

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE WAVELETS

NOELIA RILLO PASTOR

TRABAJO ACADÉMICAMENTE DIRIGIDO POR
F.JAVIER SORIA DE DIEGO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ANÁLISIS
UNIVERSITAT DE BARCELONA
CURSO 2005/06



Índice general

1. Introducción	1
1.1. Definiciones	1
1.1.1. Traslaciones y dilataciones. Transformada de Fourier.	1
1.1.2. Wavelets	2
1.2. Bases ortonormales en $L^2(\mathbb{T})$ y series de Fourier	3
1.3. Isomorfismo isométrico en $L^2(\mathbb{T})$. Identidad de Parseval	4
2. Bases de Gabor. Teorema de Balian-Low	7
2.1. Introducción	7
2.2. Teorema de Balian-Low	8
2.3. Ejemplos	10
3. El sistema de Haar	13
3.1. El sistema de Haar es una base ortonormal	13
4. Análisis de multiresolución y construcción de wavelets	17
4.1. Análisis de multiresolución	17
4.2. Construcción de Wavelets desde un AMR	25
4.3. Ejemplos	34
4.3.1. La Wavelet de Haar	34
4.3.2. La Wavelet de Shannon	35
5. Construcción de wavelets de soporte compacto	37
5.1. Introducción	37
5.2. Construcción de Daubechies	45
6. Más ejemplos de wavelets	51
6.1. La Wavelet de Journé	51
6.2. Más ejemplos de wavelets MSF	53
6.3. La Wavelet de Lemarié-Meyer	54

A. Resultados de análisis real, análisis armónico y análisis funcional	57
A.1. Espacios L^p	57
A.2. Teoría en $L^1(\mathbb{R})$. Transformada de Fourier	59
A.3. Teoría en $L^2(\mathbb{R})$. Transformada de Fourier	60
B. Algoritmos	63
Bibliografía	67

Capítulo 1

Introducción

1.1. Definiciones

1.1.1. Traslaciones y dilataciones. Transformada de Fourier.

A lo largo de este trabajo estudiaremos bases hilbertianas de $L^2(\mathbb{R})$ llamadas wavelets (ondículas, ondelettes, onetes,...) ortonormales, cuyos elementos son funciones construidas por traslaciones enteras y dilataciones diádicas de una función madre:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k).$$

Notación 1.1.1 Sea f una función y $h, r \in \mathbb{R}, r > 0$. Denotamos por τ_h a las traslaciones de f : $(\tau_h f)(x) := f(x - h)$, y por ρ_r a las dilataciones: $(\rho_r f)(x) := f(rx)$.

Proposición 1.1.2 *La derivada conmuta con las traslaciones.*

Demostración:

$$(\tau_h)(f'(x)) = f'(x - h) = f'(\tau_h(x)).$$

□

Definición 1.1.3 Sea f una función de $L^1(\mathbb{R})$. Definimos su **transformada de Fourier**¹ como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx.$$

Definición 1.1.4 Definimos el operador de modulación M_ξ como el operador:

$$M_\xi : g(t) \longrightarrow e^{2\pi i \xi t} g(t).$$

¹En la sección A.3 del apéndice extenderemos esta definición a funciones de cuadrado integrable.

Proposición 1.1.5 La transformada de Fourier de la trasladada de f es la modulación de la transformada de Fourier de f , i.e. $\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{-2\pi i h \xi} \hat{f}(\xi)$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \widehat{(\tau_h f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x-h) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi (y+h)} f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi y} e^{-2\pi i \xi h} f(y) dy = e^{-2\pi i \xi h} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi y} f(y) dy \\ &= e^{-2\pi i \xi h} \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

Definición 1.1.6 Sea g una función de $L^1(\mathbb{R})$. Definimos su **transformada de Fourier inversa** como

$$\check{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Observación 1.1.7 Observamos que $\check{g}(x) = \hat{g}(-x)$, y que $\check{\check{f}}(x) = f(x)$.

1.1.2. Wavelets

Definición 1.1.8 Una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es un **wavelet ortonormal** si el sistema $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ proporciona una base ortonormal, donde:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k).$$

Observación 1.1.9

1. Realizamos traslaciones enteras y dilataciones diádicas de ψ :

$$\begin{aligned} \tau_k \psi(x) &= \tau(x-k) \\ (\rho_r f)(x) &= f(rx), \text{ donde } r = 2^j. \end{aligned}$$

2. Multiplicamos por un factor corrector $2^{j/2}$ para preservar la ortonormalidad, (para conservar norma 1).

Proposición 1.1.10

$$\widehat{(\psi_{j,k})}(\xi) = e^{-2\pi i 2^{-j} k \xi} 2^{-j/2} \hat{\psi}(2^{-j} \xi)$$

i.e., seguimos teniendo dilataciones diádicas, y las traslaciones se convierten en modulaciones.

Demostración:

$$\begin{aligned}
 \widehat{(\psi_{j,k})}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} \psi_{j,k}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} 2^{j/2} \psi(2^j x - k) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi (y+k) 2^{-j}} 2^{j/2} \psi(y) 2^{-j} dy = e^{-2\pi i \xi 2^{-j} k} 2^{-j/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi y 2^{-j}} \psi(y) dy \\
 &= e^{-2\pi i \xi 2^{-j} k} 2^{-j/2} \widehat{\psi}(2^{-j} \xi)
 \end{aligned}$$

□

1.2. Bases ortonormales en $L^2(\mathbb{T})$ y series de Fourier

Recordemos que $L^2(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar habitual

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

y que definimos la norma de $f \in L^2(\mathbb{T})$ como $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Sea H un espacio de Hilbert.

Definición 1.2.1 Un **sistema ortogonal** de H es un subconjunto de elementos no nulos del espacio ortogonales dos a dos, i.e. si e_i, e_j son dos elementos del sistema y $i \neq j$, entonces $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.

Si además son unitarios ($\|e_i\| = 1, \forall e_i$) decimos que el sistema es **ortonormal**.

Diremos que el sistema ortonormal $E \subset H, E = \{e_i\}_{i \in I}$ es **completo** si $E^\perp = \{0\}$, i.e. si $\langle x, e_i \rangle = 0, \forall i \in I$ implica que $x = 0$. Un sistema ortonormal completo se llama también **base hilbertiana** o **base ortonormal** de H .

Ejemplo 1.2.2 El sistema trigonométrico complejo $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$ respecto del producto escalar habitual.

El sistema trigonométrico real $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(nt), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(nt); n = 1, 2, \dots\}$ también lo es.

En ambos casos es muy fácil comprobar que son sistemas ortonormales. Para la completitud podemos ver una indicación de la demostración en [JC].

Para simplificar notación, en lo que queda de sección y en la siguiente, vamos a considerar el producto escalar normalizado

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

Con este producto escalar tenemos que las bases trigonométricas real y compleja son $\{e_k(t) = e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{1, \sqrt{2} \cos(nt), \sqrt{2} \sin(nt); n = 1, 2, \dots\}$ respectivamente.

Definición 1.2.3 Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Los números complejos

$$\hat{f}(k) := \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt, k \in \mathbb{Z}$$

se denominan **coeficientes de Fourier de f** . Se definen de la misma forma para cualquier sistema ortonormal de un espacio de Hilbert cualquiera, haciendo el producto escalar del elemento de H del cual queremos calcular el coeficiente de Fourier por cada elemento del sistema.

Definición 1.2.4 Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Definimos su **serie de Fourier** como

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e_k(t).$$

Aunque podemos calcular las series de Fourier para cualquier sistema ortonormal de un espacio de Hilbert, históricamente se asocian al sistema trigonométrico de $L^2(\mathbb{T})$.

Observación 1.2.5 Observamos que la serie de Fourier asociada al sistema trigonométrico real es

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)),$$

donde

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad n \geq 0, \quad y$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad n \geq 0.$$

(Está resuelto en el ejercicio 2.11.9 de [JC]).

1.3. Isomorfismo isométrico en $L^2(\mathbb{T})$. Identidad de Parseval

Teorema 1.3.1 Desigualdades de Bessel

Sea $\{e_i\}_{i \in I}$ un sistema ortonormal de un espacio de Hilbert H , y sea $x \in H$. Entonces

$$\sum_{i \in I} |\hat{x}(i)|^2 \leq \|x\|_H^2.$$

Demostración:

Sea $F = [\{e_j\}_{j \in J}]$ con $J \in I$ finito. Sea $P_F x$ la proyección ortogonal de x en el subespacio F . Observamos que

$$P_F x = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Tenemos que $\|P_F x\|^2 \leq \|x\|_H^2$, i.e. que

$$\sum_{j \in J} |\hat{x}(j)|^2 \leq \|x\|_H^2$$

Tomando supremo en J acabamos la demostración. □

Definición 1.3.2 Definimos la **correspondencia de Fourier** como la asignación lineal

$$x \in H \longrightarrow \hat{x} \in \ell^2(I)$$

Observación 1.3.3

Directamente del teorema anterior deducimos que la correspondencia de Fourier es contractiva. Veamos también que es exhaustiva. En efecto, si $d = (d_i)_{i \in I} \in \ell^2(I)$, definimos $x := \sum_{i \in I} d_i e_i \in H$. Veamos que $\hat{x} = d$:

Podemos suponer que $I = \mathbb{N}$. La sucesión de sumas $s_n = \sum_{k \leq n} d_k e_k$ es convergente en H , ya que, si $p \leq q$, por completitud y porque $d \in \ell^2$,

$$\|s_p - s_q\|_H^2 = \left\| \sum_{p < k \leq q} |d_k| \right\|^2 \leq \sum_{k > p} |d_k|^2 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

Por continuidad, como $s_n \longrightarrow x$ en H , resulta que $\hat{x}(i) = \lim_n \langle s_n, e_i \rangle = d_i$, ya que $\langle s_n, e_i \rangle = d_i$, si $n \geq i$.

Ahora la cuestión es plantearse si esta correspondencia será una isometría. En general este resultado no es cierto. Veamos que si lo es en el caso de sistemas ortonormales completos.

Teorema 1.3.4 Teorema de Fischer-Riesz

Sea $\{e_i\}_{i \in I}$ un sistema ortonormal de un espacio de Hilbert H . Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. El sistema ortonormal es completo.
2. $x = \sum_k \hat{x}(k) e_k$ en H , $\forall x \in H$
3. $\|x\|_H = \|\hat{x}\|_2$ (**Identidad de Parseval**).
4. $\langle x, y \rangle_H = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle_2$, $\forall x, y \in H$.

Demostración:

- $1 \Rightarrow 2$:

Sea $x \in H$, $\hat{x} \in \ell^2$. Por la observación anterior,

$$\sum_k \hat{x}(k) e_k = z \in H$$

Veamos que necesariamente $x = z$.

$$\begin{aligned} \langle z - x, e_i \rangle_H &= \langle z, e_i \rangle_H - \langle x, e_i \rangle_H = \hat{z}(i) - \hat{x}(i) \\ &= \hat{x}(i) - \hat{x}(i) = 0. \end{aligned}$$

Así, como el sistema es completo, necesariamente $z - x = 0$ y por tanto $z = x$.

- $2 \Rightarrow 3$:

$x = \sum_k \hat{x}(k) e_k$. Utilizando el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$\begin{aligned} \|x\|_H^2 &= \left\| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \hat{x}(k) e_k \right\|_H^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^N \hat{x}(k) e_k \right\|_H^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}(k)|^2 = \|\hat{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

- $3 \Rightarrow 4$:

Se deduce directamente de la Identidad de Polarización para la $\|\cdot\|_H$ y para la $\|\cdot\|_2$.

- $4 \Rightarrow 1$:

Obviamente tenemos que 4 implica 3 . Veamos ahora que 3 implica 1 . Lo veremos por contrareciproco. Supongamos que el sistema ortonormal no es completo. Sea $e \in \{e_k\}^\perp$ no nulo. Tenemos que $\|e\|_H \neq 0$, pero al ser del ortogonal, $\|\hat{e}\|_2 = 0$. Así, si no se cumple 1 no se cumple 3 y queda probado el teorema.

□

Observación 1.3.5 Hemos demostrado que la correspondencia de Fourier es una isometría lineal, en particular entre $L^2(\mathbb{T})$ y el espacio de sucesiones $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Capítulo 2

Bases de Gabor. Teorema de Balian-Low

2.1. Introducción

Las bases clásicas de $L^2([0, 1])$ son las bases trigonométricas: $\{e^{2\pi ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$. Para otros intervalos de \mathbb{R} únicamente tenemos que hacer traslaciones y dilataciones apropiadas de las exponenciales. Para obtener una base de este tipo de $L^2(\mathbb{R})$ recubrimos \mathbb{R} con una unión disjunta de intervalos $[\alpha_j, \alpha_{j+1}], j \in \mathbb{Z}, -\infty < \dots < \alpha_j < \alpha_{j+1} < \dots < \infty$, consideramos una de estas bases para cada espacio $L^2([\alpha_j, \alpha_{j+1}])$, multiplicamos cada uno de los elementos de la base por la función característica del intervalo $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ y tomamos la totalidad de las funciones obtenidas. Estas bases pueden causar problemas en los extremos de los intervalos del recubrimiento. Las bases de Gabor son otro tipo de sistemas ortonormales de $L^2(\mathbb{R})$ que solucionan este problema.

Definición 2.1.1 Sea $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]$. Para cada uno de los intervalos $[n, n+1]$ consideramos la base ortonormal trigonométrica y multiplicamos cada elemento por una función regular. El sistema resultante es lo que se denomina **base de Gabor**:

$$\{g_{m,n}(x) = e^{2\pi imx} g(x - n) : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Para que este tipo de sistemas sea una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ ni la función g ni la función \hat{g} pueden ser muy localizadas. Veámoslo con el teorema de Balian-Low.

El siguiente resultado está relacionado con el principio de incertidumbre de Heisenberg: imaginemos un microscopio que pueda hacer visible un electrón. Si lo queremos ver debemos proyectar una luz o alguna especie de radiación apropiada sobre él. Pero un electrón es tan pequeño, que bastaría un solo fotón de luz para hacerle cambiar de posición apenas lo tocara. Y en el preciso instante de medir su posición, alteraríamos ésta. Es decir es imposible conocer a la vez la velocidad y el momento (o posición) de una partícula. En el teorema de Balian-Low podemos relacionar la primera integral del enunciado con la velocidad de una partícula y la segunda

con su momento. El producto de estas dos cantidades tiene como cota inferior la constante de Planck, muy importante en mecánica cuántica, y que vale aproximadamente $6,626 \times 10^{-34}$.

2.2. Teorema de Balian-Low

Teorema 2.2.1 *Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ y $g_{m,n}(x)$ los elementos de una base de Gabor. Entonces:*

$$\{g_{m,n}, m, n \in \mathbb{Z}\} \text{ es una base ortonormal de } L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx = \infty \\ \text{ó} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \infty \end{cases}$$

Demostración:

Definimos los operadores P y Q :

$$(Qf)(x) := xf(x) \quad (Pf)(x) := -if'(x).$$

Observamos que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |Qg(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |xg(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |g(x)|^2 dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} |Pg(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |-ig'(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|^2 dx \\ &= \langle g', g' \rangle = \langle \hat{g}', \hat{g}' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |2\pi i \xi \hat{g}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

donde en la segunda afirmación he utilizado las Proposiciones (A.3.2) y (A.3.3) y el Teorema (A.3.1). Así, tenemos que ver que o bien Qg , o bien Pg no son de $L^2(\mathbb{R})$. Lo demostramos por reducción al absurdo.

Supongamos que Qg y Pg pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$. Como $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal:

$$\begin{aligned} \langle Qg, Pg \rangle &= \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{m,n} \rangle g_{m,n}, Pg \right\rangle \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle \langle Qg, g_{m,n} \rangle g_{m,n}, Pg \rangle \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, Pg \rangle \end{aligned}$$

Observamos que $n \cdot \langle g, g_{m,n} \rangle = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$ ya que:

Si $n = 0$: trivial.

Si $n \neq 0$: $g = g_{0,0} \perp g_{m,n}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}$.

Así,

$$\begin{aligned}
\langle Qg, g_{m,n} \rangle &= \langle Qg, g_{m,n} \rangle - n \cdot \langle g, g_{m,n} \rangle = \langle Qg - ng, g_{m,n} \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)(x-n)\overline{g(x-n)}e^{-2\pi imx} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y+n)y\overline{g(y)}e^{-2\pi im(y+n)} dy \\
&= \langle g_{-m,-n}, Qg \rangle
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\langle Pg, g_{m,n} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} Pg(x)\overline{g_{m,n}(x)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -ig'(x)e^{-2\pi imx}\overline{g(x-n)} dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)e^{-2\pi imx}\overline{g(x-n)} dx \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} g(x)[-2\pi im\overline{g(x-n)} + \overline{g'(x-n)}]e^{-2\pi imx} dx \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} [-2\pi img(x)\overline{g(x-n)}e^{-2\pi imx} + g(x)\overline{g'(x-n)}e^{-2\pi imx}] dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi mg(x)\overline{g(x-n)}e^{-2\pi imx} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{g'(x-n)}e^{-2\pi imx} dx \\
&= 2\pi m \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\overline{g(x-n)}e^{-2\pi imx} dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(y+n)\overline{ig'(y)}e^{-2\pi im(y+n)} dy \\
&= 2\pi m \langle g, g_{m,n} \rangle + \langle g_{-m,-n}, Pg \rangle = 2\pi m \delta_{m,0} \delta_{0,n} + \langle g_{-m,-n}, Pg \rangle \\
&= \langle g_{-m,-n}, Pg \rangle,
\end{aligned}$$

donde la tercera línea es consecuencia de la Proposición A.3.2, y la sexta del cambio de variable $y = x - n$. Con las tres igualdades anteriores obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\langle Qg, Pg \rangle &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle Qg, g_{m,n} \rangle \langle g_{m,n}, Pg \rangle \\
&= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle g_{-m,-n}, Qg \rangle \langle Pg, g_{-m,-n} \rangle \\
&= \langle Pg, Qg \rangle
\end{aligned}$$

Ahora llegaremos a contradicción con esta última igualdad. Como Pg y Qg son de $L^2(\mathbb{R})$, podemos aplicar la fórmula de integración por partes, y obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\langle Qg, Pg \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} xg(x) \cdot \overline{-ig'(x)} dx \\
&= -i \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) + g'(x)x) \overline{g(x)} dx \\
&= -i \langle g, g \rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)x \overline{g(x)} dx \\
&= -i \langle g, g \rangle + \langle Pg, Qg \rangle = -i \langle g_{0,0}, g_{0,0} \rangle + \langle Pg, Qg \rangle \\
&= -i + \langle Pg, Qg \rangle,
\end{aligned}$$

que contradice la anterior igualdad. Así Qg y Pg no pueden estar a la vez en $L^2(\mathbb{R})$, con lo que queda probado el teorema. \square

2.3. Ejemplos

1. Sabemos que si $g = \chi_{[0,1]}$, el sistema generado por las funciones $g_{m,n} = e^{2\pi imx} \chi_{[n,n-1]}$ es el sistema ortonormal trigonométrico usual extendido a \mathbb{R} , tomando el recubrimiento de \mathbb{R} : $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n-1)$. Veamos que se cumple el teorema:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\chi_{[0,1]}|^2 dx &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \\
\hat{\chi}_{[0,1]}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} \chi_{[0,1]}(x) dx \\
&= \int_0^1 e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{1}{2\pi \xi} (-\sin(-2\pi \xi) + i(\cos(-2\pi \xi) - 1))
\end{aligned}$$

Así, usando la fórmula del seno del ángulo mitad, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\xi^2 |\hat{\chi}_{[0,1]}(\xi)|^2 &= \left| \frac{1}{2\pi} (-\sin(-2\pi \xi) + i \cos(-2\pi \xi) - i) \right|^2 \\
&= \left(\frac{\sin(-\pi \xi)}{\pi} \right)^2 = \left(\frac{\sin(\pi \xi)}{\pi} \right)^2,
\end{aligned}$$

cuya integral es divergente.

2. Sea $g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

Afirmación: $\{g_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal.

En efecto, por el Teorema A.3.1 tenemos que la transformada de Fourier de una base ortonormal es una base ortonormal, ya que,

$$\langle f, g \rangle = 0 \Rightarrow \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 0, y$$

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

Si en el ejemplo anterior cambiamos $\chi_{[0,1]}$ por $G = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$, obtenemos una base ortonormal. Observemos que la transformada de Fourier de G es nuestra g :

$$\begin{aligned}\widehat{G}(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} \chi_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\cos(-2\pi \xi x) + i \sin(-2\pi \xi x)) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(-2\pi \xi x) dx \\ &= -\left. \frac{\sin(-2\pi i \xi x)}{2\pi \xi} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin(\pi \xi)}{\pi \xi}.\end{aligned}$$

Así la base de Gabor generada por g es una base ortonormal, ya que sus elementos son traslaciones y modulaciones de g .

En este caso la primera integral del enunciado del teorema de Balian-Low es divergente (es análogo al ejemplo 1 pero cambiando las integrales).

3. Veamos ahora un ejemplo, donde utilizando el contrarrecíproco del teorema, probaremos que una función no genera una base ortonormal.

Sea $g(x) = e^{-x^2}$. Veamos que el sistema generado por g no es una base ortonormal.

Calculamos la primera integral del enunciado del teorema:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |e^{-x^2}|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2x^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Veamos que la segunda también es convergente:

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi i \xi x + x^2)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{e^{\pi^2 \xi^2}}$$

Así, la segunda integral del enunciado del Teorema es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \left| \frac{\sqrt{\pi}}{e^{\pi^2 \xi^2}} \right|^2 d\xi = \frac{1}{4\sqrt{2\pi^3}}.$$

Por tanto obtenemos que el sistema generado por la función g no es una base ortonormal.

4. Veamos ahora un ejemplo para comprobar que el recíproco del enunciado no es cierto en general. Sea $g = \sqrt{\frac{2}{3}} \chi_{[0, \frac{3}{2}]}$.

Vemos primero que $g_{m,n}$ no forman una base ortonormal.

$$\langle g_{0,0}, g_{0,1} \rangle = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Veamos ahora que se cumple la tesis del teorema, aunque la base no sea ortonormal. Procediendo como en el ejemplo 1, se puede ver que la primera integral es finita, pero la segunda no, ya que

$$\xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{\sin(\frac{3}{2}\pi\xi)}{\pi} \right)^2,$$

cuya integral es divergente.

Capítulo 3

El sistema de Haar

3.1. El sistema de Haar es una base ortonormal

En esta sección veremos el primer ejemplo de wavelet ortonormal. Definimos en $L^2(\mathbb{R})$ la función:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & , \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

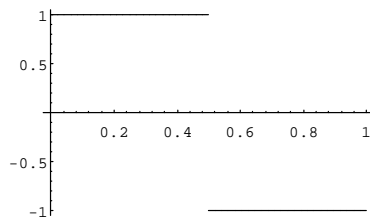


Figura 3.1: La wavelet de Haar

Proposición 3.1.1 ψ es una wavelet ortonormal.

Demostración:

Queremos ver que el sistema $\psi_{j,k}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, donde $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$.

Veamos primero que son elementos de norma 1:

$$\begin{aligned}\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left| 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^j \psi^2(2^j x - k) dx = \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{1+k}{2^j}} 2^j dx \\ &= 2^j \left[\frac{1}{2^j} + \frac{k}{2^j} - \frac{k}{2^j} \right] = 1\end{aligned}$$

Veamos ahora que los elementos son ortogonales dos a dos: sean $j, k, r, t \in \mathbb{Z}$, $(j, k) \neq (r, t)$. Tenemos que,

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \text{si } x \in \left[\frac{k}{2^j}, \frac{1+k}{2^j} \right) \\ -2^{\frac{j}{2}} & \text{si } x \in \left[\frac{1+k}{2^j}, \frac{1+k}{2^j} \right) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\psi_{r,t}(x) = 2^{\frac{r}{2}} \psi(2^r x - t) = \begin{cases} 2^{\frac{r}{2}} & \text{si } x \in \left[\frac{t}{2^r}, \frac{1+t}{2^r} \right) \\ -2^{\frac{r}{2}} & \text{si } x \in \left[\frac{1+t}{2^r}, \frac{1+t}{2^r} \right) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los intervalos diádicos donde las funciones no se anulan, o bien son disjuntos, o bien uno está contenido dentro del otro. En el primer caso el producto escalar es cero porque el producto de las dos funciones es cero, y en el segundo la función con el soporte más pequeño hace que en la mitad del soporte el producto sea positivo y en la otra mitad el mismo valor en negativo, con lo que el producto escalar también se anula.

Queda probar la completitud. Tenemos que ver que el sistema de Haar es total en $L^2(\mathbb{R})$.

El sistema de Haar es la adherencia de la envoltura lineal de funciones constantes sobre intervalos diádicos. En efecto, basta verlo para la función $\chi_{[0,1]}$ (haciendo dilataciones y traslaciones). La serie $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ con $f_j = 2^{-j} \psi_{-j,0}$ es convergente en $L^2(\mathbb{R})$ por el Teorema 1.3.4. Observamos que su suma es $\chi_{[0,1]}$. Por tanto toda función constante escalonada sobre intervalos diádicos es límite de combinaciones lineales del sistema de Haar.

Las funciones continuas con soporte compacto $\mathcal{C}_C(\mathbb{R})$ se pueden aproximar uniformemente por funciones escalonadas constantes sobre intervalos diádicos y de soporte compacto. Además $\mathcal{C}_C(\mathbb{R})$ son densas en $L^2(\mathbb{R})$.

Por lo tanto el sistema de Haar es total en $L^2(\mathbb{R})$ y por tanto es completo. \square

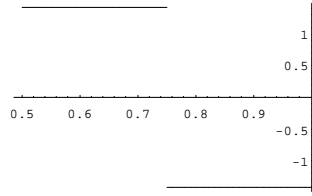


Figura 3.2: $\psi_{1,1}$

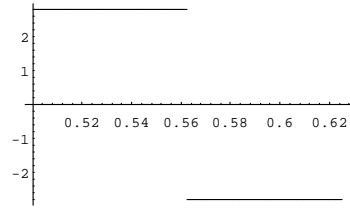


Figura 3.3: $\psi_{3,4}$

Capítulo 4

Análisis de multiresolución y construcción de wavelets

En este capítulo presentaremos un método de construcción de wavelets ortonormales basado en la existencia de una familia de subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ satisfaciendo cinco propiedades. También veremos que estas propiedades no son independientes.

4.1. Análisis de multiresolución

Definición 4.1.1 Un **análisis de multiresolución** o **AMR** es una sucesión de subespacios cerrados V_j , $j \in \mathbb{Z}$, de $L^2(\mathbb{R})$ cumpliendo

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (4.1)$$

$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2(\cdot)) \in V_{j+1}, \quad (4.2)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \quad (4.3)$$

$$\text{Propiedad de densidad: } \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (4.4)$$

$$\exists \varphi \in V_0 \text{ tal que } \{\varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\} \text{ es una base ortonormal de } V_0. \quad (4.5)$$

A la función φ de la propiedad (4.5) la llamaremos **función de escala del AMR**.

Veremos que a veces utilizaremos una propiedad más débil que la (4.5), pero para ello antes necesitamos una definición.

Definición 4.1.2 $\{\varphi(\cdot - n), n \in \mathbb{Z}\}$ es una **base de Riesz para** V_0 si para toda f de V_0 existe una única sucesión $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$ tal que

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \varphi(x - n)$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R})$, y

$$A \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \varphi(x - n) \right\|_2^2 \leq B \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha_n|^2$$

con $0 < A \leq B < \infty$ constantes que no dependen de f .

Cuando tenemos una familia de subespacios cumpliendo las cuatro primeras propiedades de la definición, y esta quinta propiedad más débil decimos que tenemos un AMR con una base de Riesz.

Observación 4.1.3

1. Observamos que la Propiedad 4.5 de la definición implica que $\{\varphi(\cdot - n), n \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz para V_0 con $A = B = 1$. En efecto, basta tomar $A = B = 1$ y la sucesión α_n de los coeficientes de Fourier de cualquier función de $L^2(\mathbb{R})$ respecto del sistema ortonormal $\{\varphi(\cdot - n), n \in \mathbb{Z}\}$. Por la Identidad de Parseval (1.3.4) se deduce inmediatamente lo enunciado.
2. Sea $\varphi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k)$. Como $\varphi_{0,k} = \varphi(x - k)$ vemos que $\varphi_{0,k} \in V_0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ por la condición (4.5). Por otra parte, si $j \in \mathbb{Z}$, la condición (4.2) implica que $\{\varphi_{j,n} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_j .

Ejemplo 4.1.4 Veremos que el sistema de Haar está relacionado con el siguiente AMR.

Sea V_j el espacio de las funciones en $L^2(\mathbb{R})$ que son constantes en intervalos de la forma $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$, $k \in \mathbb{Z}$. Entonces $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ es un AMR, y podemos tomar como función de escala $\varphi = \chi_{[-1,0]}$. Es inmediato comprobar que se cumplen las cinco propiedades de la definición.

Veremos ahora con los siguientes dos teoremas que las propiedades de la definición no son independientes.

Teorema 4.1.5 *Las condiciones (4.1), (4.2), (4.5) implican (4.3). Este resultado es cierto incluso si en vez de (4.5) suponemos que se cumple la condición más débil, es decir cuando tenemos un AMR con una base de Riesz.*

Demostración:

Lo demostraremos por reducción al absurdo. Suponemos que existe una función f no nula en $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|f\|_2 = 1$. Utilizando reiteradamente la propiedad (4.2) obtenemos,

$$\begin{aligned} f \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j &\Rightarrow f \in V_{-j}, \forall j \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(2(\cdot)) \in V_{-j+1} \Rightarrow f(4(\cdot)) \in V_{-j+2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dots \Rightarrow f_j(x) = 2^{\frac{j}{2}} f(2^j x) \in V_0 \end{aligned}$$

Por un cambio de variable tenemos que $\|f_j\|_2 = \|f\|_2 = 1$.

Como $\{\varphi(\cdot - n) : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz de V_0 , podemos escribir:

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j \varphi(x - k),$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R})$, de manera que

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k^j|^2 \leq \|f_j\|_2^2 = 1. \quad (4.6)$$

Tomamos transformada de Fourier,

$$\begin{aligned} 2^{-\frac{j}{2}} \hat{f}(2^{-j}\xi) &= 2^{-\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i 2^{-j}\xi x} f(2^{-j}x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi y} 2^{\frac{j}{2}} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi y} f_j(y) dy \\ &= \hat{f}_j(\xi), \end{aligned}$$

y utilizando la Proposición 1.1.5,

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j \varphi(x - k),$$

entonces,

$$\begin{aligned} \hat{f}_j(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j (\tau_k \hat{\varphi})(\xi) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j e^{-2\pi i \xi k} \hat{\varphi}(\xi) = m_j(\xi) \hat{\varphi}(\xi), \end{aligned}$$

donde $m_j(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j e^{-2\pi i \xi k}$.

m_j es una función 1-periódica (utilizaremos que es periódica de periodo 2) y por (4.6) tenemos que $\|m_j\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{A}}$ y por tanto es de $L^2([a, a+2])$, $a \in \mathbb{Z}$.

Así, $\hat{f}(\xi) = 2^{\frac{j}{2}} m_j(2^j \xi) \hat{\varphi}(2^j \xi)$, y para todo j mayor o igual que 1,

$$\begin{aligned} \int_2^4 |\hat{f}(\xi)| d\xi &\leq 2^{\frac{j}{2}} \left(\int_2^4 |\hat{\varphi}(2^j \xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_2^4 |m_j(2^j \xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-\frac{j}{2}} \left(\int_{2^{j+1}}^{2^{j+2}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2^{j+1}}^{2^{j+2}} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{2^{j+1}}^{\infty} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2^j} \int_{2^{j+1}}^{2^{j+2}} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{2^{j+1}}^{\infty} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2^j} \sum_{l=0}^{2^j-1} \int_{2^{j+1+2l}}^{2^{j+1+2(l+1)}} |m_j(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{2^{j+1}}^{\infty} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{A} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es consecuencia de la desigualdad de Hölder.

Haciendo j tender a ∞ obtenemos que $\int_2^4 |\hat{f}(\xi)| d\xi = 0$, y por tanto $\hat{f}(\xi) = 0, a.e. \xi \in [2, 4]$.

Con el mismo argumento para $2^{\frac{1}{2}}\hat{f}(2^l\xi), l \in \mathbb{Z}$, obtenemos que $\hat{f}(\xi) = 0, a.e. \xi \in 2^l[2, 4]$. Así,

$$\hat{f}(\xi) = 0, a.e. \xi \in (0, \infty).$$

Haciendo el mismo argumento en $[-4, -2]$ en vez de en $[2, 4]$, obtenemos que $\hat{f}(\xi) = 0, a.e. \xi \in (-\infty, 0)$. Así llegamos a contradicción con el hecho de que f sea no nula. \square

Teorema 4.1.6 *Sea $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ una sucesión de subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ cumpliendo las condiciones (4.1), (4.2), (4.5). Suponemos que la función de escala φ de (4.5) es tal que $|\hat{\varphi}|$ es continua en el cero. Entonces la condición (4.4) es equivalente a que $\hat{\varphi}(0) \neq 0$. Además, $|\hat{\varphi}(0)| = 1$.*

Demostración:

- Veamos primero que si $\hat{\varphi}(0) \neq 0$, entonces se cumple (4.4).

Veremos que el ortogonal de $W \equiv \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}$ es cero. Probaremos que W es invariante por traslaciones. Para ello, veremos que W es invariante por traslaciones diádicas $\tau_{2^{-l}m}, l, m \in \mathbb{Z}$.

Sea $f \in W$. Dado $\varepsilon > 0$ existen $j_0 \in \mathbb{Z}$ y $h \in V_{j_0}$, tales que $\|f - h\|_2 < \varepsilon$. Por (4.1), $h \in V_j, \forall j \geq j_0$. Por (4.2) y (4.5), podemos escribir,

$$h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^j \varphi(2^j x - k)$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R})$. Así,

$$(\tau_{2^{-l}m}h)(x) = h(x - 2^{-l}m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^j \varphi(2^j(x - 2^{-l}m) - k).$$

Si $j \geq l$, como 2^{j-l} es un entero, $\varphi(2^j(x - 2^{-l}m) - k) = \varphi(2^j x - 2^{j-l}m - k)$ es un elemento de V_j . De $\|\tau_{2^{-l}m}f - \tau_{2^{-l}m}h\|_2 = \|f - h\|_2 < \varepsilon$, con ε suficientemente pequeño, podemos deducir que W es invariante por traslaciones diádicas.

Para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario, podemos encontrar m y l enteros tales que $2^{-l}m$ sea arbitrariamente cercano a x . Así, $\|\tau_{2^{-l}m}f - \tau_x f\|_2 < \varepsilon$, y concluimos que W es invariante para todas las traslaciones.

Como $\hat{\varphi}(0) \neq 0$ y $|\hat{\varphi}|$ es continua en el cero, entonces $\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$ en un entorno del cero $(-\mu, \mu)$. Supongamos que existe $g \in W^\perp$. Queremos ver que g es idénticamente nula. g es ortogonal a toda función f de W , y como W es invariante por traslaciones,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+t) \overline{g(t)} dt = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in W.$$

Como $\widehat{(\tau_{-x}f)}(\xi) = e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi)$, y usando el Teorema de Plancherel (A.3.1), obtenemos,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $\hat{f}\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, la igualdad anterior implica que $\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} = 0$, *a.e.* $\xi \in \mathbb{R}$. En particular, sea $f(x) = 2^j \varphi(2^j x)$ tal que $f \in V_j \subset W$ y $\hat{f}(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-j}\xi)$. Así, $\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} = 0$, *a.e.* $\xi \in \mathbb{R}$. Dado que $\hat{\varphi}(2^{-j}\xi) \neq 0$ si $\xi \in (-2^j\mu, 2^j\mu)$ podemos concluir que $\hat{g}(\xi) = 0$, *a.e.* tal que $|\xi| < 2^j\mu$. Tomando límite cuando $j \rightarrow \infty$ vemos que $\hat{g} = 0$, *a.e.* y por lo tanto $g = 0$. Así, la unión de los subespacios cerrados V_j es densa en $L^2(\mathbb{R})$.

- Suponemos ahora que $W = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ y veamos que $\hat{\varphi}(0) \neq 0$.

Sea f tal que $\hat{f} = \chi_{[-1,1]}$. Entonces por el Teorema de Plancherel,

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2 = 2.$$

Sea P_j la proyección ortogonal sobre V_j . Entonces, como

$$\| \|f\| - \|P_j f\| \| \leq \|f - P_j f\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

tenemos que $\|P_j f\|_2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \|f\|_2$.

Sea $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$, entonces tenemos que,

$$\|P_j f\|_2^2 = \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \right\|_2^2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 2.$$

Por (4.2) y (4.5), $\{\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal. Por el teorema de Plancherel, la identidad de Parseval, y teniendo en cuenta que $\hat{f} = \chi_{[-1,1]}$, tenemos,

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_{L^2}^2 &= \|\{\langle f, \varphi_{j,k} \rangle\}\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_{j,k} \rangle|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\varphi}_{j,-k}(\xi)} d\xi \right|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i 2^{-j} k \xi} 2^{-j/2} \overline{\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)} d\xi \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i 2^{-j} k \xi} 2^{-j/2} \overline{\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)} d\xi \right|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} e^{-2\pi i \mu k} 2^{j/2} \overline{\hat{\varphi}(\mu)} d\mu \right|^2 \\ &= 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} e^{-2\pi i \mu k} \overline{\hat{\varphi}(\mu)} d\mu \right|^2. \end{aligned}$$

Para j suficientemente grande tenemos que $[-2^{-j}, 2^{-j}] \subset [-1, 1]$, y la última expresión es 2^j veces la suma de los cuadrados de los valores absolutos de los coeficientes de Fourier de la función $\chi_{[-2^{-j}, 2^{-j}]}\overline{\hat{\varphi}}$. Así, por Plancherel,

$$2^j \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 2.$$

Pero, por la continuidad de $|\hat{\varphi}|$ en el cero,

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \longrightarrow |\hat{\varphi}(0)|^2$$

Tomando $\varepsilon = 2^{-j}$,

$$\frac{1}{2} 2^j \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu \longrightarrow |\hat{\varphi}(0)|^2$$

Así, $|\hat{\varphi}(0)| = 1 \neq 0$.

□

Observación 4.1.7

1. De la demostración del teorema es fácil deducir (4.4) si suponemos que se cumplen (4.1), (4.2), (4.5), y que existe $\mu \neq 0$ tal que $\hat{\varphi}(\xi) \neq 0$ en $(-\mu, \mu)$.
2. También vemos en la demostración del teorema que si $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ es un AMR, se debe cumplir

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{-j+1}} \int_{-2^{-j}}^{2^{-j}} |\hat{\varphi}(\mu)|^2 d\mu = 1.$$

Ahora mostraremos que es equivalente suponer (4.5), que suponer sólo que tenemos una base de Riesz. Ya observamos que una implicación es evidente, ahora veremos que si $\{\varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz de V_0 , entonces existe una función $\gamma \in V_0$ tal que $\{\gamma(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_0 . Para ello previamente enunciaremos un lema y una proposición.

Lema 4.1.8 *Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que el conjunto de traslaciones $\{\varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz del subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R})$ que generan. Es decir,*

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(\cdot - k) \right\|_{L^2}^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2,$$

donde las constantes A y B cumplen $0 < A \leq B < \infty$ y son independientes de $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Sea $\sigma_\varphi(\xi) \equiv (\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2)^{1/2}$. Entonces,

$$\sqrt{A} \leq \sigma_\varphi(\xi) \leq \sqrt{B}, \text{ a.e. } \xi \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Sea $\zeta = \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ una sucesión de $\ell^2(\mathbb{Z})$ y $S_\zeta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{0,k}$. Entonces

$$\hat{S}_\zeta(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \hat{\varphi}_{0,k}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i \xi k} \hat{\varphi}(\xi) = \vartheta_\zeta(\xi) \hat{\varphi}(\xi),$$

con $\vartheta_\zeta(\xi) = \sum_k c_k e^{-2\pi i \xi k} \in L^2([0, 1])$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|\hat{S}_\zeta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\vartheta_\zeta(\xi) \hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} |\vartheta_\zeta(\xi) \hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{[0,1]} |\vartheta_\zeta(\xi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 d\xi = \int_{[0,1]} |\vartheta_\zeta(\xi) \sigma_\varphi(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Así, por el teorema de Plancherel,

$$\|S_\zeta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{[0,1]} |\vartheta_\zeta(\xi) \sigma_\varphi(\xi)|^2 d\xi.$$

Por tanto podemos reescribir la propiedad del enunciado de la forma

$$A \|\vartheta_\zeta\|_{L^2([0,1])}^2 \leq \|\vartheta_\zeta \sigma_\varphi\|_{L^2([0,1])}^2 \leq B \|\vartheta_\zeta\|_{L^2([0,1])}^2.$$

Fijamos $\eta \in [0, 1]$ y tomamos $\vartheta_\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \sum_{k=0}^{m-1} e^{ik(\xi-\eta)}$. Así tenemos que,

$$|\vartheta_\zeta(\xi)|^2 = \frac{1}{2\pi m} \left(\frac{\sin(\frac{m(\xi-\eta)}{2})}{\sin(\frac{\xi-\eta}{2})} \right)^2 = K_m(\eta - \xi),$$

donde K_m es el m -ésimo núcleo de Fejér.

Mirando los coeficientes de Fourier de ϑ_ζ deducimos que $\|\vartheta_\zeta\|_{L^2([0,1])}^2 = \frac{1}{2\pi}$. Teniendo esto en cuenta, sustituimos en la desigualdad y obtenemos,

$$\frac{1}{2\pi} A \leq \|\vartheta_\zeta \sigma_\varphi\|_{L^2([0,1])}^2 \leq \frac{1}{2\pi} B.$$

Además,

$$\begin{aligned} \|\vartheta_\zeta \sigma_\varphi\|_{L^2([0,1])}^2 &= \int_0^1 |\vartheta_\zeta(\xi)|^2 \sigma_\varphi^2(\xi) d\xi = \int_0^1 K_m(\eta - \xi) \sigma_\varphi^2(\xi) d\xi \\ &= \int_0^{2\pi} K_m\left(\eta - \frac{y}{2\pi}\right) \sigma_\varphi^2\left(\frac{y}{2\pi}\right) \frac{dy}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} (K_m * \sigma_\varphi^2)(\eta), \quad a.e. \eta \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Así, nuestra desigualdad queda

$$A \leq (K_m * \sigma_\varphi^2)(\eta) \leq B, \quad a.e. \eta \in \mathbb{T}.$$

Pero, por el Teorema de Aproximación de la Identidad, $(K_m * \sigma_\varphi^2)(\eta) \rightarrow \sigma_\varphi^2(\eta)$ cuando $m \rightarrow \infty$, y obtenemos así la desigualdad del enunciado. \square

Proposición 4.1.9 Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces, $\{g(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal si y sólo si $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + k)|^2 = 1$, a.e. $\xi \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Veamos la primera implicación (el recíproco es inmediato). Suponemos que $\{g(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal. Entonces

$$\begin{aligned} \delta_{k,0} &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{g(x-k)} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} e^{-2\pi i \xi k} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{2\pi i \xi k} d\xi = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_l^{l+1} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{2\pi i \xi k} d\xi \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |\hat{g}(\mu + l)|^2 e^{2\pi i \mu k} d\mu \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + l)|^2 \right) e^{2\pi i \mu k} d\mu, \end{aligned}$$

y esto implica que la función 1-periódica $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + k)|^2$ vale 1 a.e., ya que el coeficiente de Fourier correspondiente a $k = 0$ vale 1 y el resto de coeficientes vale 0. \square

Corolario 4.1.10 Si $\{\varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de Riesz de V_0 , podemos encontrar una función $\gamma \in V_0$ tal que $\{\gamma(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ sea una base ortonormal de V_0 .

Demostración:

Primero utilizaremos el lema y sus notaciones. Definimos γ como $\hat{\gamma} = \frac{\hat{\varphi}}{\sigma_\varphi}$. Tenemos, por el Lema 4.1.8, que $\frac{1}{\sigma_\varphi}$ cumple

$$0 < \frac{1}{\sqrt{B}} \leq \frac{1}{\sigma_\varphi(\xi)} \leq \frac{1}{\sqrt{A}}, \text{ a.e. } \xi \in \mathbb{R}.$$

Tanto $\hat{\gamma}$ como γ son de $L^2(\mathbb{R})$. De hecho, dado que σ_φ es periódica de periodo 1, podemos encontrar dos sucesiones $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tales que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_\varphi(\xi)} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi i k \xi}, \text{ y} \\ \sigma_\varphi(\xi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-2\pi i k \xi}, \end{aligned}$$

con convergencia en L^2 . Así,

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(\xi) &= \hat{\varphi}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi i k \xi}, \text{ y} \\ \hat{\varphi}(\xi) &= \hat{\gamma}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-2\pi i k \xi}. \end{aligned}$$

Tomando Transformada de Fourier,

$$\begin{aligned}\gamma(x) &= \sum_k a_k \varphi_{0,k}(x), \\ \varphi(x) &= \sum_k b_k \gamma_{0,k}(x),\end{aligned}$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R})$. Así, $\gamma \in \overline{\langle \varphi_{0,k}, k \in \mathbb{Z} \rangle}$, y $\varphi \in \overline{\langle \gamma_{0,k}, k \in \mathbb{Z} \rangle}$. Por tanto, $\{\gamma(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base de V_0 . Además,

$$\sum_k |\hat{\gamma}(\xi + k)|^2 = \frac{1}{\sigma_\varphi^2(\xi)} \sum_k |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 = 1, \text{ a.e. } \xi \in \mathbb{R}.$$

Así, por la proposición anterior tenemos que también es un sistema ortonormal. \square

4.2. Construcción de Wavelets desde un AMR

Supongamos que tenemos una colección de subespacios cerrados $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ formando un AMR con función de escala φ . Sea W_0 el complementario ortogonal de V_0 en V_1 , es decir

$$V_1 = V_0 \oplus W_0.$$

Entonces, si dilatamos los elementos de W_0 por 2^j , obtenemos un subespacio cerrado W_j de V_{j+1} tal que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Como $V_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} L^2(\mathbb{R})$, tenemos que

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j.$$

Así, para encontrar una wavelet ortonormal, sólo necesitamos encontrar una función ψ de W_0 tal que $\{\psi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ sea una base ortonormal de W_0 , ya que en este caso, por (4.2) y la definición de W_j , $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de W_j , $\forall j \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, y así ψ es una wavelet ortonormal de \mathbb{R} .

Intentemos encontrar esta función ψ . Consideramos $V_0 = W_{-1} \oplus V_{-1}$. Por la propiedad (4.2) de la definición, $\frac{1}{2}\varphi(\frac{\cdot}{2}) \in V_{-1} \subset V_0$. Por (4.5) podemos expresar esta función en función de la base $\{\varphi(\cdot + k), k \in \mathbb{Z}\}$ y obtenemos

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}x\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x + k),$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R})$, donde

$$\alpha_k := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) \overline{\varphi(x + k)} dx, \text{ y } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < \infty.$$

Tomando transformada de Fourier, obtenemos

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_k \alpha_k e^{2\pi i k \xi} = \hat{\varphi}(\xi) m_0(\xi), \quad (4.7)$$

donde $m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{2\pi i k \xi}$ es una función periódica de periodo 1 en $L^2([0, 1])$. A esta función m_0 la llamamos **filtro de paso bajo** asociado a la función de escala φ .

Veamos un corolario de la Proposición 4.1.9.

Corolario 4.2.1 *Supongamos que g es una función de $L^2(\mathbb{R})$ y que $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal. Entonces $|\text{sop}(\hat{g})| \geq 1$ y se da la igualdad si y sólo si $|\hat{g}| = \chi_K$ para algún conjunto $K \subset \mathbb{R}$ medible con $|K| = 1$.*

Demostración:

- Veamos primero que el soporte de \hat{g} tiene medida mayor o igual que uno. Como el sistema es ortonormal, tenemos que $\|g\| = 1$, y por Plancherel también $\|\hat{g}\| = 1$. Por otro lado, por la Proposición 4.1.9, $|\hat{g}(\xi)| \leq 1$, a.e. $\xi \in \mathbb{R}$. Así,

$$|\text{sop}(\hat{g})| = \int_{\text{sop}(\hat{g})} 1 d\xi \geq \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = 1.$$

- Veamos ahora que si se da la igualdad, entonces $|\hat{g}| = \chi_K$ con K conjunto de medida uno. Suponemos que $|\text{sop}(\hat{g})| = 1$. Suponemos también que $0 < |\hat{g}(\xi)| < 1$ en un conjunto E medible, y llegaremos a contradicción.

$$1 = \|\hat{g}\|_2^2 = \int_{\text{sop}(\hat{g})} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi < |\text{sop}(\hat{g}) - E| + |E| = |\text{sop}(\hat{g})| = 1 \text{ Contradicción!!}$$

Así, $|\hat{g}(\xi)| = 1$ en el soporte de g , y por tanto $|\hat{g}| = \chi_{\text{sop}(\hat{g})}$.

- Finalmente si $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal y $|\hat{g}| = \chi_K$, entonces,

$$|K| = |\text{sop}(\hat{g})| = \|\hat{g}\|_2^2 = 1.$$

□

Definición 4.2.2 A las wavelets que cumplen que el módulo de su transformada de Fourier es la función característica de un conjunto medible de \mathbb{R} las llamamos **wavelets MSF (Minimally Supported Frequency)**.

Veamos una propiedad interesante de estas wavelets. Puede verse una demostración de este resultado en [HW].

Corolario 4.2.3 Sea K un conjunto medible en \mathbb{R} y sea ψ una función tal que $|\hat{\psi}| = \chi_K$. Entonces, ψ es una wavelet ortonormal si y sólo si

1. $\{K + k : k \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de \mathbb{R} casi para todo punto, y
2. $\{2^j K : j \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de \mathbb{R} casi para todo punto.

Proposición 4.2.4 Sea m_0 el filtro de paso bajo asociado a la función de escala φ , entonces,

$$|m_0(\xi)|^2 + \left| m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1.$$

Esta condición se conoce como condición de **Smith-Barnwell**.

Demostración:

Usando la Proposición 4.1.9, reemplazando g por φ , obtenemos

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\xi + k)|^2 = 1, \text{ a.e. } \xi \in \mathbb{R}.$$

Si tenemos en cuenta que $\hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi)m_0(\xi)$, es equivalente a escribir

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\xi + \frac{k}{2}\right) \right|^2 \left| m_0\left(\xi + \frac{k}{2}\right) \right|^2 = 1, \text{ a.e. } \xi \in \mathbb{R}.$$

Separamos la suma en dos, según la paridad de k , usamos que m_0 es 1-periódica y usamos de nuevo la Proposición 4.1.9. Así,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\xi + \frac{2k+1}{2}\right) \right|^2 \left| m_0\left(\xi + \frac{2k+1}{2}\right) \right|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\xi + \frac{2k}{2}\right) \right|^2 \left| m_0\left(\xi + \frac{2k}{2}\right) \right|^2 \\ &= \left| m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right) \right|^2 + |m_0(\xi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 \\ &= \left| m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 + |m_0(\xi)|^2. \end{aligned}$$

□

Lema 4.2.5 Si φ es la función de escala de un AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, y m_0 es el filtro de paso bajo asociado, entonces,

$$\begin{aligned} V_{-1} &= \{f : \hat{f}(\xi) = m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \text{ para alguna función 1-periódica } m \in L^2([0, 1])\}, \\ V_0 &= \{f : \hat{f}(\xi) = \ell(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \text{ para alguna función 1-periódica } \ell \in L^2([0, 1])\}. \end{aligned}$$

Demostración:

- Veamos primero que

$$V_{-1} \subseteq \{f : \hat{f}(\xi) = m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \text{ para alguna función 1-periódica } m \in L^2([0, 1])\}.$$

Si $f \in V_{-1}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi\left(\frac{1}{2}x - k\right),$$

con $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$. Así, usando (4.7),

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \sqrt{2} \sum_k c_k \hat{\varphi}(2\xi) e^{-4\pi i \xi k} = \sqrt{2} \hat{\varphi}(2\xi) \sum_k c_k e^{-4\pi i \xi k} \\ &= \sqrt{2} \hat{\varphi}(\xi) m_0(\xi) \sum_k c_k e^{-4\pi i \xi k} = \hat{\varphi}(\xi) m(2\xi) m_0(\xi), \end{aligned}$$

con $m(\xi) = \sqrt{2} \sum_k c_k e^{-2\pi i \xi k}$, que es una función 1-periódica de $L^2([0, 1])$.

- Veamos ahora la inclusión contraria.

Sea $m \in L^2([0, 1])$ una función 1-periódica. Queremos ver que f es de V_{-1} , donde f está definida por

$$\hat{f}(\xi) = m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi).$$

Calculando como en el punto anterior obtenemos que f es de la forma deseada, pero nos hace falta que $m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ sea de $L^2(\mathbb{R})$. Veámoslo.

Definimos $h(\xi) = m(2\xi)m_0(\xi)$. Por la Proposición 4.2.4 tenemos que m_0 es acotado. Así, como m es de $L^2([0, 1])$, tenemos que $h(\xi) \in L^2([0, 1])$. Además, por la periodicidad de m_0 y de m , tenemos que h también es 1-periódica.

Usando que h es de $L^2([0, 1])$ y 1-periódica, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |h(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \sum_k \int_0^1 |h(\mu)|^2 |\hat{\varphi}(\mu + k)|^2 d\mu = \|h\|_{L^2([0,1])}^2.$$

Así, $\hat{f}(\xi) = m(2\xi)m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi) = h(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ está en $L^2(\mathbb{R})$.

- Veamos ahora que

$$V_0 = \{f : \hat{f}(\xi) \in \ell(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \text{ para alguna función 1-periódica } \ell \in L^2([0, 1])\}.$$

Si $f \in V_0$, $f(x) = \sum_k c_k \varphi(x - k)$, con $\sum_k |c_k|^2 < \infty$. Así,

$$\hat{f}(x) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_k c_k e^{-2\pi i \xi k} = \ell(\xi)\hat{\varphi}(\xi),$$

con ℓ función 1-periódica en $L^2([0, 1])$.

- Para ver la inclusión contraria procedemos de la misma manera que para V_{-1} .

Sea ℓ una función 1-periódica de $L^2([0, 1])$. Así,

$$\int_{\mathbb{R}} |\ell(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \sum_k \int_0^1 |\ell(\mu)|^2 |\hat{\varphi}(\mu + k)|^2 d\mu = \|\ell\|_{L^2([0,1])}^2.$$

Por lo tanto, $\hat{f}(\xi)$ es de $L^2(\mathbb{R})$ y queda demostrado el lema.

□

Recordemos que $V_{-1} \subset V_0$.

W_{-1} es el complementario ortogonal de V_{-1} en V_0 . Ahora, para continuar con la construcción de la wavelet ψ , intentaremos caracterizar los elementos de W_{-1} y de W_0 . Los elementos de W_{-1} son aquellas funciones f de $L^2([0, 1])$ que son ortogonales a V_{-1} . Sea

$$\begin{aligned} U : V_0 &\longrightarrow L^2([0, 1]) \\ f &\longmapsto U(f) = \ell, \end{aligned}$$

donde ℓ es la función que caracteriza a los elementos de V_0 vista en el lema anterior. Obviamente U es lineal. Además se cumple que,

$$\|Uf\|_{L^2([0,1])}^2 = \|\ell\|_{L^2([0,1])}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Por la Proposición 4.1.9 y por Plancherel obtenemos que

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle Uf, Ug \rangle_{L^2([0,1])}, \quad \forall f, g \in V_0.$$

Si f es ortogonal a V_{-1} , esta última igualdad y el lema anterior nos dice que ℓ tiene que ser ortogonal a $m(2\xi)m_0(\xi)$, para toda función m 1-periódica de $L^2([0, 1])$. Así, se debe cumplir,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \ell(\xi) \overline{m(2\xi)m_0(\xi)} d\xi \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{m(2\xi)} \left\{ \ell(\xi) \overline{m_0(\xi)} + \ell\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} \right\} d\xi, \end{aligned}$$

para toda función m 1-periódica de $L^2([0, 1])$. Así, como la función $m(2(\cdot))$ es periódica de periodo $\frac{1}{2}$, la última igualdad quiere decir que la función $\frac{1}{2}$ -periódica que está entre llaves es ortogonal a toda función $\frac{1}{2}$ -periódica de cuadrado integrable. Es decir,

$$\ell(\xi) \overline{m_0(\xi)} + \ell\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} = 0,$$

para casi todo $\xi \in [0, 1]$.

Así, si escribimos esta relación en forma vectorial, tenemos que,

$$\left(\ell(\xi), \ell\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right) = -\lambda\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \left(\overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)}, -\overline{m_0(\xi)} \right), \quad (4.8)$$

casi para todo ξ y para un $\lambda(\xi)$ apropiado.

Haciendo el cambio $\xi = \mu + \frac{1}{2}$ y utilizando que m_0 y ℓ son 1-periódicas obtenemos

$$\left(\ell\left(\mu + \frac{1}{2}\right), \ell(\mu) \right) = -\lambda(\mu + 1) \left(\overline{m_0(\mu)}, -\overline{m_0\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \right).$$

Cambiando el orden de las componentes y poniendo el signo dentro en el segundo término obtenemos

$$\left(\ell(\xi), \ell\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right) = \lambda(\xi + 1) \left(\overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)}, -\overline{m_0(\xi)} \right), \quad \text{a.e. } \xi. \quad (4.9)$$

Sabemos por la Proposición 4.2.4, que el vector $\left(\overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)}, -\overline{m_0(\xi)} \right)$ tiene norma 1, a.e. ξ . Si tenemos en cuenta además de este hecho, (4.8) y (4.9), obtenemos que $\lambda(\xi + 1/2) = -\lambda(\xi + 1)$, o equivalentemente que $\lambda(\xi) = -\lambda(\xi + 1/2)$, a.e. $\xi \in [0, 1]$. Así, λ es una función 1-periódica y además $\lambda(\xi) = -\lambda(\xi + 1/2)$, a.e. $\xi \in [0, 1]$.

Definiendo $s(\xi) = e^{-i\pi\xi} \lambda(1/2\xi)$, tenemos $\lambda(\xi) = e^{2\pi i\xi} s(2\xi)$, y así, obtenemos que

$$\ell(\xi) = e^{2\pi i\xi} s(2\xi) \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)}, \quad (4.10)$$

donde $s \in L^2([0, 1])$ es una función 1-periódica.

Es fácil comprobar que el subespacio de $L^2(\mathbb{R})$ que contiene a todas las funciones f tales que $\hat{f}(\xi) = \ell(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ con ℓ cumpliendo (4.10) está en el complementario ortogonal de V_{-1} en V_0 . Así, tenemos la siguiente caracterización de W_{-1} ,

$$W_{-1} = \left\{ f : \hat{f}(\xi) = e^{2\pi i\xi} s(\xi) \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} \hat{\varphi}(\xi), \text{ para } s \in L^2([0, 1]) \text{ función 1-periódica} \right\}.$$

Así, multiplicando por 2 la variable, obtenemos el siguiente lema.

Lema 4.2.6 *Si φ es una función de escala de un AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ y m_0 es el filtro de paso bajo asociado, entonces,*

$$W_0 = \left\{ f : \hat{f}(2\xi) = e^{2i\pi\xi} s(2\xi) \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} \hat{\varphi}(\xi), \text{ para } s \in L^2([0, 1]) \text{ función 1-periódica} \right\}.$$

De este lema deducimos que W_0 es invariante por traslaciones integrales. De manera similar obtenemos que

$$W_j = \left\{ f : \hat{f}(2^{j+1}\xi) = e^{2\pi i\xi} s(2\xi) \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} \hat{\varphi}(\xi), \text{ para } s \in L^2([0, 1]) \text{ función 1-periódica} \right\}.$$

Finalmente, ya podemos definir nuestra wavelet ortonormal, como la función ψ que cumple

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{2\pi i\xi} \overline{m_0(\xi + 1/2)} \hat{\varphi}(\xi), \quad (4.11)$$

tomando $s \equiv 1$ en (4.10). De hecho, toda wavelet ortonormal en W_0 puede ser caracterizada como indicamos en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.7 *Supongamos que φ es una función de escala de un AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, y sea m_0 el filtro de paso bajo asociado. Una función $\psi \in W_0 = V_1 \cap V_0^\perp$ es una wavelet ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ si y sólo si,*

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{2\pi i\xi} \nu(2\xi) \overline{m_0(\xi + \frac{1}{2})} \hat{\varphi}(\xi)$$

casi para todo ξ de \mathbb{R} , y para alguna función ν 1-periódica medible tal que

$$|\nu(\xi)| = 1, \quad a.e. \xi \in L^2([0, 1])$$

.

Demostración:

Como $|\nu(\xi)| = 1$, y por la caracterización de W_0 , ψ es de W_0 .

Sea $g \in W_0$ cualquiera. Esto implica que existe una función $s \in L^2([0, 1])$ 1-periódica tal que

$$\hat{g}(2\xi) = e^{2\pi i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + \frac{1}{2})} \hat{\varphi}(\xi).$$

Así, tenemos,

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= e^{\pi i\xi} s(\xi) \overline{m_0(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2})} \hat{\varphi}(\frac{1}{2}\xi) \\ &= \frac{s(\xi)}{\nu(\xi)} e^{\pi i\xi} \nu(\xi) s(\xi) \overline{m_0(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2})} \hat{\varphi}(\frac{1}{2}\xi) \\ &= \frac{s(\xi)}{\nu(\xi)} \hat{\psi}(\xi) = s(\xi) \overline{\nu(\xi)} \hat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

Dado que $s\bar{\nu} \in L^2([0, 1])$, podemos expresar $s(\xi)\bar{\nu}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k \xi}$, para una cierta sucesión $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, y obtenemos que

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi(x - k).$$

Así, obtenemos que $\{\psi(\cdot - k)_k \in \mathbb{Z}\}$ genera W_0 . Para probar la ortonormalidad del sistema, utilizaremos la caracterización de sistemas ortonormales dada en la Proposición 4.1.9, y la .

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}\xi + \frac{k}{2})|^2 |m_0(\frac{1}{2}\xi + \frac{k+1}{2})|^2 \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}\xi + \ell)|^2 |m_0(\frac{1}{2}\xi + \frac{2\ell+1}{2})|^2 + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\frac{1}{2}\xi + \frac{2\ell+1}{2})|^2 |m_0(\frac{1}{2}\xi + \ell + 1)|^2 \\ &= |m_0(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2})|^2 + |m_0(\frac{1}{2}\xi)|^2 = 1, \end{aligned}$$

donde hemos separado la suma en pares e impares, y hemos utilizado la 1-periodicidad de m_0 .

Hemos observado ya que si $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de W_0 , entonces $\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de W_j . Así, como tenemos que $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$, ψ es de hecho una wavelet ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Veamos ahora el recíproco. Queremos ver que toda wavelet ortonormal de W_0 es de la forma del enunciado. Por el lema anterior, tenemos que existe una función $\nu \in L^2([0, 1])$ 1-periódica tal que

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i \xi} \overline{m_0\left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{1}{2}\xi\right).$$

Si ψ es una wavelet ortonormal, entonces por la ortonormalidad del sistema que genera, obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\nu(\xi)|^2 |m_0\left(\frac{\xi}{2} + \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right)|^2 |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{k}{2}\right)|^2 \\ &= |\nu(\xi)|^2 \left(\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |m_0\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right)|^2 |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + \ell\right)|^2 + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2 |\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + \ell + \frac{1}{2}\right)|^2 \right) \\ &= |\nu(\xi)|^2 \left(|m_0\left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{2}\right)|^2 + |m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)|^2 \right) = |\nu(\xi)|^2, \end{aligned}$$

para casi todo ξ de $[0, 1]$. □

Esta proposición completa la construcción de una wavelet ψ desde un AMR. Veamos ahora una manera de expresar ψ como combinación lineal de traslaciones de la función de escala y con coeficientes relacionados con los coeficientes que determinan el filtro de paso bajo.

Proposición 4.2.8 *Suponemos que φ es la función de escala de un AMR, y que m_0 es el filtro de paso bajo asociado. Entonces,*

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \varphi(2x - (k - 1)),$$

donde $m_0(\xi) = \sum_k \alpha_k e^{2\pi i k \xi}$.

Demostración:

Como $(-1)^k = e^{\pi i k}$, tenemos que $\overline{m_0(\xi + 1/2)} = \sum_k \overline{\alpha_k} e^{-2\pi i k \xi} (-1)^k$. Sustituyendo en (4.11) obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(2\xi) &= e^{2\pi i \xi} \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} \hat{\varphi}(\xi) = e^{2\pi i \xi} \sum_k \overline{\alpha_k} e^{-2\pi i k \xi} (-1)^k \hat{\varphi}(\xi) \\ &= \sum_k (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-2\pi i \xi(k-1)} \hat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

Así,

$$\hat{\psi}(\xi) = \sum_k (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-\pi i \xi (k-1)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Finalmente, tomando transformada de Fourier inversa,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \sum_k (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-\pi i \xi (k-1)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) e^{2\pi i \xi x} d\xi \\ &= \sum_k (-1)^k \overline{\alpha_k} \int_{\mathbb{R}} e^{\pi i \xi (2x - (k-1))} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi \\ &= \sum_k (-1)^k \overline{\alpha_k} 2 \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \mu (2x - (k-1))} \hat{\varphi}(\mu) d\mu \\ &= 2 \sum_k (-1)^k \overline{\alpha_k} \varphi(2x - (k-1)). \end{aligned}$$

□

Veamos ahora una manera de obtener $|\hat{\varphi}|$ a partir de $|\hat{\psi}|$.

Proposición 4.2.9 *Sea φ la función de escala de un AMR y ψ una wavelet ortonormal. Entonces,*

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \hat{\psi}(2^j \xi) \right|^2, \quad a.e. \xi \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

De la Proposición 4.2.4, de (4.7) y de (4.11) obtenemos

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}(2\xi)|^2 + \left| \hat{\psi}(2\xi) \right|^2 &= |\hat{\varphi}(\xi) m_0(\xi)|^2 + \left| e^{2\pi i \xi} \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} \hat{\varphi}(\xi) \right|^2 \\ &= |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \left(|m_0(\xi)|^2 + \left| m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 \right) = |\hat{\varphi}(\xi)|^2. \end{aligned}$$

Iteramos este proceso y obtenemos que

$$|\hat{\varphi}(\xi)|^2 = |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 + \sum_{j=1}^N \left| \hat{\psi}(2^j \xi) \right|^2, \quad \forall N \geq 1.$$

Como $|\hat{\varphi}(\xi)|^2 \leq 1$, la sucesión $\left\{ \sum_{j=1}^N |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 : N = 2, 3, \dots \right\}$ es una sucesión creciente de números reales acotada por 1, y su límite existe. Así, $\lim_{N \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2$ también existe. Además,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2^N} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

y por el lema de Fatou

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{N \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 d\xi \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 d\xi = 0.$$

Así, $\lim_{N \rightarrow \infty} |\hat{\varphi}(2^N \xi)|^2 = 0$ y queda probado el enunciado.

□

4.3. Ejemplos

4.3.1. La Wavelet de Haar

La wavelet de Haar está construida a partir del AMR generado por la función de escala $\varphi(x) = \chi_{[-1,0)}(x)$. Como

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\chi_{[-2,0)}(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(x+1),$$

se deduce que los coeficientes del m_0 son $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, y $\alpha_k = 0$, $\forall k \neq 0, 1$. Así el filtro de paso bajo para la wavelet de Haar es

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2}(1 + e^{2\pi i\xi}).$$

Usando la Proposición 4.2.8 obtenemos que

$$\psi(x) = \varphi(2x+1) - \varphi(2x) = \chi_{[-1, -\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[-\frac{1}{2}, 0)}(x).$$

Calculamos la transformada de Fourier de la función de escala:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi x} \chi_{[-1,0)}(x) dx = \int_{-1}^0 e^{-2\pi i\xi x} dx \\ &= \frac{1 - e^{-2\pi i\xi}}{-2\pi i\xi} = e^{\pi i\xi} \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}.\end{aligned}$$

Así, por (4.11), tenemos,

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{2\pi i\xi} \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} \hat{\varphi}(\xi) = e^{2\pi i\xi} \frac{(1 - e^{-2\pi i\xi})(e^{2\pi i\xi} - 1)}{4\pi i\xi}.$$

Es decir,

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i\xi} \frac{e^{\pi i\xi} - 2 + e^{-\pi i\xi}}{2\pi i\xi}.$$

Se puede comprobar que la transformada de Fourier de $\chi_{[-1, -\frac{1}{2})} - \chi_{[-\frac{1}{2}, 0)}$ coincide con la última expresión.

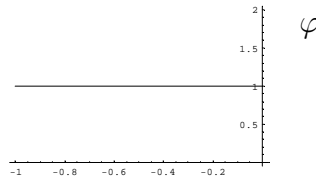


Figura 4.1: Función de escala

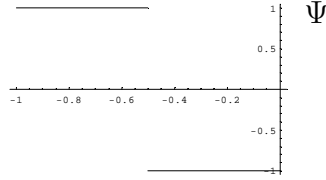


Figura 4.2: Wavelet de Haar

4.3.2. La Wavelet de Shannon

Llamamos wavelet de Shannon a la función ψ cuya transformada de Fourier satisfice

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i \xi} \chi_I(\xi),$$

donde $I = [-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. Para ver que es una wavelet usamos la Proposición 4.2.7, para obtener una función de escala de un AMR que genere esta wavelet. Tenemos

$$\hat{\psi}(2^j \xi) = e^{\pi i 2^j \xi} \chi_I(2^j \xi) = e^{\pi i 2^j \xi} \chi_{I_j}(2^j \xi),$$

donde $I_j = [-2^{-j}, -2^{-j-1}) \cup (2^{-j-1}, 2^{-j}]$.

Los intervalos I_j son disjuntos y su unión para $j \geq 1$ es $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$, así podemos tomar

$$\hat{\varphi}(\xi) = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi).$$

Como

$$\sum_k \left| \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi + k) \right|^2 = 1,$$

por la Proposición 4.1.9, tenemos que $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal. Elegimos V_j como el subespacio cerrado generado por $\{\varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$, $\forall j \in \mathbb{Z}$. Entonces, si vemos que $\frac{1}{2} \varphi(\frac{1}{2}x)$ es un elemento de V_0 tendremos que $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ es un AMR. Esto es equivalente a encontrar el filtro de paso bajo m_0 satisfaciendo (4.7). Como m_0 es una función 1-periódica en $L^2([0, 1])$ la ecuación (4.7) nos da que

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\xi) &= \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi) \\ \hat{\varphi}(2\xi) &= \chi_{[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]}(\xi) \\ \hat{\varphi}(2\xi) &= \hat{\varphi}(\xi) m_0(\xi). \end{aligned}$$

Así

$$m_0(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y la extendemos periódicamente a desde $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ a todo \mathbb{R} .

Podemos deducir por (4.11) que

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(2\xi) &= \overline{e^{2\pi i\xi} m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} \hat{\varphi}(\xi) \\ &= e^{2\pi i\xi} m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi) \\ &= e^{2\pi i\xi} \chi_{([-1/2, -1/4] \cup [1/4, 1/2])}(\xi).\end{aligned}$$

Así

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i\xi} \chi_I(\xi).$$

Se puede comprobar que la función de escala es

$$\varphi(\xi) := \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi},$$

y la wavelet

$$\Psi(\xi) := -2 \frac{\sin 2\pi\xi + \cos \pi\xi}{\pi(2\xi + 1)}.$$

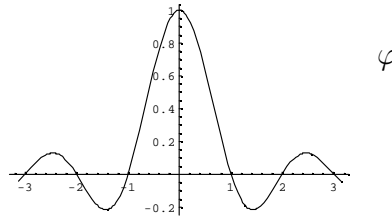


Figura 4.3: Función de escala

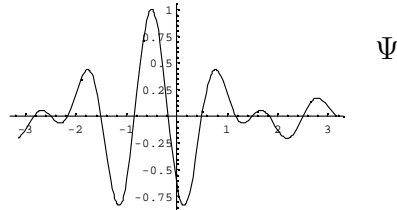


Figura 4.4: Wavelet de Shannon

Capítulo 5

Construcción de wavelets de soporte compacto

5.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos las wavelets de soporte compacto. Veremos que si una wavelet tiene soporte compacto entonces el filtro de paso bajo tiene que ser un polinomio trigonométrico, y también que la wavelet no puede ser \mathcal{C}^∞ . Veremos que para todo n natural existe una wavelet ortonormal ψ con soporte compacto y tal que existen todas sus derivadas hasta orden n . La existencia de esta wavelet la veremos usando las técnicas del Análisis de Multiresolución vistas en el capítulo anterior. Hasta ahora habíamos partido siempre de la función de escala. En este capítulo veremos cómo hacer la construcción a partir del filtro m_0 .

En el capítulo anterior hemos visto un ejemplo de wavelet ortonormal con soporte compacto. Es el caso de la wavelet de Haar, donde $\psi(x) = \chi_{[-1, -\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[-\frac{1}{2}, 0)}$. La wavelet de Shannon, sin embargo, tiene como soporte toda la recta real. Observamos que la de Haar es discontinua y la de Shannon es \mathcal{C}^∞ . Veremos que es posible obtener wavelets con soporte compacto, como la de Haar, pero con más regularidad que ésta.

Queremos construir una función de escala φ a partir de un filtro m_0 . Supongamos que m_0 cumple las propiedades vistas en el capítulo anterior

$$\begin{cases} m_0 \in \mathcal{C}^1 \text{ y es 1-periódica,} \\ |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 = 1, \\ |m_0(0)| = 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

Si existiera la función φ , aplicando (4.7) reiteradamente, se debería cumplir que

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-N}\xi) \prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi), \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Denotamos por $\Pi_N(\xi)$ al producto $\prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi)$. Por el Teorema 4.1.6 tenemos que φ debe ser continua en el cero y que $\hat{\varphi}(0) = 1$. El producto $\prod_j = 1^\infty m_0(2^{-j}\xi)$ es convergente para todo $\xi \in \mathbb{R}$. También tenemos, por la segunda condición en (5.1), que $|m_0(\xi)| \leq 1$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$, y por tanto, $|\Pi_N(\xi)| \leq 1$. Así

$$\Pi_{N+1}(\xi) - \Pi_N(\xi) = \prod_{j=1}^{N+1} m_0(2^{-j}\xi) - \prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi) = \Pi_N(\xi) (m_0(2^{-N-1}\xi) - 1),$$

y por tanto, usando que $|\Pi_N(\xi)| \leq 1$, que $m_0(0) = 1$ y el Teorema del Valor Medio, tenemos

$$|\Pi_{N+1}(\xi) - \Pi_N(\xi)| = |\Pi_N(\xi)(m_0(2^{-N-1}\xi) - 1)| \leq |m_0(2^{-N-1}\xi) - m_0(0)| \leq \|m_0'\|_\infty 2^{-(N+1)}|\xi|.$$

Así,

$$|\Pi_{N+M}(\xi) - \Pi_N(\xi)| \leq \|m_0'\|_\infty |\xi| 2^{-N}, \quad \forall N, M \in \mathbb{N},$$

es decir, la sucesión $\{\Pi_N(\xi)\}_{N \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, y por tanto convergente. Así, podemos definir

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Proposición 5.1.1 *Sea m_0 una función definida en \mathbb{R} satisfaciendo (5.1). Entonces la función φ definida por*

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

está en $L^2(\mathbb{R})$ y además $\|\varphi\|_2 \leq 1$.

Demostración:

Sea $\Pi_N(\xi) = \prod_{j=1}^N m_0(2^{-j}\xi)$. m_0 es una función 1-periódica y por tanto Π_N es una función 2^N -periódica. Así, por las propiedades del filtro

$$\begin{aligned} I_N &:= \int_{-2^{N-1}}^{2^{N-1}} |\Pi_N(\xi)|^2 d\xi = \int_0^{2^N} |\Pi_N(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_0^{2^{N-1}} |\Pi_N(\xi)|^2 d\xi + \int_{2^{N-1}}^{2^N} |\Pi_N(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_0^{2^{N-1}} (|\Pi_N(\xi)|^2 + |\Pi_N(\xi + 2^{N-1})|^2) d\xi \\ &= \int_0^{2^{N-1}} |\Pi_{N-1}(\xi)|^2 \left(|m_0(2^{-N}\xi)|^2 + |m_0(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2})|^2 \right) d\xi \\ &= \int_0^{2^{N-1}} |\Pi_{N-1}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Repitiendo el argumento obtenemos que

$$\begin{aligned}
I_N = I_1 &= \int_0^2 |m_0(\frac{1}{2}\xi)|^2 d\xi = 2 \int_0^1 |m_0(\xi)|^2 d\xi \\
&= 2 \left[\int_0^{1/2} |m_0(\xi)|^2 d\xi + \int_{1/2}^1 |m_0(\xi)|^2 d\xi \right] \\
&= 2 \int_0^{1/2} \left[|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 \right] d\xi = 2 \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Como $|\Pi_N(\xi)|^2 \rightarrow |\hat{\varphi}(\xi)|^2$, aplicando el lema de Fatou obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_{-2^{N-1}}^{2^{N-1}} |\Pi_N(\xi)|^2 d\xi = \lim_{N \rightarrow \infty} I_N = 1.$$

Así $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$, φ está bien definida y $\|\varphi\|_2^2 = \|\hat{\varphi}\|_2^2 \leq 1$. □

Veamos ahora otras propiedades de m_0 que nos aseguren que φ es una función de escala. De (4.7) tenemos que si φ fuese la función de escala, entonces se debe cumplir $m_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{2\pi i k \xi}$, con $\alpha_k = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\frac{1}{2}x) \overline{\varphi(x+k)} dx$. Es decir, los α_k tienen que ser los coeficientes de $\frac{1}{2}\varphi(\frac{1}{2}\cdot) \in V_{-1}$ en la base ortonormal $\{\varphi(\cdot + k) : k \in \mathbb{Z}\}$ de V_0 . Para que la función φ sea de soporte compacto, sólo un número finito de los α_k pueden ser distintos de cero. Así tenemos que $m_0(\xi)$ debe ser un polinomio trigonométrico.

Veamos ahora que no podemos esperar que una wavelet de soporte compacto sea de $C^\infty(\mathbb{R})$. Este hecho será consecuencia del siguiente resultado.

Teorema 5.1.2 *Sea r un entero no negativo. Sea ψ una función de $C^r(\mathbb{R})$ tal que*

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{r+1+\varepsilon}}, \text{ para algún } \varepsilon > 0,$$

y tal que $\psi^{(m)} \in L^\infty(\mathbb{R})$, para $m = 1, 2, \dots, r$. Si $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, entonces todos los momentos de ψ hasta orden r son cero, es decir

$$\int_{\mathbb{R}} x^m \psi(x) dx = 0, \quad \forall m = 0, 1, \dots, r.$$

Demostración:

Lo demostraremos por inducción sobre r .

■ Si $r = 0$:

Sea $a = 2^{-j_0} k_0$ para algún $j_0, k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\psi(a) \neq 0$. Como $\|\psi\|_2 = 1$ y ψ es continua existe un a como el descrito. Como ψ es wavelet ortonormal,

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \psi(2^j x - k) dx = 0, \quad \text{si } (j, k) \neq (0, 0).$$

Tomando $k = 2^{j-j_0}k_0$ con $j > \max\{j_0, 0\}$, esta igualdad queda

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \psi(2^j(x-a)) dx = 0.$$

Haciendo el cambio de variable $y = 2^j(x-a)$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(a + 2^{-j}y)} \psi(y) dy = 0.$$

Pasando al límite cuando j tiende a ∞ , y aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada, tenemos que

$$\overline{\psi(a)} \int_{\mathbb{R}} \psi(y) dy = 0,$$

y como $\psi(a) \neq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(y) dy = 0.$$

■ Si $r = 1$:

Hacemos este caso aparte antes del caso general para ver mejor como funciona. Ya sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(y) dy = 0,$$

por el caso anterior. Definimos

$$\vartheta(x) := \int_{-\infty}^x \psi(y) dy.$$

Observamos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \vartheta(x) = 0$. Además, $\vartheta(x) = \int_{-\infty}^x \psi(y) dy = -\int_x^{\infty} \psi(y) dy$. Como estamos suponiendo que

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}}, \text{ para algún } \varepsilon > 0,$$

entonces veremos que

$$|\vartheta(x)| \leq \frac{C_1}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}.$$

En efecto, si $|x| > 1$,

$$|\vartheta(x)| \leq \int_x^{\infty} |\psi(y)| dy \leq C \int_x^{\infty} \frac{dy}{(1+|y|)^{2+\varepsilon}} \leq C \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} \approx C \frac{1}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}$$

Integrando por partes obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} x \psi(x) dx,$$

ya que, si A es un número real positivo,

$$\begin{aligned}
\int_{-A}^A \vartheta(x) dx &= \int_{-A}^A \int_{-\infty}^x \psi(y) dy dx \\
&= \int_{-A}^{\infty} \psi(y) \int_y^A dx dy + \int_{-\infty}^{-A} \psi(y) \int_{-A}^A dx dy \\
&= \int_{-A}^{\infty} \psi(y)(A - y) dy + \int_{-\infty}^{-A} \psi(y) 2A dy \\
&= -A \int_{-A}^{\infty} \psi(y) dy - \int_{-A}^{\infty} y \psi(y) dy \xrightarrow{A \rightarrow \infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x \psi(x) dx,
\end{aligned}$$

ya que el primer sumando lo podemos acotar por $\frac{A}{(1+A)^{1+\varepsilon}}$, que tiende a cero cuando A tiende a infinito. Así, lo que queremos ver es $\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(x) dx = 0$. Procedemos como en el caso $r = 0$. Como ψ es no constante y ψ' es continua, existe $a = 2^{-j_0} k_0$ tal que $\psi'(a) \neq 0$. Escribimos

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \psi(2^j(x - a)) dx = 0.$$

Integramos por partes,

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi'(x)} \vartheta(2^j(x - a)) dx = 0.$$

Hacemos el cambio de variable $y = 2^j(x - a)$ y obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi'(2^{-j}y + a)} \vartheta(y) dy = 0.$$

Como antes, hacemos límite cuando j tiende a ∞ ,

$$\overline{\psi'(a)} \int_{\mathbb{R}} \vartheta(y) dy = 0,$$

y como $\overline{\psi'(a)} \neq 0$ tenemos que $\int_{\mathbb{R}} \vartheta(y) dy = 0$.

- Suponemos cierto hasta $r - 1$:

Como suponemos que todos los momentos hasta orden $r - 1$ son cero, podemos integrar ψ r veces y obtenemos funciones $\vartheta_1 = \vartheta, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r$ tales que $\vartheta'_k = \vartheta_{k-1}$, y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \vartheta_k = 0$. Además podemos ver como antes que existen constantes C_1, \dots, C_r tales que

$$|\vartheta_k(x)| \leq \frac{C_k}{(1 + |x|)^{r-k+1+\varepsilon}}, \quad k = 1, \dots, r.$$

Integrando por partes r veces, como en el caso $r = 1$, vemos que $\int_{\mathbb{R}} x^r \psi(x) dx = 0$ si y sólo si $\int_{\mathbb{R}} \vartheta_r(x) dx = 0$. Así, dado que $\psi^{(r)}$ no es constante y es continua, entonces existe $a = 2^{-j_0} k_0$ con $\vartheta^{(r)}(a) \neq 0$. Tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \psi(2^j(x - a)) dx = 0.$$

Integrando por partes r veces obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi^{(r)}(x)} \vartheta_r(2^j(x-a)) dx = 0.$$

Haciendo el mismo cambio de variable que en los casos anteriores y haciendo tender j a ∞ tenemos que

$$\overline{\psi^{(r)}(a)} \int_{\mathbb{R}} \vartheta_r(y) dy = 0,$$

y como $\psi^{(r)}(a) \neq 0$ obtenemos que el resultado es cierto hasta orden r .

□

Teorema 5.1.3 *Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una función con soporte compacto tal que $\psi \in \mathcal{C}^\infty$. Entonces $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ no puede ser un sistema ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, donde $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$.*

Demostración:

Lo demostraremos por reducción al absurdo.

Si $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$, entonces como ψ es una función de soporte compacto, se cumplen las hipótesis del teorema anterior para todo r natural, y tenemos que todos los momentos de ψ son cero. Así, para cualquier polinomio $p(x)$, se cumple $\int_{\mathbb{R}} p(x) \overline{\psi(x)} dx = 0$. Como ψ tiene soporte compacto, por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, podemos encontrar un polinomio $q(x)$ que la aproxime. Es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $q(x)$ tal que $\sup_{x \in K} |\psi(x) - q(x)| < \varepsilon$, donde K es el soporte de ψ . Así,

$$\begin{aligned} \|\psi\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{\psi(x)} dx = \int_K \psi(x) \overline{\psi(x)} dx \\ &= \int_K \psi(x) \overline{\psi(x)} dx - \int_K q(x) \overline{\psi(x)} dx \\ &= \int_K [\psi(x) - q(x)] \overline{\psi(x)} dx \leq \varepsilon \int_K |\psi(x)| dx = \varepsilon \|\psi\|_1. \end{aligned}$$

Como $\|\psi\|_1 < \infty$ y ε es arbitrario, tenemos que $\|\psi\|_2^2 = 0$, lo cual contradice la ortonormalidad del sistema. □

Sabemos por la Proposición 4.1.9 que $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal si y sólo si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 = 1, \text{ a.e. } \xi \in \mathbb{R}.$$

Así, si definimos $G(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2$, necesitamos ver que (5.1) y la definición de φ implican que $G(\xi) \equiv 1$ a.e. $\xi \in \mathbb{R}$.

A partir de ahora supondremos que m_0 es un polinomio trigonométrico de la forma $m_0(\xi) = \sum_{k=-M}^M \alpha_k e^{2\pi i k \xi}$. Entonces $\Pi_N(\xi)$ (definido en la demostración de la Proposición 5.1.1) es una

combinación lineal finita de términos de la forma $e^{2\pi i(\sum_{j=1}^N 2^{-j}\ell_j)\xi}$, donde $-M \leq \ell_j \leq M$. Así la transformada de Fourier inversa de Π_N es una combinación lineal finita de funciones δ de Dirac de la forma δ_a , con $a = -\sum_{j=1}^N 2^{-j}\ell_j$, ya que $\hat{\delta}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi a} dx = e^{-2\pi i a \xi}$. Dado que $a \in [-M, M]$ la función φ definida en la Proposición 5.1.1 es una función de $L^2(\mathbb{R})$ con soporte contenido en $[-M, M]$. Como $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$, $G(\xi)$ es una función 1-periódica de $L^1([0, 1])$. Además por el Teorema de Plancherel,

$$\begin{aligned} c_\ell &:= \int_0^1 G(\xi) e^{-2\pi i \ell \xi} d\xi = \sum_k \int_k^{k+1} e^{-2\pi i \ell \xi} \hat{\varphi}(\xi) \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\pi i \ell \xi} \hat{\varphi}(\xi)] \overline{\hat{\varphi}(\xi)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x - \ell) \hat{\varphi}(x) dx. \end{aligned}$$

Pero si φ es de soporte compacto, la última expresión es cero, excepto para un número finito de enteros ℓ . Así, hemos probado el siguiente lema:

Lema 5.1.4 *Si m_0 es un polinomio trigonométrico satisfaciendo (5.1) entonces φ es una función de soporte compacto en $L^2(\mathbb{R})$ y $G(\xi) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + \ell)|^2 = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_\ell e^{2\pi i \ell \xi}$ es un polinomio trigonométrico.*

Teorema 5.1.5 *Sea m_0 un polinomio trigonométrico que satisface (5.1) y tal que $m_0(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in [-1/4, 1/4]$. Si φ está definida por*

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

entonces $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal.

Demostración:

Necesitamos ver que $G(\xi) \equiv 1$ en $[-1/2, 1/2]$, donde $G(\xi)$ está definida en el lema anterior.

Veamos primero que si $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \neq 0$, entonces $\hat{\varphi}(\ell) = 0$. En efecto, $\ell = 2^p q$ con q impar, tal que el producto

$$\prod_{j=1}^N m_0(2^{-j} 2^p q)$$

contiene el factor $m_0(\frac{q}{2})$ si $N \geq p + 1$ y por (5.1) $m_0(\frac{q}{2}) = m_0(\frac{1}{2}) = 0$. Así, $G(0) = |\hat{\varphi}(0)|^2 = 1$.

Veamos ahora que

$$G(2\xi) = |m_0(\xi)|^2 G(\xi) + |m_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 G(\xi + \frac{1}{2}). \quad (5.2)$$

Simplemente separamos los términos pares e impares en la suma que define a $G(2\xi)$.

$$\begin{aligned} G(2\xi) &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2(\xi + \frac{\ell}{2}))|^2 = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi + \frac{\ell}{2})|^2 |\hat{\varphi}(\xi + \frac{\ell}{2})|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 |\hat{\varphi}(\xi + k + \frac{1}{2})|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 G(\xi) + |m_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 G(\xi + \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Sea $m = \min_{\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} G(\xi)$ y escogemos $\xi_0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tal que $G(\xi_0) = m$. Veamos ahora por reducción al absurdo que se debe cumplir que $G(\frac{1}{2}\xi_0) = m$. Supongamos lo contrario, que $G(\frac{1}{2}\xi_0) > m$. Entonces usando (5.2) y suponiendo que $m_0(\frac{1}{2}\xi_0) \neq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} m = G(\xi_0) &= |m_0(\frac{1}{2}\xi_0)|^2 G(\frac{1}{2}\xi_0) + |m_0(\frac{1}{2}\xi_0 + \frac{1}{2})|^2 G(\frac{1}{2}\xi_0 + \frac{1}{2}) \\ &> m|m_0(\frac{1}{2}\xi_0)|^2 + m|m_0(\frac{1}{2}\xi_0 + \frac{1}{2})|^2 = m, \end{aligned}$$

que es una contradicción. Así $G(\frac{1}{2}\xi_0) = m$. Iterando el proceso obtenemos que

$$G(2^{-j}\xi_0) = m,$$

y tomando límite que $1 = G(0) = m$.

Sea $M = \sup_{\xi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} G(\xi)$ y escogemos $\xi_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tal que $G(\xi_1) = M$. Veamos ahora como antes que se debe cumplir que $G(\frac{1}{2}\xi_1) = M$. Supongamos lo contrario, que $G(\frac{1}{2}\xi_1) < M$. Entonces usando (5.2) y suponiendo que $m_0(\frac{1}{2}\xi_1) \neq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} M = G(\xi_1) &= |m_0(\frac{1}{2}\xi_1)|^2 G(\frac{1}{2}\xi_1) + |m_0(\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2})|^2 G(\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}) \\ &< M|m_0(\frac{1}{2}\xi_1)|^2 + M|m_0(\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2})|^2 = M, \end{aligned}$$

que es una contradicción. Así $G(\frac{1}{2}\xi_1) = M$. Iterando el proceso y pasando al límite tenemos que $G(0) = M$. En resumen tenemos que $m = M = G(0) = 1$ y queda probado el teorema. \square

Podemos construir fácilmente el AMR asociado al filtro m_0 que satisface (5.1) y tal que $m_0(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Sea

$$V_0 := \overline{\langle \varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z} \rangle}.$$

Si $(\rho f)(x) := f(2x)$ y definimos

$$V_j := \rho^j(V_0),$$

ya estaríamos.

Observamos que φ tiene soporte compacto contenido en $[-M, M]$, donde M es el grado del polinomio trigonométrico m_0 . Podemos ver también que la wavelet ortonormal ψ dada por (4.11) debe tener también soporte compacto; por la Proposición 4.2.8,

$$\psi(x) = 2 \sum_k (-1)^k \bar{\alpha}_k \varphi(2x - (k-1)).$$

Como $-M \leq k \leq M$ y $-M \leq 2x - (k-1) \leq M$, ψ tiene soporte compacto contenido en $[-M - \frac{1}{2}, M + \frac{1}{2}]$.

Teorema 5.1.6 *Para algún natural r existe una wavelet ortonormal ψ con soporte compacto tal que ψ tiene derivadas acotadas hasta orden r . ψ puede obtenerse como un AMR cuya función de escala φ también tiene soporte compacto y la misma regularidad que ψ .*

Se puede ver una demostración de este teorema en [HW]. Se puede ver también que si la wavelet es \mathcal{C}^k entonces el soporte mide $5k$.

5.2. Construcción de Daubechies

Para conservar la notación de Daubechies, en esta sección expresaremos el filtro de paso bajo en términos de coeficientes normalizados, $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2\pi i k \xi}$, es decir, $\alpha_{-k} = \frac{h_k}{\sqrt{2}}$.

Podemos ver en [DAU] que si φ es de soporte compacto y de clase \mathcal{C}^{N-1} , entonces m_0 tiene que ser de la forma

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi), \quad (5.3)$$

donde \mathcal{L} es un polinomio trigonométrico 1-periódico.

A un polinomio trigonométrico m_0 a coeficientes reales cumpliendo (5.1) y tal que $m_0(\xi) \neq 0$ para toda $\xi \in [-1/4, 1/4]$ le llamaremos **filtro de Daubechies**. Ya hemos visto en la sección anterior que si m_0 es de este tipo entonces la función φ tal que $\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi)$ es una función de escala de filtro m_0 .

Para construir m_0 primero determinaremos un polinomio trigonométrico M_0 tal que $M_0(\xi) = |m_0(\xi)|^2$. Como queremos que m_0 sea un filtro de Daubechies cumpliendo (5.3), se tiene que

$$M_0(\xi) = \left| \frac{e^{\pi i \xi} + e^{-\pi i \xi}}{2} \right|^{2N} L(\xi) = \cos^{2N}(\pi \xi) L(\xi)$$

ha de ser un polinomio trigonométrico 1-periódico tal que

$$M_0(\xi) + M_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$M_0(0) = 1,$$

y donde $L(\xi) = \mathcal{L}(\xi)\overline{\mathcal{L}(\xi)}$ tiene que ser un polinomio trigonométrico 1-periódico no negativo par, es decir

$$L(\xi) = Q(\cos(2\pi\xi)) = P(\sin^2(\pi\xi)),$$

con Q y P polinomios.

Proposición 5.2.1 *Una condición suficiente para que un polinomio trigonométrico 1-periódico a coeficientes reales del tipo*

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi)$$

sea filtro de Daubechies es que

$$|\mathcal{L}(\xi)|^2 = P_N(\sin^2(\pi\xi)),$$

donde

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k.$$

Demostración:

Como $M_0(\xi) = |m_0(\xi)|^2$, tenemos que

$$M_0(\xi) = \cos^{2N}(\pi\xi)P(\sin^2(\pi\xi)),$$

y entonces, por (5.1),

$$\cos^{2N}(\pi\xi)P(\sin^2(\pi\xi)) + \cos^{2N}(\pi\xi + \frac{\pi}{2})P(\sin^2(\pi\xi + \frac{\pi}{2})) = 1.$$

Hacemos el cambio de variable $y = \sin^2(\pi\xi) \in [0, 1]$, y nos queda

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1, \quad y \in [0, 1]. \quad (5.4)$$

Los polinomios $(1 - y)^N$ y y^N son primos entre sí, y por el algoritmo de Euclides obtenemos los dos únicos polinomios q_1 y q_2 de grado menor que N tales que $(1 - y)^N q_1(y) + y^N q_2(y) = 1$. Sustituyendo y por $y - 1$ obtenemos la igualdad equivalente $(1 - y)^N q_2(1 - y) + y^N q_1(1 - y) = 1$, y por la unicidad, tenemos que $q_2(y) = q_1(1 - y)$. Así, $(1 - y)^N q_1(y) + y^N q_1(y) = 1$. O sea, $P_N = q_1$ es el único polinomio de grado menor que N satisfaciendo (5.4) y lo podemos escribir como

$$P_N(y) = (1 - y)^{-N} (1 - y^N P_N(1 - y)).$$

El desarrollo de Taylor de grado $N - 1$ del polinomio $(1 - y)^{-N}$ en un entorno del cero es

$$T_{N-1}(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k.$$

Así, tenemos que

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k + \text{términos de grado mayor o igual que } N.$$

Como P_N tiene grado menor que N , resulta que

$$P_N(y) = T_{N-1}(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k,$$

que es no negativo para $y \geq 0$. Como $\cos^{2N}(\xi) > 0$ para $|\xi| \leq \frac{1}{4}$, obtenemos que m_0 es un filtro de Daubechies. \square

Así, ya tenemos un método para encontrar polinomios trigonométricos

$$M_0(\xi) = |m_0(\xi)|^2 = \cos^{2N}(\pi\xi)L(\xi),$$

con $L(\xi) = P_N(\sin^2(\pi\xi))$. Nos interesa ahora encontrar m_0 tal que

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k e^{-2\pi i k \xi} = \left(\frac{1 + e^{-2\pi i k \xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi),$$

con \mathcal{L} cumpliendo $\mathcal{L}(\xi)\overline{\mathcal{L}(\xi)} = L(\xi)$. Existe un método llamado **método de factorización espectral**, que nos proporciona un polinomio de este tipo, $\mathcal{L}(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{-2\pi i k \xi}$, $b_k \in \mathbb{R}$. Se consiguen así las wavelets de Daubechies **D2N** con función de escala ${}_N\varphi$ de soporte $[0, 2N-1]$ y wavelet ${}_N\psi$. En esta sección sólo veremos como obtener los coeficientes en los casos particulares $N = 2$ y $N = 3$.

Ejemplo 5.2.2 La wavelet D4

Estamos ahora en el caso $N = 2$. Tenemos que

$$P_2(y) = \binom{1}{0} + \binom{2}{1}y = 1 + 2y,$$

y que

$$L(\xi) = 1 + 2 \sin^2(\pi\xi) = 2 - \frac{1}{2}e^{2\pi i \xi} - \frac{1}{2}e^{-2\pi i \xi}.$$

Queremos determinar primero los coeficientes reales b_0 y b_1 de \mathcal{L} tales que

$$(b_0 + b_1 e^{-2\pi i \xi})(b_0 + b_1 e^{2\pi i \xi}) = L(\xi) = 2 - \frac{1}{2}e^{2\pi i \xi} - \frac{1}{2}e^{-2\pi i \xi}.$$

Igualando coeficientes y usando que $b_0 + b_1 = \mathcal{L}(0) = m_0(0) = 1$, obtenemos que

$$b_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad b_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

Así, el filtro tiene que ser

$$\begin{aligned} m_0(\xi) &= \left(\frac{1 + e^{-2\pi i \xi}}{2} \right)^2 \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} e^{-2\pi i \xi} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^3 h_k e^{-2\pi i k \xi}. \end{aligned}$$

Igualamos coeficientes y obtenemos que

k	h_k
0	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1+\sqrt{3}}{4} = 0,4829629131445341\dots$
1	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3+\sqrt{3}}{4} = 0,8365163037378079\dots$
2	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{3-\sqrt{3}}{4} = 0,2241438680420134\dots$
3	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1-\sqrt{3}}{4} = -0,1294095225512604\dots$

Cuadro 5.1: Coeficientes de la wavelet de Daubechies D4

Así, utilizando un algoritmo recursivo podemos dibujar una aproximación de la función de escala y de la wavelet. ¹

¹En el Apéndice B podemos consultar el algoritmo y el código fuente utilizado para generar el gráfico.

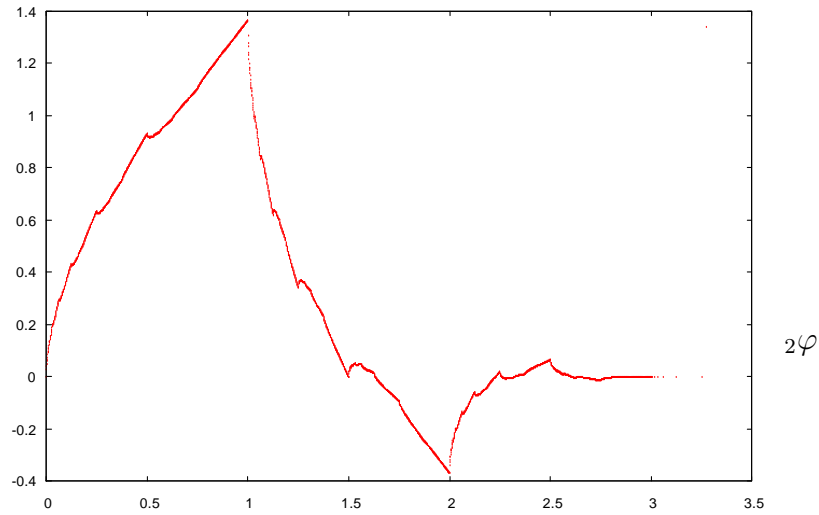


Figura 5.1: Función de escala de la wavelet D4

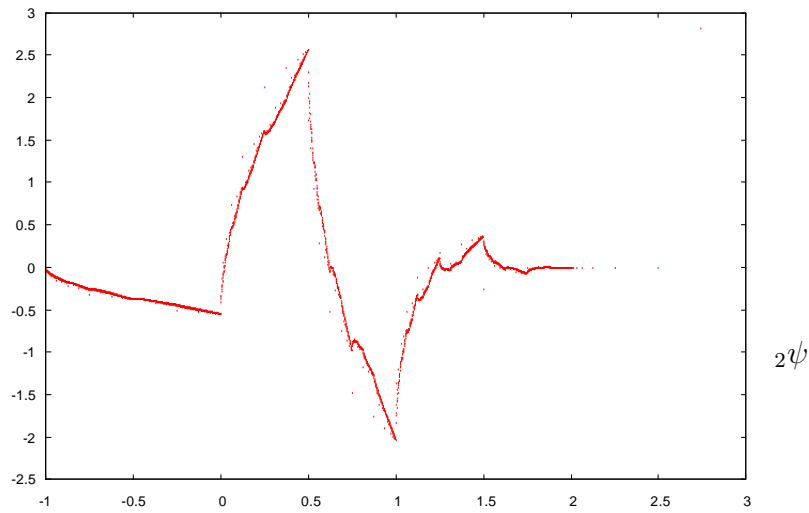


Figura 5.2: Wavelet D4

Ejemplo 5.2.3 La wavelet D6 Estamos ahora en el caso $N = 3$. Tenemos que

$$P_3(y) = \binom{2}{0} + \binom{3}{1}y + \binom{4}{2}y^2 = 6y^2 + 3y + 1.$$

Tomando $y = \sin^2(\pi\xi) = \frac{1}{4}(2 - e^{2\pi i\xi} - e^{-2\pi i\xi})$, tenemos que

$$L(\xi) = P_3(\sin^2(\pi\xi)) = 1 + \frac{3}{4}(2 - e^{2\pi i\xi} - e^{-2\pi i\xi}) + \frac{3}{8}(2 - e^{2\pi i\xi} - e^{-2\pi i\xi})^2.$$

Queremos determinar los coeficientes b_0 , b_1 y b_2 reales tales que el polinomio trigonométrico $\mathcal{L}(\xi) = b_0 + b_1e^{-2\pi i\xi} + b_2e^{-4\pi i\xi}$ cumple que $\mathcal{L}(\xi)\mathcal{L}(-\xi) = L(\xi)$. Haciendo los productos e

igualando coeficientes, obtenemos que

$$\begin{aligned} b_0 b_2 &= \frac{3}{8}, \\ b_1(b_0 + b_2) &= -\frac{9}{4}, \text{ y} \\ b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 &= \frac{19}{4}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $m_0(0) = 1$, tenemos también la relación $b_0 + b_1 + b_2 = 1$. Utilizando estas cuatro relaciones obtenemos que

$$\begin{aligned} b_0 &= \sqrt{2} \frac{1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{32}, \\ b_1 &= \frac{1 - \sqrt{10}}{\sqrt{2}}, \text{ y} \\ b_2 &= \sqrt{2} \frac{1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}}}{32}. \end{aligned}$$

De esta manera, el filtro de paso bajo tiene que ser

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^5 h_k e^{-2\pi i \xi k} = \left(\frac{1 - e^{-2\pi i \xi}}{2} \right)^3 \mathcal{L}(\xi).$$

Como en el caso $N = 2$ finalizamos igualando coeficientes. El resultado es,

k	h_k
0	0,3326705529500825...
1	0,8068915093110924...
2	0,4598775021184914...
3	-0,1350110200102546...
4	-0,0854412738820267...
5	0,352262918857095...

Cuadro 5.2: Coeficientes de la wavelet de Daubechies D6

Capítulo 6

Más ejemplos de wavelets

A lo largo de este trabajo hemos visto diversos ejemplos de wavelets. El primero de todos fué el de la wavelet de Haar, cuya función madre era lo más sencilla posible. Vimos más tarde que procedía de un AMR. Hemos visto más ejemplos de wavelets provenientes de un AMR, la wavelet de Shannon, mucho más regular que la de Haar, pero con soporte toda la recta real, y las wavelets de Daubechies, con soporte compacto pero muy irregulares. En este capítulo veremos el primer ejemplo de wavelet que no proviene de un AMR, la wavelet de Journé. Es un ejemplo de las wavelets que en el capítulo 4 llamamos MSF. Veremos también otros ejemplos de wavelets MSF. Finalmente hablaremos de otra wavelet muy conocida, la de Lemarié-Meyer

6.1. La Wavelet de Journé

La wavelet de Journé consiste en una función ψ tal que $\hat{\psi} = \chi_K$, donde

$$K = \left[-\frac{16}{7}, -2\right) \cup \left[-\frac{1}{2}, -\frac{2}{7}\right) \cup \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[2, \frac{16}{7}\right).$$

Así tenemos que la wavelet de Journé es una MSF.

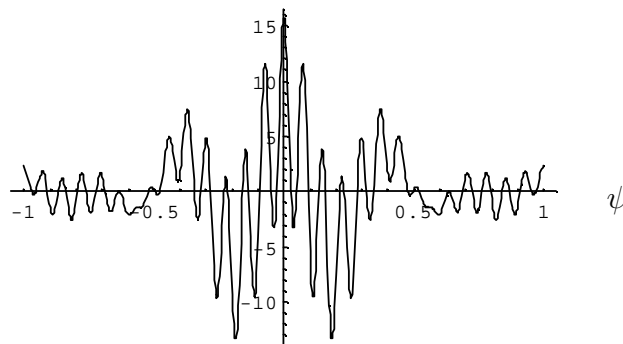


Figura 6.1: Wavelet de Journé

Veremos primero que esta wavelet no puede provenir de un AMR. Si la hubieramos obtenido a partir de un AMR con función de escala φ , por la Proposición 4.2.9 se debería cumplir

$$|\hat{\varphi}(\xi)| = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < |\xi| \leq \frac{2}{7} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq \frac{4}{7} \quad \text{ó} \quad 1 \leq |\xi| \leq \frac{4}{7}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si φ fuese función de escala de un AMR entonces debería cumplir la Proposición 4.1.9. Pero si definimos $I = (0, \frac{1}{7})$ tenemos que $|\varphi(\xi)| = 1$ para todo $\xi \in I$. También tenemos que para todo $\xi \in I$ se cumple $1 \leq \xi + 1 < \frac{4}{7}$ y por tanto $|\hat{\varphi}(\xi + 1)| = 1$. Así,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 \geq |\hat{\varphi}(\xi)|^2 + |\hat{\varphi}(\xi + 1)|^2 = 2,$$

para todo $\xi \in I$. Esto prueba que no se puede cumplir la Proposición 4.1.9. Veamos ahora que efectivamente es una wavelet ortonormal MSF. Para ello necesitaremos algunos resultados previos.

Teorema 6.1.1 *Sea $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tal que $|\hat{\psi}| = \chi_K$, con K un conjunto medible de \mathbb{R} . Entonces ψ es una wavelet ortonormal si y sólo si existe una partición $\{I_\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$ de $I = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$, una partición $\{K_\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$ de K y dos sucesiones de enteros $\{j_\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$ y $\{k_\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$, tales que*

1. $K_\ell = 2^{j_\ell} I_\ell, \ell \in \mathbb{Z}$, y
2. $\{K_\ell + k_\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$ es una partición de I .

Puede verse una demostración de este teorema en [HW].

Una consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente resultado.

Corolario 6.1.2 *Sea $\{I_\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$ una partición de $I = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$. Suponemos que existen dos sucesiones de enteros $\{j_\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$ y $\{k_\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$ tales que $\{2^{j_\ell} I_\ell + k_\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$ forma una partición de I . Entonces toda función ψ tal que $|\hat{\psi}| = \chi_K$, con*

$$K = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} 2^{j_\ell} I_\ell,$$

es una wavelet MSF.

Utilizaremos este corolario para probar que la wavelet de Journé es efectivamente una wavelet. Consideremos el intervalo I definido en el corolario, y la siguiente partición de I ,

$$I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4,$$

con

$$I_1 = \left[-1, -\frac{4}{7}\right], I_2 = \left[-\frac{4}{7}, -\frac{1}{2}\right], I_3 = \left[\frac{1}{2}, \frac{4}{7}\right] \text{ y } I_4 = \left[\frac{4}{7}, 1\right],$$

entendiendo que $I_\ell = \emptyset$ si $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2, 3, 4\}$.

Si escogemos las sucesiones $\{j_1, j_2, j_3, j_4\} = \{-1, 2, 2, -1\}$ y $\{k_1, k_2, k_3, k_4\} = \{1, 3, -3, 1\}$ tenemos que $\{2^{j_\ell} I_\ell + k_\ell : \ell \in \mathbb{Z}\}$ forma la siguiente partición de I ,

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{7}\right] \cup \left[\frac{5}{7}, 1\right] \cup \left[-1, -\frac{5}{7}\right] \cup \left[-\frac{5}{7}, -\frac{1}{2}\right].$$

Así, aplicando el corolario anterior obtenemos que la función ψ tal que $|\hat{\psi}| = \chi_K$, con

$$K = 2^{-1}I_1 \cup 2^2I_2 \cup 2^2I_3 \cup 2^{-1}I_4 = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{2}{7}\right] \cup \left[-\frac{16}{7}, -2\right] \cup \left[2, \frac{16}{7}\right] \cup \left[\frac{2}{7}, \frac{1}{2}\right],$$

es una wavelet MSF.

6.2. Más ejemplos de wavelets MSF

1. En el capítulo 4 estudiamos la wavelet de Shannon, que era la función ψ cuya transformada de Fourier satisface

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{\pi i \xi} \chi_I(\xi),$$

donde $I = [-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. Entonces ya vimos que era una wavelet ortonormal. Observamos que la función ψ cumple que $|\hat{\psi}| = \chi_K$, y por tanto también es MSF. Por el Corolario 4.2.3 del capítulo 4 también hubieramos podido ver que es una wavelet ortonormal.

2. Otro ejemplo de wavelet MSF es la llamada wavelet de Lemarié, que es la función ψ que cumple que $\hat{\psi} = \chi_K$, con

$$K = \left[\frac{-4}{7}, \frac{-2}{7}\right] \cup \left[\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right] \cup \left[\frac{12}{7}, \frac{16}{7}\right].$$

Por el Corolario 4.2.3 tenemos directamente que es una wavelet MSF.

3. Las funciones ψ_a tales que

$$\hat{\psi}_a = \chi_{K_a}, \text{ con } K_a = [-2a, -a] \cup [1-a, 2-2a], 0 < a < 1,$$

forman una familia de wavelets MSF, por el Corolario 4.2.3. Sin embargo, si tomamos el límite en L^2 de estas funciones cuando $a \rightarrow 0$, obtenemos una función ψ tal que $\hat{\psi} = \chi_{[1,2]}$, que no es una wavelet ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ porque no cumple la Proposición 4.1.9, ya que $\hat{\psi}(\xi) = 0$, para $\xi < 0$. Así, hemos visto que las wavelets pueden converger en L^2 a una función que no lo es.

6.3. La Wavelet de Lemarié-Meyer

En este ejemplo trabajaremos con la definición de Transformada de Fourier siguiente

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi i \xi} f(x) dx.$$

Con esta definición el teorema de Plancherel cambia porque tenemos que introducir una constante

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

Definición 6.3.1 Fijado $\varepsilon > 0$ escogemos una función real, par, \mathcal{C}^∞ y con soporte contenido en $[-\varepsilon, \varepsilon]$, σ , tal que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma(x) dx = \frac{\pi}{2}$. Sea $\theta(x) := \int_{-\infty}^x \sigma(t) dt$. Observamos que

$$\theta(x) + \theta(-x) = \int_{-\infty}^x \sigma(t) dt + \int_{-\infty}^{-x} \sigma(t) dt = \frac{\pi}{2}.$$

Tomamos las funciones $s_\varepsilon(x) := \sin(\theta(x))$ y $c_\varepsilon(x) := \cos(\theta(x))$. Tenemos que

$$s_\varepsilon(-x) = \sin(\theta(-x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta(x)\right) = \cos(\theta(x)) = c_\varepsilon(x).$$

Así,

$$s_\varepsilon^2(x) + s_\varepsilon^2(-x) = \sin^2(\theta(x)) + \cos^2(\theta(x)) = 1.$$

Definimos la función campana asociada al intervalo $[\alpha, \beta]$ y a los parámetros ε y ε' a la función

$$b(x) := s_\varepsilon(x - \alpha)c_{\varepsilon'}(x - \beta).$$

Proposición 6.3.2 *Es fácil comprobar las siguientes propiedades de la función campana:*

1. $\text{sop}(b) \subseteq [\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon']$,
2. $b(x) = s_\varepsilon(x - \alpha)$ en $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$,
3. $b(2\alpha - x) = s_\varepsilon(\alpha - x) = c_\varepsilon(x - \alpha)$, en $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$,
4. $b^2(x) + b^2(2\alpha - x) = 1$, en $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$,
5. $\text{sop}(b(\cdot)b(2\alpha - \cdot)) \subseteq [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$,
6. $b(x) = 1$ en $[\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon']$,
7. $b(x) = c_{\varepsilon'}(x - \beta)$ en $[\beta - \varepsilon', \beta + \varepsilon']$,
8. $b(2\beta - x) = c_{\varepsilon'}(\beta - x) = s_{\varepsilon'}(x - \beta)$, en $[\beta - \varepsilon', \beta + \varepsilon']$,
9. $b^2(x) + b^2(2\beta - x) = 1$, en $[\beta - \varepsilon', \beta + \varepsilon']$,

10. $\text{sop}(b(\cdot)b(2\beta - \cdot)) \subseteq [\beta - \varepsilon', \beta + \varepsilon']$, y
 11. $b^2(x) + b^2(2\alpha - x) + b^2(2\beta - x) = 1$, en el soporte de b .

Teorema 6.3.3 *El sistema*

$$\gamma_{j,k} = \frac{2^{j/2}}{\sqrt{2\pi}} b(2^j \xi) e^{i \frac{2k+1}{2} 2^j \xi}, \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$, donde b es una función real par que restringida a $[0, \infty]$ es una función campana asociada al intervalo $[\pi, 2\pi]$ y a los parámetros $0 < \varepsilon \leq \frac{\pi}{3}$, y $\varepsilon' = 2\varepsilon$.

Hay una demostración de este teorema en [HW].

Corolario 6.3.4 Sea $\gamma(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i \frac{\xi}{2} b(\xi)}$ la función $\gamma_{0,0}$ del teorema anterior. Definimos

$$\hat{\psi}(\xi) = \sqrt{2\pi} \gamma(\xi) = e^{i \frac{\xi}{2} b(\xi)}.$$

Entonces, ψ es una wavelet ortonormal.

Demostración:

Por Plancherel tenemos que

$$\|\psi\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{\psi}\|_2^2 = \|\gamma\|_2^2 = 1$$

. Además, por la Proposición 1.1.10, tenemos que

$$\begin{aligned} (\widehat{\psi_{j,k}})(\xi) &= e^{-i2^{-j}k\xi} 2^{-j/2} \hat{\psi}(2^{-j}\xi) = e^{-i2^{-j}k\xi} 2^{-j/2} e^{i2^{-j}\frac{\xi}{2}} b(2^{-j}\xi) \\ &= e^{i2^{-j}\frac{1-2k}{2}\xi} 2^{-j/2} b(2^{-j}\xi) = \sqrt{2\pi} \gamma_{-j,-k}(\xi). \end{aligned}$$

Así, por el teorema anterior, el sistema $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. \square

Definición 6.3.5 A las wavelets ortonormales obtenidas en el corolario anterior las llamamos wavelets de Lemarié-Meyer.

Ejemplo 6.3.6 La función ψ tal que $\hat{\psi}(\xi) = b(\xi)e^{i\frac{\xi}{2}}$, con

$$b(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{3}{4}\left(|\xi| - \frac{2}{3}\pi\right)\right), & \text{si } \frac{2}{3}\pi < |\xi| \leq \frac{4}{3}\pi, \\ \sin\left(\frac{3}{8}\left(-|\xi| + \frac{8}{3}\pi\right)\right), & \text{si } \frac{4}{3}\pi < |\xi| \leq \frac{8}{3}\pi \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es una wavelet de Lemarié-Meyer.

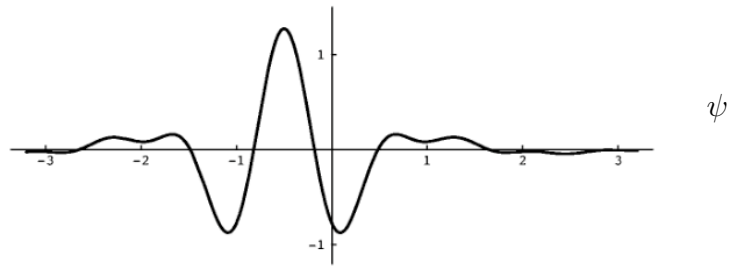


Figura 6.2: ejemplo de Wavelet de Lemarié-Meyer

Apéndice A

Resultados de análisis real, análisis armónico y análisis funcional

A.1. Espacios L^p

En esta sección haremos un breve recordatorio de análisis funcional.

Consideraremos $X \in \mathbb{R}^n$ un subconjunto medible según la de Lebesgue.

A continuación definiremos los conjuntos $L^p(X)$. Recordemos que estamos trabajando con clases de funciones.¹

Definición A.1.1

- Definimos el espacio de clases de funciones medibles:

$$L^0(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es medible Lebesgue}\}$$

- Si $1 \leq p < \infty$, definimos la norma:

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, definimos:

$$\|f\|_\infty := \inf\{M \geq 0 \mid |f(x)| \leq M\}$$

- Definimos los espacios $L^p(X)$ como:

$$L^p(X) := \{f \in L^0(X) \mid \|f\|_p < \infty\}$$

¹Decimos que dos funciones f y g son equivalentes ($f \equiv g$ a.e.), si $\exists E \in X$ subconjunto de medida nula, tal que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X \setminus E$

Notación A.1.2 Denotamos el conjunto de funciones continuas con soporte compacto sobre el conjunto X como $\mathcal{C}_C(X)$.

Observación A.1.3 Se puede demostrar utilizando el lema de Urysohn, que $\mathcal{C}_C(X)$ es un conjunto denso en $L^p(X)$, si $1 \leq p < \infty$. En el caso $p = \infty$ el resultado no es cierto.

Observación A.1.4 Si $q \leq p$, entonces $L^p(X) \subset L^q(X)$.

Notación A.1.5 Denotamos por p' al exponente conjugado de p , que es aquel que cumple:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Observación A.1.6 Recordemos que el dual de L^p es $L^{p'}$.

Lema A.1.7 Sea f una función de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces:

$$\|f\|_p = \sup_{g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} fg}{\|g\|_{p'}}.$$

Demostración:

Sea $g \in L^{p'}$. Por la desigualdad de Hölder:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} fg \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f||g| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Tomando supremo en g , y pasando $\|g\|_{p'}$ dividiendo, obtenemos:

$$\sup_{g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \frac{\left| \int_{\mathbb{R}^n} fg \right|}{\|g\|_{p'}} \leq \|f\|_p.$$

Así tenemos probada una desigualdad. Para ver que realmente hay igualdad basta encontrar una g que lo cumpla.

Sea $g = \frac{|f|^{p-1}\varepsilon(f)}{\|f\|_p^{p-1}}$, donde $\varepsilon(f) = \pm 1$. Veamos que cumple la igualdad.

$$\frac{\left| \int_{\mathbb{R}^n} fg \right|}{\|g\|_{p'}} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p}{\|f\|_p^{p-1}} = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p-1}} = \|f\|_p$$

□

Proposición A.1.8 Desigualdad integral de Minkowski.

Sea F una función de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces:

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} F(x, y) dy \right\|_{L^p(dx)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|F(x, y)\|_{L^p(dx)} dy$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} F(x, y) dy \right\|_{L^p(dx)} &= \sup_{\|g\|_{p'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(x, y) dy g(x) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sup_{\|g\|_{p'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} F(x, y) g(x) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|F(x, y)\|_{L^p(dx)} dy \end{aligned}$$

donde las dos igualdades se deben al lema anterior y la desigualdad se obtiene pasando dentro el supremo y aplicando el teorema de Fubini. \square

A.2. Teoría en $L^1(\mathbb{R})$. Transformada de Fourier

En el capítulo 1, introducimos la noción de transformada de Fourier de una función de $L^1(\mathbb{R})$ (Definición 1.1.3). En esta sección estudiaremos algunas propiedades.

Definición A.2.1 Sean f y g funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos la operación convolución, que denotamos por $*$, como:

$$h = f * g, \text{ donde } h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

Observación A.2.2

- Esta operación dota al espacio vectorial $L^1(\mathbb{R}^n)$ de estructura de álgebra de Banach.
- Como la integral de una función coincide con la integral de su trasladada, es obvio que:

$$f * g = g * f,$$

así tenemos que es una álgebra conmutativa.

Definición A.2.3 Más generalmente, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq \infty$, y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos su convolución $h = f * g$ del mismo modo. Veamos que está bien definida.

Proposición A.2.4 Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq \infty$, y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $h = f * g$ está bien definida y pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Además $\|h\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.

Demostración:

Observamos que $|h(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|dy$. Aplicamos esta observación, la desigualdad integral de Minkowski y el teorema de Fubini y obtenemos el resultado:

$$\begin{aligned} \|h\|_p &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|^p dy dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |g(y)| dy \\ &= \|f\|_p \|g\|_1. \end{aligned}$$

Como $\|f\|_p$ y $\|g\|_1$ son cantidades finitas, tenemos que h está bien definida y que está en $L^p(\mathbb{R}^n)$.
□

Un resultado directo de las definiciones es el siguiente.

Proposición A.2.5 *Si f y g son funciones de $L^1(\mathbb{R})$ entonces*

$$\widehat{(f * g)} = \hat{f} * \hat{g}.$$

Proposición A.2.6 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, y $\hat{f} \geq 0$. Si f es continua en el cero, entonces $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$*
y

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{2\pi i t x} dx, \text{ a.ex.}$$

Puede verse una demostración de esta proposición en [TOR].

A.3. Teoría en $L^2(\mathbb{R})$. Transformada de Fourier

La integral de Lebesgue que define a la transformada de Fourier de una función de $L^1(\mathbb{R})$ no está definida en general para una función de $L^2(\mathbb{R})$. Vamos a ver en esta sección como podemos extender esta definición.

Si una función f además de ser integrable es de cuadrado integrable, entonces \hat{f} también es de cuadrado integrable. De hecho tenemos el siguiente resultado.

Teorema A.3.1 *Teorema de Plancherel*

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ entonces $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Demostración:

Sea $g(x) = \overline{f(-x)}$. Por la Proposición A.2.4 tenemos que $h = f * g \in L^1(\mathbb{R})$. Por la Proposición

A.2.5, $\hat{h} = \hat{f} * \hat{g}$. Pero $\hat{g} = \overline{\hat{f}}$. Así, por la Proposición A.2.6, tenemos que $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ y $h(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{h}(x) dx$. Por tanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \hat{h} dx = h(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(0-x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx \end{aligned}$$

□

Otra manera de enunciar este teorema sería diciendo que si f y g son funciones de cuadrado integrable entonces

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

Este teorema afirma que la transformada de Fourier es un operador lineal y acotado definido en el subespacio denso $L^1 \cap L^2$ de L^2 . Por lo tanto existe una única extensión acotada \mathcal{F} de este operador a todo el espacio L^2 . Llamamos a esta extensión la transformada de Fourier en L^2 .

En general, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ esta definición de transformada de Fourier nos da una función \hat{f} como un límite de una sucesión de funciones $\{\hat{h}_k\}$, donde $\{h_k\}$ es una sucesión en $L^1 \cap L^2$ convergente a f en norma.

Proposición A.3.2 *Integración por partes*

$$\text{Si } f, g \in L^2(\mathbb{R}), \text{ y } fg', f'g \in L^1(\mathbb{R}), \text{ entonces } \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x) dx$$

Proposición A.3.3 *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $f' \in L^2(\mathbb{R})$, entonces*

$$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi).$$

Apéndice B

Algoritmos

A continuación presentamos el algoritmo recursivo utilizado para dibujar la función de escala de la wavelet de Daubechies D4.

En primer lugar definimos los coeficientes del filtro, sin normalizar,

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}, h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}.$$

Por lo visto anteriormente en el capítulo 4, sabemos que la función de escala φ de un AMR satisface la relación recursiva

$$\varphi(r) = h_0\varphi(2r) + h_1\varphi(2r - 1) + h_2\varphi(2r - 2) + h_3\varphi(2r - 3).$$

Empezamos con los valores iniciales siguientes

$$\varphi(0) := 0, \varphi(1) := \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \varphi(2) := \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \varphi(3) := 0.$$

Tenemos en cuenta que la función de escala tiene soporte contenido en el intervalo $[0, 3]$. Para hacer las iteraciones siguientes utilizamos 3072 puntos entre 0 y 3 de la forma $\frac{2j+1}{2^i}$.

Para dibujar la wavelet utilizamos el mismo programa, pero cambiando los puntos que dibujamos, teniendo en cuenta que la wavelet ψ cumple la relación

$$\psi(r - 1) = -h_0\varphi(2r - 3) + h_1\varphi(2r - 2) - h_2\varphi(2r - 1) + h_3\varphi(2r).$$

El código fuente en lenguaje C utilizado para generar los gráficos es

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
int main(){
    double h0, h1, h2, h3;
```

```

double a, f, f0, f1, f2, f3;
int i, j, k1, k2, k3, r;
FILE *fout;
double **A;
int M = 11;
int N = 3073;
A =(double**)calloc(M, sizeof(double*));
if(A ==NULL) exit(1);
for(i = 0; i < M; i++){
    A[i] =(double*)calloc(N, sizeof(double));
    if(A[i] ==NULL){
        printf("No hay suficiente memoria!\n");
        exit(1);
    }
}
fout=fopen ( "resultat.res " , "w");
A[0][0] = 0.;
A[0][1] = (1.+sqrt(3.))/2.;
A[0][2] = (1.-sqrt(3.))/2.;
A[0][3] = 0.;
A[1][0] = (2.+sqrt(3.))/4.;
A[1][1] = 0.;
A[1][2] = (2.-sqrt(3.))/4.;
fprintf(fout," %lf%lf \n",0., A[0][0]);
fprintf(fout," %lf%lf \n",1., A[0][1]);
fprintf(fout," %lf%lf \n",2., A[0][2]);
fprintf(fout," %lf%lf \n",3., A[0][3]);
fprintf(fout," %lf%lf \n",0.5, A[1][0]);
fprintf(fout," %lf%lf \n",1.5, A[1][1]);
fprintf(fout," %lf%lf \n",2.5, A[1][2]);
h0 = (1.+sqrt(3.))/4.;
h1 = (3.+sqrt(3.))/4.;
h2 = (3.-sqrt(3.))/4.;
h3 = (1.-sqrt(3.))/4.;
for(i = 2; i < M; i++){
    k1 = 1;
    k2 = 2;
    k3 = 4;
    for(r = 0; r < i - 2; r++) k1 = 2 * k1;

```

```

k2 = 2 * k1;
k3 = 2 * k2;
for(j = 0; j <= 3 * k2; j++){
    f0 = A[i - 1][j];
    if(2 * (2 * j + 1)/k3 - 1 < 0) f1 = 0.;
    else f1 = A[i - 1][j - k1];
    if(2 * (2 * j + 1)/k3 - 2 < 0) f2 = 0.;
    else f2 = A[i - 1][j - k2];
    if(2 * (2 * j + 1)/k3 - 3 < 0) f3 = 0.;
    else f3 = A[i - 1][j - 3 * k1];
    A[i][j] = h0 * f0 + h1 * f1 + h2 * f2 + h3 * f3;
    a = (2. * j + 1)/k3;
    fprintf(fout, " %lf%lf \n", a, A[i][j]);
}
}
fclose (fout);
for(i = 0; i < M; i++) free(A[i]);
return 0;
}

```


Bibliografia

- [JC] J. Cerdà, *Introducció a l'Anàlisi Funcional*, Textos docents 280, Edicions Universitat de Barcelona, 2004.
- [DAU] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [MF] M. Frazier, *An Introduction to Wavelets through Linear Algebra*, Springer-Verlag, 1999.
- [HW] E. Hernández, G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, CRC Press, 1996.
- [YN] Y. Nievergelt, *Wavelets Made Easy*, Birkhäuser, 1999.
- [SW] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidian Spaces*, Princeton University Press, 1971.
- [TOR] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, 1986.
- [TS] *Teoria del Senyal*, <http://dossiers.ub.edu/dos.php?d=6733>, Dossiers electrònics de la Universitat de Barcelona.