexander Pope (1688–1744).

The end...

Nature and nature’s laws lay hid in night;

God said ’Let Newton be’ and all was light.

Alexander Pope (1688–1744).

What we know is a drop of water,

what we ignore is the ocean.

Isaac Newton (1643–1727).

The end...

Nature and nature's laws lay hid in night;

God said 'Let Newton be' and all was light.

Alexander Pope (1688–1744).

What we know is a drop of water,

what we ignore is the ocean.

Isaac Newton (1643–1727).

The Earth is the Cradle of the Mind

but one cannot eternally live in a cradle.

Konstantin E. Tsiolkovsky (1857–1935)

Moltes gràcies per la vostra atenció!