UNIVERSITAT DE BARCELONA

Problemas y Conjeturas de la Teoría de Grafos

(Trabajo Académicamente Dirigido)

Autora: Cristina Araúz Lombardía

Trabajo Académicamente Dirigido por F. Javier Soria de Diego

Semestre de Otoño del curso 2008/2009
Licenciatura de Matemáticas
Universitat de Barcelona

Índice general

Introducción **3**

1. Resultados básicos **5**

1.1. Definiciones básicas 5

1.2. El Teorema de Euler 7

1.3. Caminos y conexión 9

1.4. Subgrafos, eliminación y adición 12

1.5. Tipos de grafos 15

1.6. Distancias 17

1.7. Árboles 18

2. Planaridad **23**

2.1. Grafos planos y planares 23

2.2. Grafos duales 28

2.3. Fórmula de Euler 32

2.4. Elevaciones 34

2.5. Subdivisiones y conjuntos cortantes 41

2.6. Teorema de Kuratowski 47

3. Números de corte **53**

3.1. Dibujos y número de corte de un grafo 53

3.2. Número de corte de K_n 57

3.3. Número de corte de $K_{m,n}$ 68

3.4. Comportamiento asintótico de $cr(K_n)$ y $cr(K_{m,n})$ 79

4. Coloración de vértices **85**

4.1. Número cromático 86

4.2. Un algoritmo básico de coloración 89

4.3. Cotas para el número cromático 91

4.4. Coloración en grafos planares 97

4.5. Las conjeturas de Hadwiger y Hajós 101

5. Teorema de Turán y propiedad (n, k) **103**

5.1. Teorema de Turán 103

5.2. Teorema de Turán para el caso $k = 3$ 105

5.3. Demostración del Teorema de Turán 106

5.4. Propiedad (n, k) 107

6. La Conjetura de Ulam **111**

6.1. Conjetura de Ulam para grafos 111

6.2. Unicidad de la reconstrucción 113

6.3. Existencia de reconstrucciones 118

Bibliografía **123**

Índice alfabético **127**

Introducción

La monoografía que se presenta a continuación es el resultado de un Trabajo Académicamente Dirigido, asignatura del segundo ciclo de la Licenciatura de Matemáticas. Este trabajo tiene como objetivo principal la introducción a los resultados básicos de la Teoría de Grafos, así como la familiarización del lector con los problemas y las conjeturas más conocidas en este campo.

La Teoría de Grafos es una rama relativamente nueva de las matemáticas, pues su nacimiento tuvo lugar en el año 1736 de la mano del matemático Leonhard Euler. Su objetivo era encontrar una solución al famoso problema de los siete puentes de Königsberg [12] y, usando una simple pero efectiva herramienta matemática de su invención, descubrió que dicho problema no tenía solución. Esta herramienta se ha ido desarrollando por diversos matemáticos, entre ellos el propio Euler, y es lo que ahora conocemos como la Teoría de Grafos.

Aunque simple en su planteamiento o definiciones básicas, la Teoría de Grafos es aún un campo en pleno desarrollo del que quedan muchos problemas por resolver y conjeturas por demostrar. En este trabajo se da una muestra tanto de la facilidad de trabajo con las definiciones básicas como de la creciente complejidad que se adquiere al trabajar con grafos de manera abstracta y de los motivos de estas dificultades en algunos de estos casos.

La Teoría de Grafos consta de una importante parte computacional y algorítmica, debido a la casuística siempre presente en ella. En este trabajo, sin embargo, se trata tan sólo la parte teórica de la misma y las incursiones en la parte algorítmica son anecdóticas. La razón para ello es que, como ya se ha dicho, la computación trata caso por caso y es una herramienta sustitutiva para aquellos resultados que la mano del hombre no podría llegar a comprobar o estudiar en un tiempo razonable; el objetivo de este proyecto, sin embargo, es dar una visión general y amplia de esta teoría.

Una de las metas esenciales ha sido la de crear un trabajo autocontenido, donde todas aquellas definiciones, nociones o resultados que se usaran hubieran sido previamente detalladas en el mismo. Esto se ha conseguido en

gran parte, exceptuando el uso de algunos resultados que no se han demostrado o bien por su elevada dificultad o bien porque se trataba de resultados de otro campo de las matemáticas.

El contenido de este trabajo abarca diversos temas muy diferenciados entre ellos. En el primer capítulo se intenta dar un breve pero detallado resumen de las definiciones más usadas y los resultados relacionados con ellas. En el resto de capítulos nos adentramos en el estudio de diversos problemas y conjeturas de la Teoría de Grafos.

El Capítulo 2 estudia el problema de la planaridad de los grafos (la propiedad de poder representarlos correctamente en dos dimensiones) y se llega al Teorema de Kuratowski, resultado que determina cuándo un grafo tiene esta propiedad. El Capítulo 3, en cambio, estudia las propiedades de aquellos grafos que no son planares mediante su número de corte y, dado que el problema adquiere una complejidad elevada, se estudia el número de corte de una clase restringida de grafos para dar una acotación general. En el Capítulo 4 se trata el problema de la coloración que, probablemente, sea uno de los resultados más famosos de este campo; también se detalla la interesante historia de dicho problema y del conocido Teorema de los Cuatro Colores, así como algunas conjeturas relacionadas con el tema. El Capítulo 5 trata problemas límite de la Teoría de Grafos y está completamente dedicado a la demostración del Teorema de Turán y a algunos resultados similares que usan la propiedad (n, k). Finalmente, en el Capítulo 6 se estudia la Conjetura de Ulam en su versión para grafos y se intenta arrojar un poco de luz sobre ella demostrando que en algunos casos concretos ésta se cumple.

Capítulo 1

Resultados básicos

1.1. Definiciones básicas

Un *grafo* es un par $G = (V, E)$ de conjuntos finitos $V = V(G)$ y $E = E(G)$. El primero, $V(G)$, es una colección no vacía de puntos a los que se llama *vértices* de G y el segundo, $E(G)$, es una colección de líneas que unen elementos de $V(G)$, llamadas *aristas* de G. Se dice que dos vértices $u, v \in V$ son *adyacentes* si están unidos por una arista, generalmente representada por uv, y se dice que estos vértices son los *extremos* de dicha arista o, dicho de otra manera, esta arista es *incidente* en u y v.

Una manera muy habitual de representar un grafo consiste en dibujar un punto por cada vértice del grafo y unir dos de estos puntos con una línea si existe una arista que una los dos vértices correspondientes. En la Figura 1.1 se puede ver la representación gráfica del grafo $G = (V, E)$ con $V = \{u, v, w, x, y\}$ y $E = \{uv, uw, xu, vx\}$: v y u son adyacentes mientras que w y x no lo son, uw es incidente en u y en w y ninguna arista incide en y. Aunque las aristas vx y uw se crucen en el dibujo su intersección no es un vértice de G.

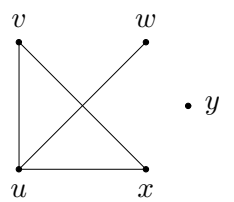


Figura 1.1: Representación gráfica de G.

Cuando dos aristas se cruzan en la representación gráfica de un grafo se dice que se *cortan* y se llama *corte* al punto de intersección entre ambas. Por ejemplo, en la Figura 1.1 las aristas vx y uw se cortan.

Si dos vértices están unidos por más de una arista, se dice que éstas son aristas *múltiples*. Una arista que tiene como extremos a un mismo vértice se denomina *lazo*. Un grafo se dice que es *simple* cuando no tiene ni aristas múltiples ni lazos. El grafo G_1 de la Figura 1.2 es un grafo simple, mientras que G_2 no lo es por dos razones: la arista e es un lazo y las aristas f y g son múltiples.

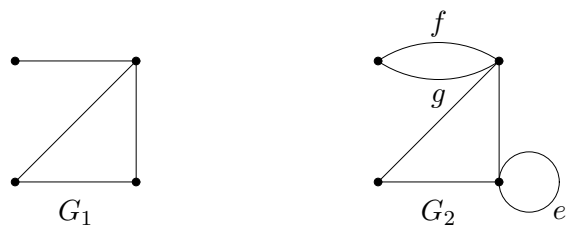


Figura 1.2: Ejemplos de grafos simples, aristas múltiples y lazos.

Es conveniente observar que, en un grafo simple con n vértices, el máximo número posible de aristas es

$$\frac{n\,(n-1)}{2} = \binom{n}{2},$$

pues cada vértice puede tener, como mucho, $n-1$ vértices adyacentes, esto es, $n-1$ aristas incidentes, y si se cuentan todas estas aristas por cada uno de los n vértices en realidad se está contando cada arista dos veces.

Se considera que dos grafos son *iguales* si tienen el mismo conjunto de vértices y el mismo conjunto de aristas, independientemente de su representación gráfica. Dos grafos G y H son *isomorfos* si existe una correspondencia biyectiva entre sus conjuntos de vértices

$$\varphi : V(G) \longrightarrow V(H)$$

tal que $uv \in E(G)$ si, y sólo si, $\varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$. En tal caso, se escribe $G \cong H$. En la Figura 1.3 los grafos G_1 y G_2 son iguales y los grafos G_3 y G_4 son isomorfos, pues tomando la aplicación biyectiva

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V(G_3) & \longrightarrow & V(G_4) \\ v_i & \longmapsto & w_i \end{array}$$

tenemos que $v_iv_j \in E(G_3)$ si, y sólo si, $w_iw_j \in E(G_4)$. Por ejemplo, existen 11 grafos simples no isomorfos con 4 vértices (ver Figura 1.4).

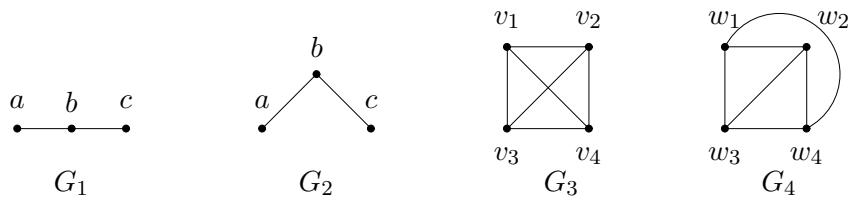


Figura 1.3: Igualdad, isomorfía.

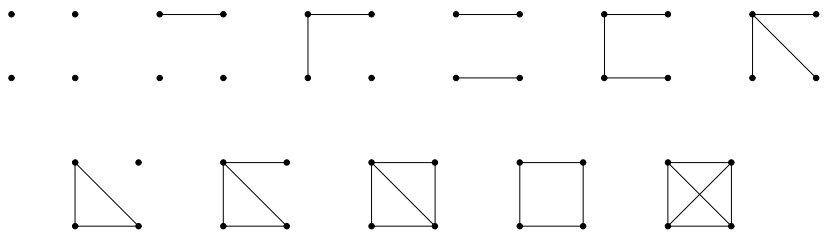


Figura 1.4: Todos los grafos simples con 4 vértices.

Un *invariante* de un grafo G es un número asociado al grafo que tiene el mismo valor para cualquier grafo isomorfo a G. Por ejemplo, dos invariantes de un grafo son el *número de vértices*, que se denota por $\nu = \nu(G) = \text{card}\,(V(G))$, y el *número de aristas*, que se denota por $\alpha = \alpha(G) = \text{card}\,(E(G))$. Dos grafos con el mismo número de vértices y el mismo número de aristas no tienen por qué ser isomorfos; un buen ejemplo de ello son los grafos G_1 y G_2 de la Figura 1.5, ambos con 4 vértices y 3 aristas pero no isomorfos.

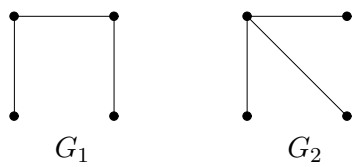


Figura 1.5: Ejemplo de dos grafos no isomorfos con igual número de vértices y aristas.

1.2. El Teorema de Euler

El *grado* $d(v)$ de un vértice v de un grafo G es, por definición, el número de aristas incidentes en dicho vértice, donde los lazos se cuentan dos veces. Se

definen los invariantes *grado mínimo* $\delta(G)$ y *grado máximo* $\Delta(G)$ de un grafo G como el mínimo y el máximo grado de sus vértices, respectivamente. La *sucesión de grados* de un grafo G es la sucesión de los grados de los vértices de G, ordenada de manera creciente. En la Figura 1.6 se puede observar que G tiene grado mínimo $\delta = 1$ y grado máximo $\Delta = 5$, y $g(v) = 3$. La sucesión de grados de G es $\{1, 2, 2, 3, 3, 5\}$.

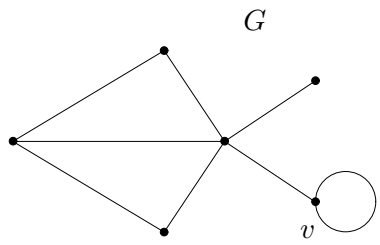


Figura 1.6: Ejemplo de grado mínimo, grado máximo y sucesión de grados.

Es obvio que dos grafos isomorfos tienen idéntica sucesión de grados. El recíproco, sin embargo, no es cierto: en la Figura 1.7 se muestra un contraejemplo, pues G_1 y G_2 tienen ambos la sucesión de grados $\{1, 2, 3\}$ y no son grafos isomorfos.

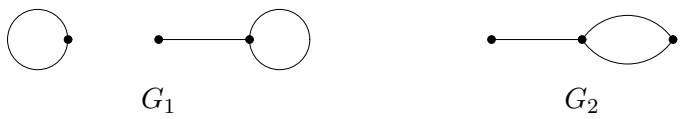


Figura 1.7: Ejemplo de dos grafos no isomorfos con la misma sucesión de grados.

Si se observan los ejemplos dados por las Figuras 1.6 y 1.7 se puede ver a simple vista que la suma de los términos de la sucesión de grados de los grafos G, G_1 y G_2 da, respectivamente, 16, 6 y 6, cifra que es el doble de su número de aristas (8, 3 y 3, respectivamente). ¿Es esto una coincidencia? Leonhard Euler, en 1736, observó el mismo hecho [12] y concluyó que este resultado se cumple para todos los grafos, dando lugar al primer teorema de la historia en Teoría de Grafos:

Teorema 1.2.1 (Teorema de Euler) *La suma de los grados de todos los vértices de un grafo es el doble de su número de aristas.*

$$\sum_{v \in V} g(v) = 2\alpha.$$

Demostración: Como toda arista (incluyendo los lazos) tiene exactamente dos extremos, toda arista tiene dos incidencias en el conjunto de vértices. Así, 2α es el número total de incidencias en el grafo, es decir, es la suma de todos los grados de los vértices del grafo. $\square$

Se dice que un grafo es *r-regular* si $\delta = \Delta = r$, esto es, si todos los vértices tienen el mismo grado r. En la Figura 1.8 se muestran grafos r-regulares con $r = 1$ (a), $r = 2$ (b), $r = 3$ (c) y $r = 4$ (d).

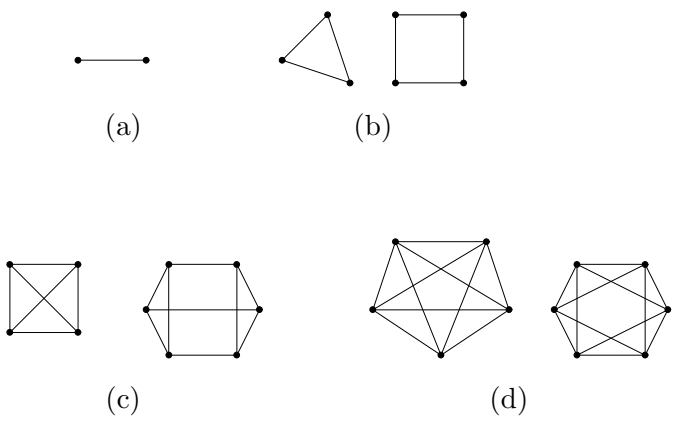


Figura 1.8: Ejemplos de grafos r-regulares con $r = 1, 2, 3$ y 4.

1.3. Caminos y conexión

Un *camino de longitud* k en un grafo G es una sucesión alternada de $k+1$ vértices y k aristas $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots v_{k-1}e_kv_k$, donde v_i son los vértices y e_j son las aristas, tal que los extremos de e_i son v_{i-1} y v_i para $1 \leq i \leq k$. Se dice que W es un camino de v_0 a v_k. Los vértices v_0 y v_k se llaman el *origen* y el *final* del camino W, respectivamente, y el resto de vértices $v_1, \dots, v_{k-1}$ son los *vértices interiores* de W. A veces se denotará también a W como $W = v_0v_1 \cdots v_{k-1}v_k$.

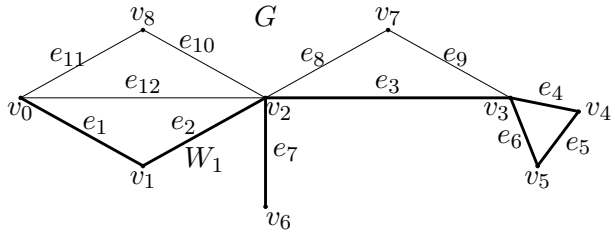
Observación 1.3.1 *La definición anterior permite que se repitan vértices y/o aristas en un mismo camino.*

Se dice que un camino es *simple* cuando no hay repetición de aristas y que es *elemental* cuando no hay repetición de vértices (y, en consecuencia, no hay repetición de aristas). Un *camino cerrado* en G es un camino cuyos vértices origen y final son el mismo; cuando no exista repetición de vértices interiores dicho camino cerrado se llamará *ciclo*.

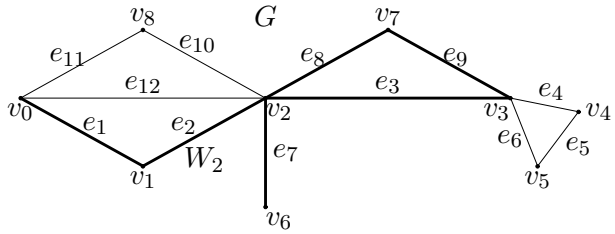
En la Figura 1.9 se muestran ejemplos de todos estos tipos de caminos, marcados con líneas más gruesas. Por ejemplo, el camino

$$W_1 = v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3e_4v_4e_5v_5e_6v_3e_3v_2e_7v_6$$

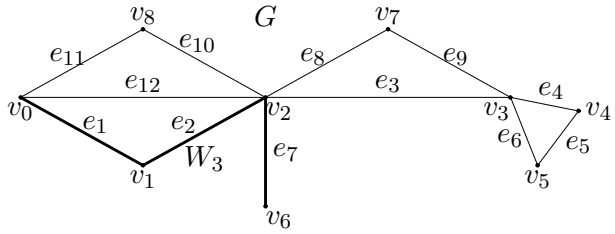
tiene longitud 8, con origen v_0 y final v_6 y vértices interiores $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. W_1 no es ni simple, ni elemental, ni cerrado. $W_2 = v_0e_1v_1e_2v_2e_8v_7e_9v_3e_3v_2e_7v_6$, sin embargo, es un camino simple y $W_3 = v_0e_1v_1e_2v_2e_7v_6$ es un camino elemental. $W_4 = v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3e_9v_7e_8v_2e_{10}v_8e_{11}v_0$ es un camino cerrado de longitud 7 pero no es un ciclo. $W_5 = v_0e_1v_1e_2v_2e_{10}v_8e_{11}v_0$ es un ciclo de longitud 4.



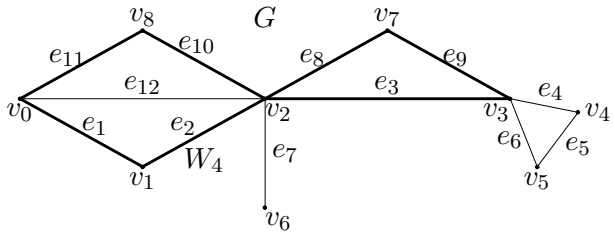
(a)



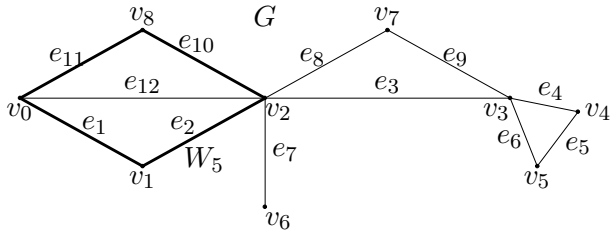
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 1.9: Ejemplos de diversos tipos de caminos en el grafo G.

Como en el caso del campo de la Topología, en Teoría de Grafos también se necesita hablar de componentes conexas. Un grafo G es *conexo* si todo par de vértices $u, v \in G$ están unidos por un camino elemental de u a v. Una consecuencia automática de esta definición es que todo grafo es la unión disjunta de grafos conexos, a los que llamaremos *componentes conexas*. En la Figura 1.10 G_1 es un grafo conexo y G_2 no lo es, pues tiene 2 componentes conexas.

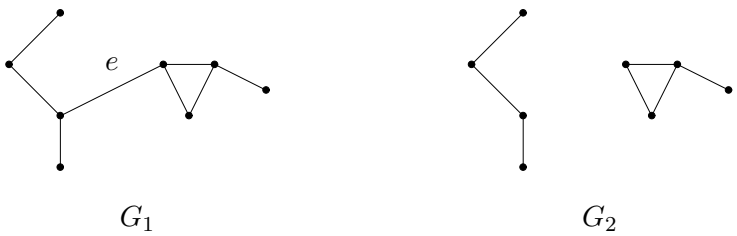


Figura 1.10: Componentes conexas en G_1 y G_2.

Se denota por $k(G)$ el *número de componentes conexas* de un grafo G. Por ejemplo, $k(G_1) = 1$ y $k(G_2) = 2$ en la Figura 1.10.

1.4. Subgrafos, eliminación y adición

Aparte del estudio de las características o propiedades de un grafo en su totalidad, también se puede estudiar solamente una región o una parte del mismo. Por ejemplo, dado un grafo no conexo a veces es conveniente estudiar cada una de sus componentes conexas por separado. Más aún, podemos estudiar conjuntos arbitrarios de vértices y aristas de un grafo cualquiera. Un *subgrafo* G' de un grafo G es un grafo que tiene todos sus vértices y aristas en G, de manera que toda arista de G' incida en vértices de G'. Se dice que un subgrafo es *expansivo* cuando contiene todos los vértices del grafo de partida. En la Figura 1.11 G_1 y G_2 son subgrafos de G, pero sólo G_2 es expansivo.

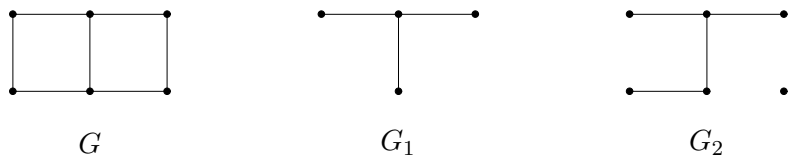


Figura 1.11: Ejemplos de subgrafos.

La mayor parte de los subgrafos que merece la pena estudiar son aquellos que difieren de manera mínima del grafo de partida, pues conservan casi todas sus propiedades y son las pequeñas diferencias las que muestran detalles importantes. Es por ello que existen ciertas maneras de modificar mínimamente un grafo, como se muestra en los siguientes párrafos.

Eliminar una arista e de un grafo G es quitarla del conjunto de aristas de G, obteniendo un subgrafo de G denotado por $G - e$, que es expansivo. Los grafos también se pueden modificar añadiendo elementos: por ejemplo, la *adición de una arista* e en un grafo G es el resultado de añadir una arista al conjunto E(G) tal que una dos vértices cualesquiera ya existentes en el grafo. Se escribe $G + e$. Dado un grafo $G = (V, E)$, una arista $e \in E(G)$ es un *puente* de G si el subgrafo obtenido al eliminarla tiene más componentes conexas que G.

Proposición 1.4.1 *Cuando se elimina un puente de un grafo se obtiene un subgrafo con exactamente una componente conexa más que el grafo de partida.*

Demostración: Al eliminar un puente de un grafo se están separando (por ser puente) exactamente dos regiones del grafo de partida que están unidas por una sola arista, debido a que toda arista tiene exactamente dos extremos.

Tal arista no puede unir más regiones porque no tiene más extremos. Así, el subgrafo obtenido tiene una componente conexa más que el grafo de partida. □

Por ejemplo, retomando la Figura 1.10, la arista e de G_1 es un puente y al eliminarla se obtiene el grafo G_2 que, efectivamente, tiene una componente conexa más que G_1.

Proposición 1.4.2 *Sea G un grafo. Se tiene que $e \in E(G)$ es un puente si, y sólo si, e no pertenece a ningún ciclo de G.*

Demostración: Sea $e \in E(G)$ un puente. Por la Proposición 1.4.1 se sabe que $G-e$ tiene una componente conexa más que G. Si e pertenece a un ciclo C de G y tiene extremos v_0 y v_1 en $V(G)$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $C = v_0ev_1e_2 \dots v_{k-1}e_kv_0$ para alguna k. Así, $C - e$ es el camino elemental $v_1e_2 \dots v_{k-1}e_kv_0$. Ahora bien, $C - e \subset G - e$ y, por tanto, v_0 y v_1 están unidos por un camino en $G-e$. Como v_0 y v_1 son los extremos de e, al añadir e a $G - e$ no se aumenta el número de componentes conexas del grafo porque v_0 y v_1 ya están unidos. Observando que $(G - e) + e = G$ se llega a contradicción.

Recíprocamente, si una arista $e \in E(G)$ con extremos v_0 y v_1 no pertenence a ningún ciclo de G se tiene que los extremos de e están unidos por un único camino, que es precisamente v_0ev_1. Así, $G - e$ no tiene tal camino y, por tanto, tiene una componente conexa más que G, indicando así que e es un puente de G. □

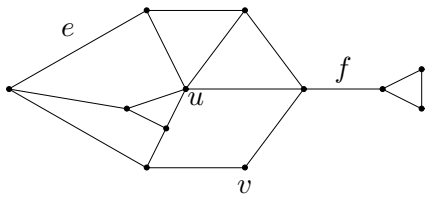
Prescindir de un vértice en un grafo no es tan simple como eliminar una arista, pues al quitar un vértice todas las aristas incidentes en éste pierden un extremo. En consecuencia, es necesaria una buena definición de esta acción: la *eliminación de un vértice* v de un grafo G consiste en quitar v del conjunto de vértices $V(G)$ y todas las aristas incidentes en v del conjunto de aristas $E(G)$, obteniendo un subgrafo de G denotado por $G - v$.

La eliminación de un conjunto de aristas y/o vértices de un grafo viene definida por la eliminación uno a uno de estos elementos.

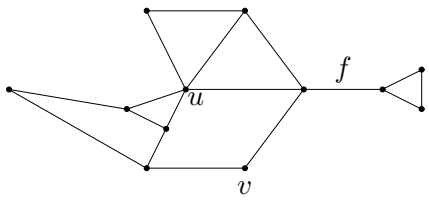
Otra operación muy usada para alterar ligeramente un grafo es la *contracción de aristas*. Ésta consiste en eliminar la arista que se contrae e identificar sus dos extremos en un sólo vértice. Una contracción de la arista e en el grafo G se denota por $G \cdot e$. Se dice que un grafo G es *contraíble* a un grafo H cuando existe una sucesión finita de contracciones de aristas que transforma G en H.

La Figura 1.12 ilustra todos los conceptos aquí definidos: f es un puente, pues al eliminarlo se obtiene el subgrafo G_2 de G, que tiene una componente

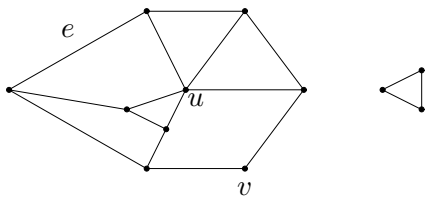
conexa más; G_1 y G_2 muestran la eliminación de una arista, G_3 la de un vértice, G_4 la adición y G_5 la contracción de una arista.



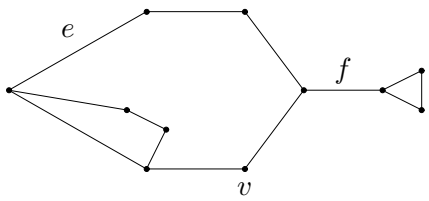
G



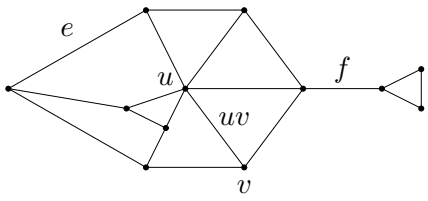
$G_1 = G - e$



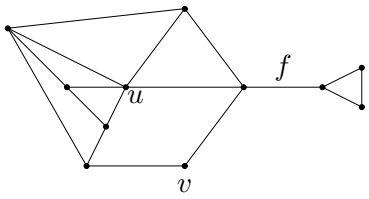
$G_2 = G - f$



$G_3 = G - u$



$G_4 = G + uv$



$G_5 = G \cdot e$

Figura 1.12: Ejemplos de adición y eliminación.

Según la Conjetura de Ulam, que se detallará más adelante en este trabajo, la colección de subgrafos $G - v_i$ de G, donde $v_i \in G$, da mucha información sobre el grafo de partida G hasta tal punto que éste se puede determinar de manera única a partir de todos ellos.

1.5. Tipos de grafos

Es de utilidad poder clasificar ciertos grafos según su número de vértices y aristas o según las propiedades que cumplen. A continuación se da la definición de algunos de estos tipos de grafos que se utilizarán a lo largo de este trabajo.

El llamado *grafo trivial* es el grafo formado por un solo vértice y ninguna arista. Además de este grafo, existen muchos otros tipos de grafos que, al restringir problemas de un grado elevado de dificultad sobre ellos, arrojan cierta luz sobre la solución. Este es el caso, por ejemplo, de los grafos completos y el problema del máximo número de corte en un grafo cualquiera, problema que se estudiará más adelante en este trabajo.

Un *grafo completo* de n vértices, K_n, es un grafo simple con n vértices y $(n-1)$-regular. Usando el Teorema de Euler (Teorema 1.2.1) se deduce que

el número de aristas de este grafo es

$$\alpha\left(K_n\right)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V(K_n)}g(v)=\frac{n\left(n-1\right)}{2}=\binom{n}{2}.$$

Como se ha demostrado antes, $\binom{n}{2}$ es el número máximo de aristas que puede tener un grafo simple de n vértices. Precisamente el grafo completo recibe este nombre porque alcanza este máximo.

Un *grafo nulo* de n vértices, N_n, es el grafo de n vértices con el conjunto de aristas vacío; se puede decir que es la unión disjunta de n grafos triviales. Los *grafos planos* P_n son caminos elementales de n vértices con, obviamente, $n-1$ aristas y los *grafos cíclicos* C_n son ciclos de n vértices. Estos últimos son grafos 2-regulares, pues todo ciclo es un camino elemental donde los vértices origen y final son el mismo y en todo camino elemental los vértices interiores no se repiten y unen exactamente dos aristas. Así, los vértices interiores de un grafo cíclico tienen grado 2 y, finalmente, los vértices origen y final, que son el mismo, tienen grado 2 porque la primera y la última arista del ciclo inciden en él. Obviamente, los ciclos de n vértices tienen n aristas.

Estos tipos de grafos presentan una peculiaridad: si dos grafos completos (o nulos, o planos, o cíclicos) tienen el mismo número de vértices, entonces son isomorfos. A continuación, en esta y en otras secciones de este capítulo, se estudiarán otros tipos de grafos cuyas definiciones permiten que existan grafos del mismo tipo con el mismo número de vértices y no isomorfos: grafos bipartitos, árboles, ...

Un *grafo bipartito* es un grafo cuyo conjunto de vértices tiene una partición en dos conjuntos X e Y tales que cada arista tiene un extremo en X y un extremo en Y. Un *grafo bipartito completo* es un grafo bipartito simple con partición (X,Y) en el que cada vértice de X es adyacente a todo vértice de Y; si $|X|=m$ y $|Y|=n$ tal grafo se denota por $K_{m,n}$, con $\nu\left(K_{m,n}\right)=m+n$ vértices y $\alpha\left(K_{m,n}\right)=mn$ aristas.

Teorema 1.5.1 *Un grafo es bipartito si, y sólo si, no contiene ningún ciclo con un número impar de vértices.*

Demostración: Sea G un grafo bipartito con partición (X,Y). Sea $x_1\ldots x_l$ un ciclo de G. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_1\in X$. Entonces, necesariamente $x_2\in Y$, $x_3\in X$, $x_4\in Y$ y así sucesivamente: $x_i\in X$ si, y sólo si, i es impar y $x_i\in Y$ si, y sólo si, i es par. Como x_l debe pertenecer a Y, l es par.

Recíprocamente, supongamos que G no contiene ningún ciclo con un número impar de vértices. Como un grafo es bipartito si, y sólo si, cada una de sus componentes conexas lo es, podemos suponer que G es conexo. Sea v

un vértice de $V(G)$ y sea $X := \{u \mid d(v,u) \text{ es impar}\}$. Sea $Y := V(G) \setminus X$. Consideremos la partición de los vértices de G en esas dos clases X, Y. No existe ninguna arista que una dos vértices de la misma clase, pues si existiera entonces G contendría un ciclo con un número impar de vértices. Así, G es bipartito con partición (X, Y). $\square$

Es fácil observar que, si se colorearan los vértices de un grafo bipartito con colores diferentes, bastaría usar solamente dos colores para conseguir que todos los pares de vértices adyacentes tuvieran distinto color. Esta cuestión será estudiada más a fondo en el Capítulo 4 de este trabajo.

A continuación, en la Figura 1.13, se detallan ejemplos de todos los grafos definidos en esta sección. Como se puede observar, existen grafos que pertenecen a más de una categoría.

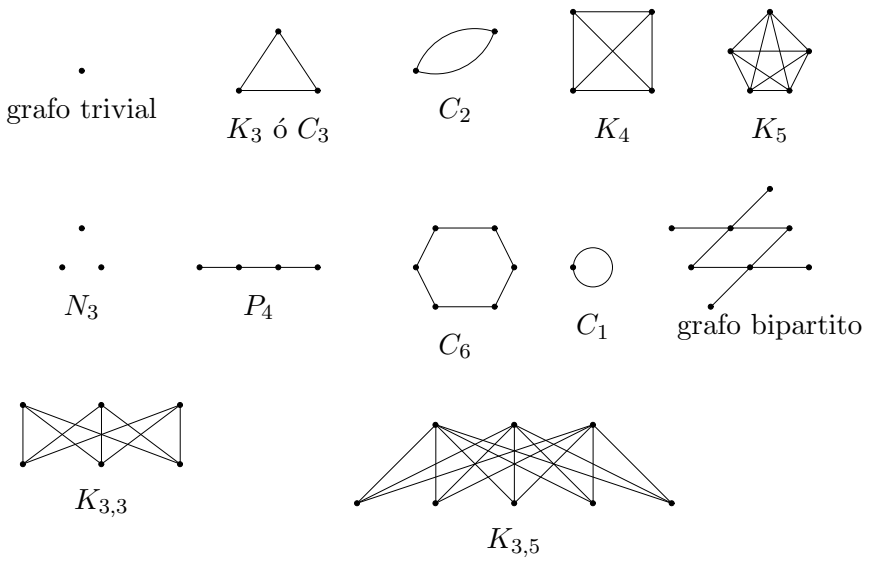


Figura 1.13: Ejemplos de grafos.

1.6. Distancias

La *distancia* $d(u,v)$ entre dos vértices u y v de un grafo G es la longitud menor de todos los caminos elementales que los unen. Si u y v no se encuentran en la misma componente conexa, se dice que $d(u,v) = \infty$. En la

Figura 1.14 la distancia entre los vétices w y v del grafo G es 3 y la distancia entre u y v es ∞ porque no se encuentran conectados por ningún camino.

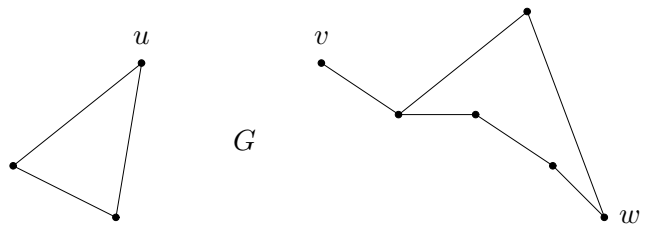


Figura 1.14: Ejemplos de distancias entre vértices.

Proposición 1.6.1 *En un grafo conexo, la distancia define una métrica.*

Demostración: Sea G un grafo conexo. Para todo $u, v, w \in V(G)$ se tiene:

1. $d(u, v) \geq 0$; $d(u, v) = 0$ si, y sólo si, $u = v$.

2. $d(u, v) = d(v, u)$. Basta tomar el camino inverso a un camino elemental con $d(u, v)$ aristas entre u y v.

3. Si W_1 es un camino elemental con $d(u, v)$ aristas entre u y v y W_2 es un camino elemental con $d(v, w)$ aristas entre v y w, entonces $W = W_1 \cup W_2$ es un camino elemental que une u y w y tiene longitud menor o igual que $d(u, v) + d(v, w)$. W puede no ser el camino elemental con menor distancia entre u y w; esta longitud simplemente da una cota superior para esta distancia. Así, $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Es decir, para todo grafo conexo la distancia es una métrica. □

1.7. Árboles

Se dice que un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos. Esta definición, que a simple vista no parece ser demasiado restrictiva, en realidad lo es: el número de aristas de un árbol determina su número de vértices y viceversa, como se verá en la Proposición 1.4.2. No obstante, antes se debe conocer el siguiente resultado:

Teorema 1.7.1 *G es un árbol si, y sólo si, todo par de vértices de G está unido por un solo camino (elemental).*

Demostración: Sea G un árbol. Como, por definición, G es conexo, entonces existe un camino elemental entre todo par de vértices de G. Ahora bien, este camino es único: si u y v son dos vértices cualesquiera de G y suponemos que existen dos caminos distintos de u a v, al unir dichos caminos se formaría un subgrafo de G que contendría un ciclo, debido a que existen dos caminos diferentes, hecho que nos lleva a una contradicción. Recíprocamente, si todo par de vértices de G está unido por un solo camino elemental, obviamente G es un grafo conexo y, además, G no contiene ciclos porque si existiera un ciclo todos los pares de vértices en él se podrían unir con dos caminos distintos. □

En la Figura 1.15 se pueden ver diferentes tipos de árboles.

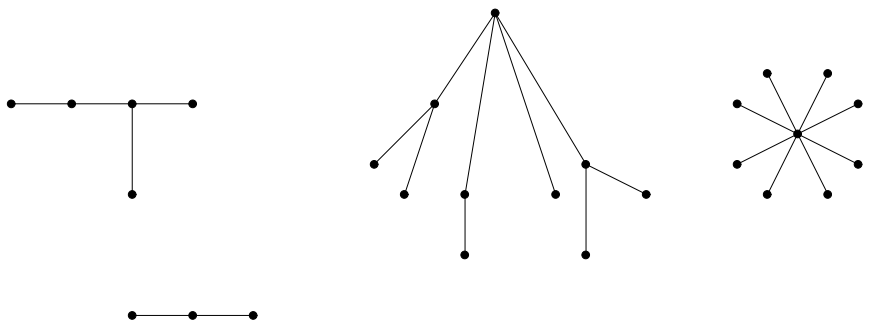


Figura 1.15: Ejemplos de árboles.

Para la siguiente proposición será de utilidad remarcar que un *árbol expansivo* es, aplicando la definición de subgrafo expansivo, un subgrafo expansivo que, a su vez, es un árbol. Todo grafo conexo tiene al menos un árbol expansivo, pues se puede construir uno eliminando una arista de cada ciclo.

Proposición 1.7.2 *G es un árbol si, y sólo si, $\nu(G) = \alpha(G) + 1$.*

Demostración: Por inducción en ν. Sea G un árbol con $\nu = 1$. Como G no tiene ciclos, en particular no tiene lazos y, por tanto, no puede tener aristas debido a que tiene un solo vértice. Así, $\alpha = 0$, cumpliendo la igualdad. Supongamos ahora que la igualdad se cumple para todos los árboles con menos de ν vértices y sea G un árbol con $\nu \geq 2$. Sea $uv \in E$ una arista cualquiera de G con extremos u y v. Como G es un árbol, $G - uv$ no contiene ningún camino de u a v, pues por el Teorema 1.7.1 uv es el único camino de u a v en G. Así, $G - uv$ no es conexo y su número de componentes conexas es 2 por la Proposición 1.4.1. Sean G_1 y G_2 tales componentes. Como ambas son

subgrafos de $G - uv$ quien, a su vez, es subgrafo de G, se tiene que G_1 y G_2 son subgrafos de un árbol y, en consecuencia, no tienen ciclos. Además, por ser conexas, G_1 y G_2 son árboles. Como ambas tienen menos de ν vértices por construcción, por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\nu\left(G_i\right) = \alpha\left(G_i\right) + 1, \quad \text{para } i = 1, 2$$

y, en consecuencia,

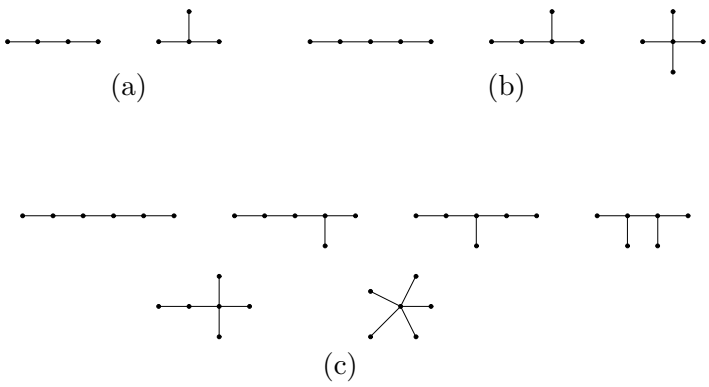
$$\begin{aligned}\alpha\left(G\right) &= \alpha\left(G - uv\right) + 1 = \alpha\left(G_1\right) + \alpha\left(G_2\right) + 1 = \nu\left(G_1\right) + \nu\left(G_2\right) - 1 \\ &= \nu\left(G - uv\right) - 1 = \nu\left(G\right) - 1,\end{aligned}$$

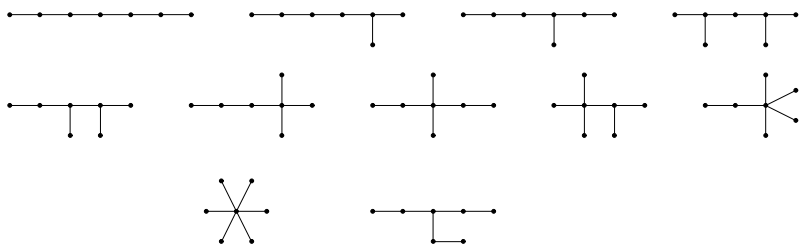
cumpliendo la igualdad.

Recíprocamente, sea G un grafo conexo cumpliendo la igualdad $\nu(G) = \alpha(G) + 1$. Sea G' un árbol expansivo de G. Como $\nu\left(G'\right) = \nu\left(G\right)$, G' tiene $\alpha\left(G'\right) = \nu\left(G'\right) - 1 = \nu\left(G\right) - 1 = \alpha\left(G\right)$ aristas por la primera implicación y G' es subgrafo de G, se sigue que $G = G'$. □

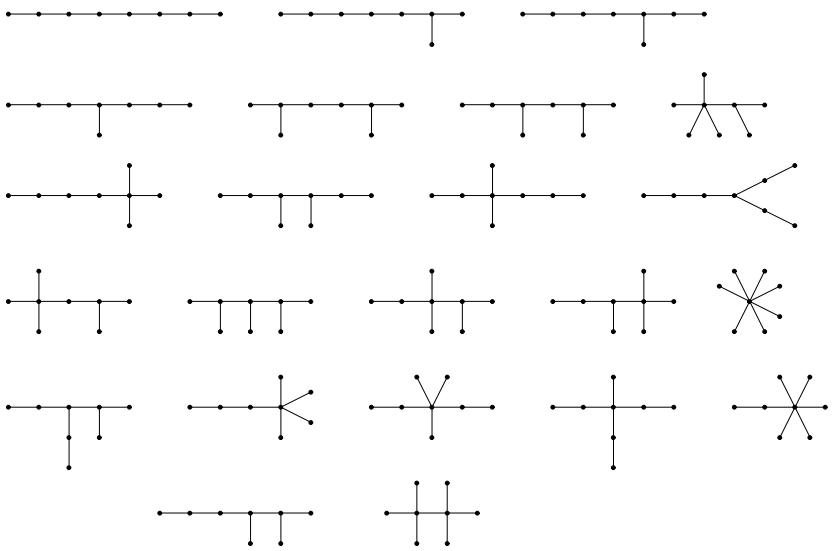
Sin embargo, el hecho de que el número de vértices de un árbol determine su número de aristas no implica que todos los árboles con idéntico número de vértices sean isomorfos. Hay, por ejemplo, 2 árboles no isomorfos con 4 vértices, 3 árboles no isomorfos con 5 vértices, 6 árboles no isomorfos con 6 vértices, 11 árboles no isomorfos con 7 vértices y 23 árboles no isomorfos con 8 vértices, como se muestra en la Figura 1.16. La siguiente tabla muestra el número de árboles no isomorfos con n vértices para $1 \leq n \leq 10$ [22]:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	1	2	3	6	11	23	47	106





(d)



(e)

Figura 1.16: Todos los árboles con 4, 5, 6, 7 y 8 vértices.

Existe una manera alternativa de definir un árbol, dada por la siguiente proposición:

Proposición 1.7.3 *Sea G un grafo conexo. Entonces, G es un árbol si, y sólo si, toda arista de G es un puente.*

Demostración: Sea G un árbol. Por definición, G un árbol si, y sólo si, no tiene ciclos y, por la Proposición 1.4.2, si y sólo si toda arista de G es un puente. $\square$

Capítulo 2

Planaridad

La planaridad es, a grandes rasgos y de manera intuitiva, la propiedad que tiene un objeto de poder vivir dentro del plano, esto es, de poder incluirse dentro del mismo sin perder ninguna de sus propiedades.

2.1. Grafos planos y planares

Se dice que un grafo es *planar* o que *tiene una representación en el plano* si éste puede ser dibujado sobre el plano asignando puntos a los vértices y líneas a las aristas (tal como se definió la representación gráfica en el Capítulo 1) de tal manera que las líneas se intersequen entre ellas solamente en sus extremos. Tal representación gráfica de un grafo G se llama *dibujo sin cortes* o *representación planar* de G y se puede entender como una aplicación del grafo G en el plano tal que a cada vértice le asigna un punto y a cada arista una línea que une los puntos de sus extremos. De hecho, una representación planar $\tilde{G}$ de G puede contemplarse como un grafo isomorfo a G. De ahora en adelante, se hablará de representación planar cuando se quiera enfatizar el uso de la aplicación y de dibujo en caso contrario.

Un *grafo plano* es, abusando del lenguaje, una representación planar de un grafo planar. La Figura 2.1 muestra un representación planar $\tilde{G}$ del grafo planar G. Es importante observar que cualquier subgrafo de un grafo plano es también plano, pues si el grafo de origen no presenta cortes entre aristas tampoco los presentará ninguno de sus subgrafos.

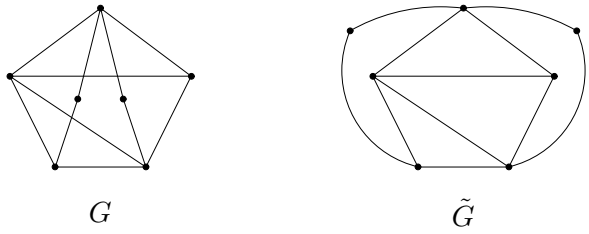


Figura 2.1: Ejemplo de una representación planar de un grafo planar.

Como se ha adelantado en el Capítulo 1, la topología juega un papel muy importante en el estudio de los grafos. Los resultados topológicos que son especialmente relevantes en el estudio de los grafos planares son aquellos que tratan sobre las curvas de Jordan.

Una *curva de Jordan* es una curva cerrada y continua que no se autocorta. La unión de las aristas en un ciclo de un grafo planar constituyen una curva de Jordan en el plano; esta es la razón de que se deba usar en esta sección un conocido teorema relacionado con estas curvas para demostrar la planaridad de ciertos grafos. Antes, sin embargo, se deben definir ciertos conceptos para poder entender el teorema.

Sea J una curva de Jordan en el plano. Entonces, el resto del plano está dividido en dos conjuntos abiertos distintos, uno acotado y el otro no, llamados el *interior de* J y el *exterior de* J respectivamente. Se escribe int J para denotar el interior de J y ext J para denotar el exterior de J y sus clausuras se denotan por Int $J = \overline{\text{int } J}$ y Ext $J = \overline{\text{ext } J}$, respectivamente. Claramente, Int $J \cap$ Ext $J = J$.

Ahora ya se puede enunciar el Teorema de la curva de Jordan:

Teorema 2.1.1 (Teorema de la curva de Jordan) *Dada una curva de Jordan J, cualquier línea que una un punto de* int J *con un punto de* ext J *debe cortar a J en al menos un punto* (ver Figura 2.2).

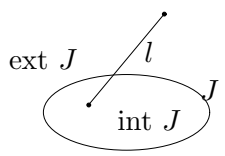


Figura 2.2: La línea l corta a J en un punto.

Dado que este teorema trata con la topología del plano y, pese a ser intuitivo, la demostración formal del mismo tiene un alto grado de dificultad,

no se demostrará en este trabajo. Se puede encontrar una demostración formal del Teorema de la curva de Jordan en [13].

Con este resultado se puede demostrar ya la no planaridad de ciertos grafos, como por ejemplo K_5 y $K_{3,3}$.

Teorema 2.1.2 *K_5 es no planar.*

Demostración: Por contradicción. Supongamos que existe un grafo plano G que se corresponde con una representación planar de K_5. Se denotan los vértices de G por v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5. Como G es completo, cualquier par de vértices de G está unido por una arista. Así, se puede considerar el ciclo C formado por los vértices v_1, v_2 y v_3 en este orden, $C = v_1v_2v_3v_1$ abusando de la notación. C es una curva de Jordan en el plano. El vértice v_4, al no estar en el ciclo C, pertenece o bien a int C o bien a ext C. Se distinguen casos:

- $\underline{v_4 \in \text{int } C}$

  En este caso, las aristas v_4v_1, v_4v_2 y v_4v_3 dividen int C en tres regiones int C_1, int C_2 y int C_3, donde $C_1 = v_2v_4v_3v_2$, $C_2 = v_3v_4v_1v_3$ y $C_3 = v_1v_4v_2v_1$ (ver Figura 2.3).

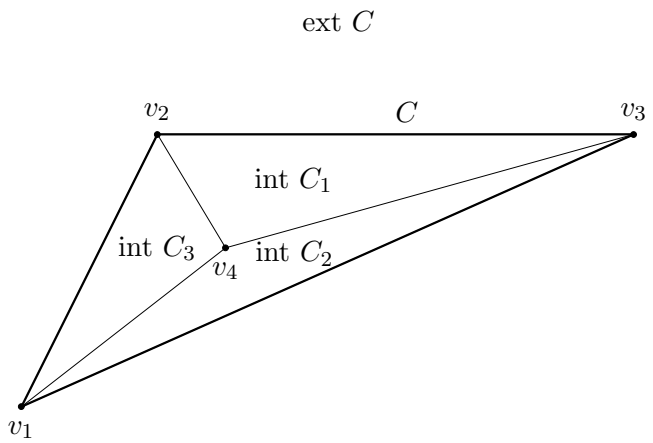


Figura 2.3: Si $v_4 \in$ int C.

Ahora v_5 pertenece a una de las 4 regiones siguientes: ext C, int C_1, int C_2 o int C_3. Si $v_5 \in$ ext C entonces, por el Teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.1.1), la arista v_4v_5 se corta con C en algún punto, hecho que contradice la suposición de que G es un grafo plano. En los casos $v_5 \in$ int C_i, con $i = 1, 2, 3$, la arista v_5v_i une v_5, que está en int

C_i, con el vértice v_i que, por construcción, no está ni en C_i ni en int C_i. La arista v_5v_i, por tanto, debe pasar por dos regiones diferentes, obligando a que dicha arista corte a alguna otra arista y llegando a contradicción con la suposición de que G es un grafo plano.

- $v_4 \in \text{ext } C$

En este caso, las aristas v_4v_1, v_4v_2 y v_4v_3 dividen ext C en tres regiones. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que son int C_1, ext C_2 y int C_3, donde $C_1 = v_2v_4v_3v_2$, $C_2 = v_3v_4v_1v_3$ y $C_3 = v_1v_4v_2v_1$ (ver Figura 2.4), y $v_2 \in \text{int } C_2$.

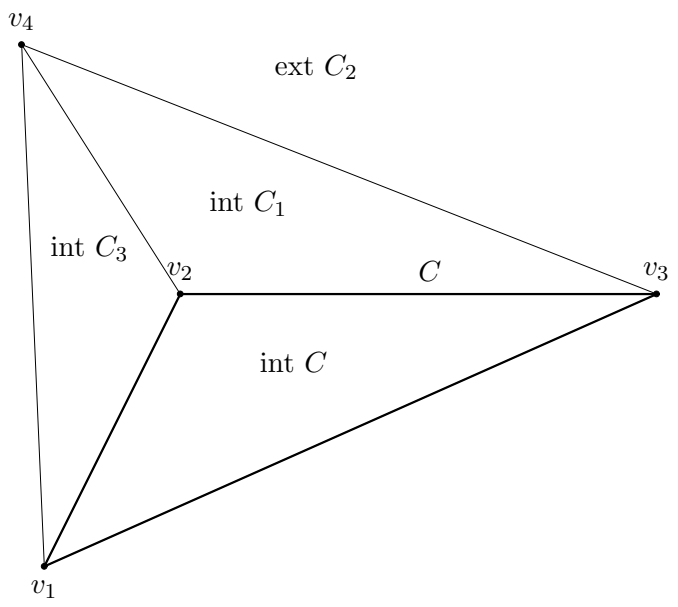


Figura 2.4: Si $v_4 \in \text{ext } C$.

Ahora v_5 pertenece a una de las 4 regiones siguientes: int C, int C_1, ext C_2 o int C_3. Si $v_5 \in \text{int } C$ entonces, por el Teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.1.1), la arista v_4v_5 se corta con C en algún punto, hecho que contradice la suposición de que G es plano. En los casos $v_5 \in \text{int } C_i$, con $i = 1, 3$, la arista v_5v_i une v_5, que está en int C_i, con el vértice v_i que, por construcción, no está ni en C_i ni en int C_i. La arista v_5v_i, por tanto, debe pasar por dos regiones diferentes, obligando a que dicha arista corte a alguna otra arista y llegando a contradicción con la suposición de que G es plano. Finalmente, si $v_5 \in \text{ext } C_2$, por construcción se tiene que $v_2 \in \text{int } C_2$ y, por tanto, la arista v_5v_2 corta a C_2 por el Teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.1.1), llegando también a contradicción.

Por tanto, K_5 no es planar. □

Teorema 2.1.3 *$K_{3,3}$ es no planar.*

Demostración: Por contradicción. Supongamos que existe un grafo plano G que se corresponde con una representación planar de $K_{3,3}$. Se denotan los vértices de G por v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6. Como G es bipartito completo, podemos suponer que $(\{v_1, v_3, v_5\}, \{v_2, v_4, v_6\})$ es la partición de su conjunto de vértices y los vértices del primer conjunto están unidos a cualquier otro del segundo conjunto y viceversa. Así, se puede considerar el ciclo C formado por los vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 en este orden, $C = v_1v_2v_3v_4v_1$ abusando de la notación. C es una curva de Jordan en el plano. El vértice v_5, al no estar en el ciclo C, pertenece o bien a int C o bien a ext C. Se distinguen casos:

- $\underline{v_5 \in \text{int } C}$

  En este caso, las aristas v_5v_2 y v_5v_4 dividen int C en dos regiones int C_1 y int C_3, donde $C_1 = v_2v_3v_4v_5v_1$ y $C_3 = v_1v_2v_5v_4v_1$ (ver Figura 2.5).

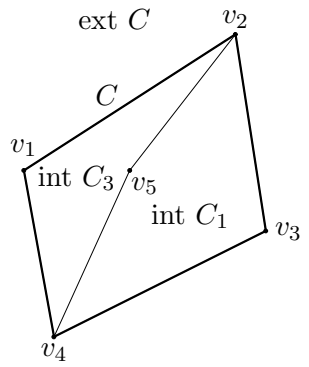


Figura 2.5: Si $v_5 \in$ int C.

Ahora v_6 pertenece a una de las 3 regiones siguientes: ext C, int C_1 o int C_3. Si $v_6 \in$ ext C entonces, por el Teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.1.1), la arista v_6v_5 se corta con C en algún punto, hecho que contradice la suposición de que G es un grafo plano. En los casos $v_6 \in$ int C_i, con $i = 1, 3$, la arista v_6v_i une v_6, que está en int C_i, con el vértice v_i que, por construcción, no está ni en C_i ni en int C_i. La arista v_6v_i, por tanto, debe pasar por dos regiones diferentes, obligando a que dicha arista corte a alguna otra arista y llegando a contradicción con la suposición de que G es un grafo plano.

- $v_5 \in \text{ext } C$

  En este caso, las aristas v_5v_2 y v_5v_4 dividen ext C en dos regiones. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que son ext C_1 y int C_3, donde $C_1 = v_4v_5v_2v_3v_4$ y $C_3 = v_5v_2v_1v_4v_5$ (ver Figura 2.6), y $v_1 \in \text{int } C_1$.

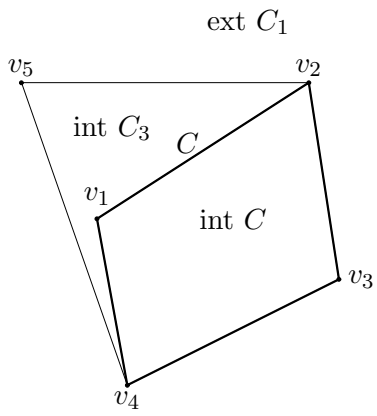


Figura 2.6: Si $v_5 \in \text{ext } C$.

Ahora v_6 pertenece a una de las 3 regiones int C, int C_3 o ext C_1. Si $v_6 \in \text{int } C$ entonces, por el Teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.1.1), la arista v_6v_5 se corta con C en algún punto, contradiciendo la suposición. En el caso $v_6 \in \text{int } C_3$ la arista v_6v_3 une v_6, que está en int C_3, con el vértice v_3 que, por construcción, no está ni en C_3 ni en int C_3. La arista v_6v_3, por tanto, debe pasar por dos regiones diferentes, obligando a que dicha arista corte a alguna otra arista y llegando a contradicción con la suposición de que G es plano. Finalmente, si $v_6 \in \text{ext } C_1$, por construcción se tiene que $v_1 \in \text{int } C_1$ y, por tanto, la arista v_6v_1 corta a C_1 por el Teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.1.1), llegando también a contradicción.

□

2.2. Grafos duales

Hasta ahora se ha podido observar que todo grafo plano G divide el plano en cierto número de regiones conectadas; de hecho, estas regiones son siempre el interior o exterior de algún ciclo del grafo. Las clausuras de estas regiones se llaman las *caras de* G. La Figura 2.7 muestra un grafo plano G con 6 caras, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 y f_6.

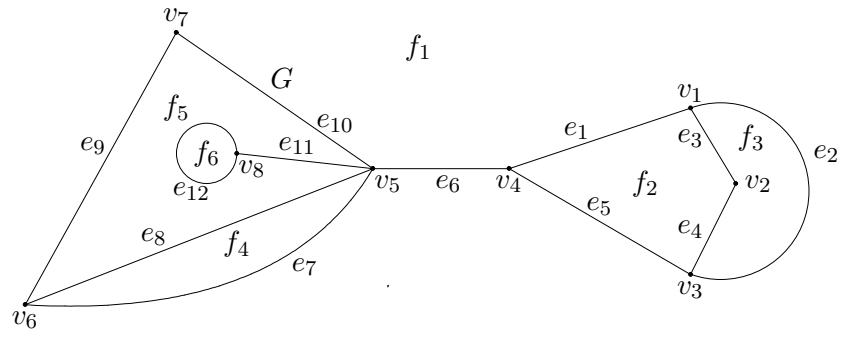


Figura 2.7: Ejemplo de caras de un grafo.

Se denota por $F(G)$ y $\phi(G)$ al *conjunto de caras* y al *número de caras*, respectivamente, de un grafo plano G. Todo grafo plano tiene exactamente una cara no acotada, que se llama la *cara exterior*. Por ejemplo, en la Figura 2.7 la cara exterior de G es f_1.

Se denota la *frontera* de una cara f de un grafo plano G por $b(f)$. Si G es conexo, entonces $b(f)$ se puede ver como un camino cerrado en el que se pasa dos veces por cada puente de G; cuando $b(f)$ no contiene puentes es un ciclo de G. Por ejemplo, en el grafo plano de la Figura 2.7 se tiene que $b(f_2) = v_1e_3v_2e_4v_3e_5v_4e_1v_1$ y $b(f_5) = v_7e_{10}v_5e_{11}v_8e_{12}v_8e_{11}v_5e_8v_6e_9v_7$. Se dice que una cara f es *incidente* en los vértices y aristas de su frontera. Si e es un puente en un grafo plano, solamente una cara es incidente en e; en caso contrario, existen dos caras incidentes en e. Se dice que una arista *separa* las caras incidentes en ella. El *grado de una cara* f en un grafo plano G, $d_G(f)$, es el número de aristas en las que ésta incide, esto es, el número de aristas en $b(f)$, donde los puentes se cuentan dos veces. Por ejemplo, en la Figura 2.7, $d_G(f_5) = 6$.

Dado un grafo plano G, se puede construir otro grafo G^* de la siguiente manera: sea un vértice f^* de G^* correspondiendo a cada cara f de G y sea e^* una arista de G^* correspondiendo a cada arista e de G; dos vértices f^* y g^* están unidos por la arista e^* en G^* si, y sólo si, sus correspondientes caras f y g estan separadas por la arista e en G. Se dice que G^* es el *grafo dual* de G.

Existe una manera natural de crear una representación de G^* en el plano, que consiste en colocar cada vértice f^* en el interior de la cara f de la representación planar de G y dibujar cada arista e^* de manera que se corte con la correspondiente arista e de G exactamente una vez y sin cortar ninguna otra arista de G. En las Figuras 2.8 y 2.9 se muestra un grafo y su dual, dibujado por el procedimiento natural aquí descrito.

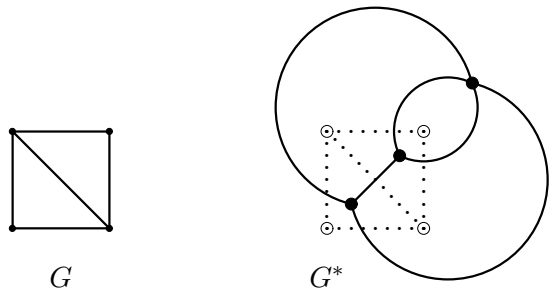


Figura 2.8: Ejemplo de un grafo y su dual.

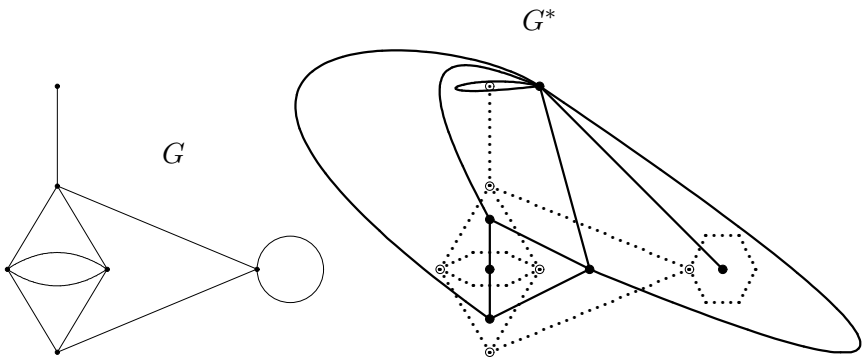


Figura 2.9: Ejemplo de un grafo y su dual.

Intuitivamente está claro que se puede dibujar siempre el dual de un grafo plano de esta manera. Es más, esto muestra que el dual de un grafo plano es planar: basta tomar esta representación planar natural. Notemos que si e es un lazo de G entonces e^* es un puente de G^* debido a que si e es un lazo, entonces e rodea a una cara f de G cuya frontera es e y, por tanto, f^* es un vértice que sólo es incidente en la arista e^* en G^*, hecho que implica que e^* es un puente en G^*.

Se debe observar que dos grafos planos isomorfos pueden tener duales no isomorfos. Por ejemplo, los grafos planos de la Figura 2.10 son isomorfos, pero sus duales no lo son, pues el grafo plano de (a) tiene una cara de grado 5 mientras que el de (b) no tiene tal cara. Por tanto, la noción de dual sólo tiene significado para grafos planos y no se puede extender para grafos planares en general.

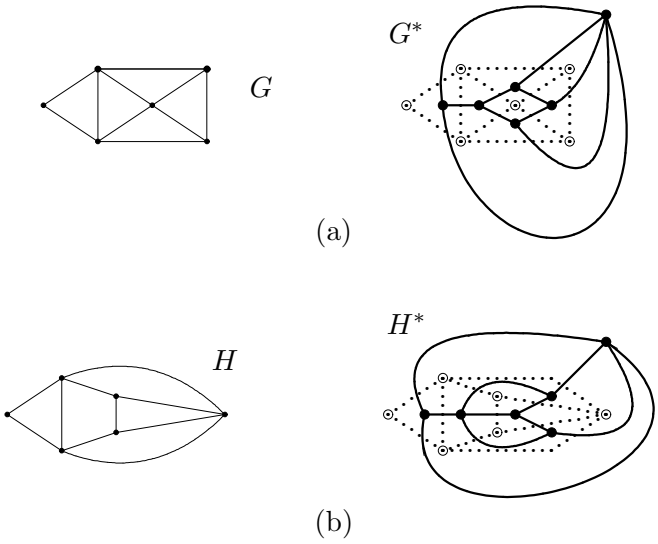


Figura 2.10: Ejempo de grafos planos isomorfos con duales no isomorfos.

Las siguientes relaciones son consecuencia directa de la definición de dual:

Observación 2.2.1 *Si G es un grafo plano con dual G^*, se cumple:*

- $\nu\,(G^*) = \phi\,(G)$
- $\alpha\,(G^*) = \alpha\,(G)$
- $g_{G^*}(f^*) = d_G(f)$

Teorema 2.2.2 *Si G es plano, entonces*

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2\alpha.$$

Demostración: Sea G^* el grafo dual de G. Entonces, por el Teorema de Euler (Teorema 1.2.1) y la Observación 2.2.1 se tiene que

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = \sum_{f^* \in V(G^*)} g(f^*) = 2\alpha(G^*) = 2\alpha(G),$$

como se quería demostrar. □

2.3. Fórmula de Euler

Existe una fórmula sencilla que relaciona el número de vértices, el número de aristas y el número de caras de un grafo plano conexo. Esta fórmula se conoce como *Fórmula de Euler* porque el matemático Leonhard Euler la descubrió para aquellos grafos planos definidos por los vértices y aristas de los poliedros y mostró que ésta se podía extender para grafos planos con una sola componente conexa.

Teorema 2.3.1 (Fórmula de Euler) *Si G es un grafo plano conexo, entonces*

$$\nu - \alpha + \phi = 2.$$

Demostración: Por inducción sobre ϕ. Si G tiene solamente una cara, es decir, $\phi = 1$, entonces toda arista de G es un puente y, como G es conexo, se tiene que G es un árbol (por la Proposición 1.7.3). Así, por la Proposición 1.7.2, $\alpha = \nu - 1$ y, por tanto,

$$\nu - \alpha + \phi = \nu - (\nu - 1) + 1 = 2.$$

Supongamos ahora que la fórmula es cierta para todos los grafos planos conexos con menos de n caras. Sea G un grafo plano conexo con $n \geq 2$ caras. Por el hecho de existir más de una cara se puede escoger una arista e de G que no sea puente. Entonces, $G - e$ es un grafo plano conexo y tiene $n - 1$ caras, ya que la dos caras de G separadas por e forman una sola cara en $G - e$. Por hipótesis de inducción,

$$\nu\,(G - e) - \alpha\,(G - e) + \phi\,(G - e) = 2$$

y usando que $\nu\,(G - e) = \nu(G)$, $\alpha\,(G - e) = \alpha(G) - 1$ y $\phi\,(G - e) = \phi(G) - 1$ se tiene que

$$\nu(G) - \alpha(G) + \phi(G) = \nu\,(G - e) - \alpha\,(G - e) - 1 + \phi\,(G - e) + 1 = 2,$$

demostrando así la fórmula de Euler. □

Corolario 2.3.2 *Si G es planar y simple con $\nu \geq 3$, entonces $\alpha \leq 3\nu - 6$.*

Demostración: Es suficiente demostrar este corolario para grafos conexos. Sea G un grafo simple conexo con $\nu \geq 3$. Como G es simple no permite ni aristas múltiples ni lazos, hecho que implica que $d(f) \geq 3\ \forall f \in F(G)$. Así,

$$\sum_{f \in F} d(f) \geq \sum_{f \in F} 3 = 3\phi.$$

Por el Teorema 2.2.2, se tiene que

$$2\alpha = \sum_{f \in F} d(f) \geq 3\phi$$

o, lo que es lo mismo, $\phi \leq \frac{2}{3}\alpha$ y por la Fórmula de Euler (Teorema 2.3.1),

$$2 = \nu - \alpha + \phi \leq \nu - \alpha + \frac{2}{3}\alpha$$

o, lo que es lo mismo, $\alpha \leq 3\nu - 6$ □

Corolario 2.3.3 *Si G es un grafo planar simple, entonces $\delta \leq 5$.*

Demostración: Sea G un grafo planar simple. Si $\nu = 1$, como G es simple se tiene que $\alpha = 0$ y, por tanto,

$$\delta = \min_{v \in V(G)} \{d(v)\} = \min\{0\} = 0 \leq 5.$$

Si $\nu = 2$, como G es simple se tiene que $\alpha \leq 1$ y, por tanto,

$$\delta = \min_{v \in V(G)} \{d(v)\} \leq \min\{1, 1\} = 1 \leq 5.$$

Si $\nu \leq 3$, por el Teorema de Euler (Teorema 1.2.1) y por el Corolario 2.3.2

$$\delta\nu \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\alpha \leq 6\nu - 12$$

y, por tanto, $\delta \leq 6 - \frac{12}{\nu} < 6$. □

No obstante haber demostrado ya la no planaridad de K_5 y $K_{3,3}$, es interesante ver cómo estos resultados son sencillos corolarios de la Fórmula de Euler:

Corolario 2.3.4 *K_5 no es planar.*

Demostración: Si K_5 fuera planar, entonces por el Corolario 2.3.2 se tendría que $\alpha(K_5) \leq 3\nu(K_5) - 6 = 9$. Como $\alpha(K_5) = \binom{5}{2} = 10$, se llega a contradicción. □

Corolario 2.3.5 *$K_{3,3}$ no es planar.*

Demostración: Si $K_{3,3}$ fuera planar, existiría una representación planar G de $K_{3,3}$ en el plano. Como $K_{3,3}$ no tiene ciclos de longitud menor que 4 por ser un grafo bipartito simple, cada cara de G debe tener al menos grado 4 porque la frontera de cada cara contiene, al menos, un ciclo. Así, por el Teorema 2.2.2, se tiene que

$$18 = 2\alpha = \sum_{f \in F} d(f) \geq \sum_{f \in F} 4 = 4\phi,$$

esto es, $\phi \leq 4 + \frac{2}{4}$. Como $\phi \in \mathbb{N}$, $\phi \leq 4$ y por la Fórmula de Euler (Teorema 2.3.1) $1 = 6 - 9 + 4 \geq \nu - \alpha + \phi = 2$, lo que es absurdo. □

Los grafos K_5 y $K_{3,3}$, también conocidos como los *grafos de Kuratowski*, tomarán especial relevancia al final de este capítulo, pues son los grafos básicos a partir de los cuales se pueden enunciar importantes resultados sobre planaridad.

2.4. Elevaciones

Ciertos subgrafos, llamados elevaciones, juegan un papel importante en el estudio de los grafos planares. Es por ello que se deben conocer al detalle las propiedades de estos subgrafos.

Sea H un subgrafo dado de un grafo G. Se define la relación $\sim$ en $E(G) - E(H)$ por la condición siguiente: para todo par de aristas $e_1, e_2 \in E(G) - E(H)$, $e_1 \sim e_2$ si existe un camino W tal que

(i) la primera y la última arista de W son e_1 y e_2, respectivamente.

(ii) no existe ningún vértice interior de W que sea vértice de H.

En palabras llanas, esta es la relación que identifica las aristas que se encuentran en la misma componente conexa en $G - E(H)$. La Figura 2.11 muestra la idea gráfica de este concepto: las clases de equivalencia en $E(G) - E(H)$ son

- $e_1 \sim e_2 \sim e_3 \sim e_4 \sim e_5 \sim e_6 \sim e_7 \sim e_8 \sim e_9$
- $e_{11} \sim e_{12} \sim e_{13} \sim e_{14}$
- e_{10},

donde H está dibujado con líneas continuas más finas y cada clase de equivalencia en $E(G) - E(G)$ está representada por un tipo diferente de línea.

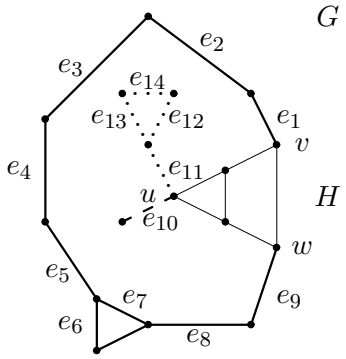


Figura 2.11: Clases de equivalencia en $E(G) - E(H)$.

Proposición 2.4.1 *$\sim$ es una relación de equivalencia en $E(G) - E(H)$.*

Demostración:

- **Propiedad reflexiva**:

  Para toda arista $e \in E(G) - E(H)$ se tiene que $e \sim e$, pues $W = e$ cumple trivialmente las propiedades I y II

- **Propiedad simétrica**:

  Sean $e_1, e_2 \in E(G) - E(H)$ tales que $e_1 \sim e_2$. Entonces, existe un camino W con primera arista e_1 y última arista e_2 que es internamente disjunto a H. Tomando el camino W' inverso de W se tiene que $e_2 \sim e_1$.

- **Propiedad transitiva**:

  Sean $e_1, e_2, e_3 \in E(G) - E(H)$ tales que $e_1 \sim e_2$ y $e_2 \sim e_3$. Entonces, existe un camino W_1 con primera arista e_1 y última arista e_2 que es internamente disjunto a H y existe un camino W_2 con primera arista e_2 y última arista e_3 que es internamente disjunto a H. Sea v el extremo de e_2 que es también final de W_1 y origen de W_2. Tomando $W = (W_1 \cup W_2) - \{e_2, v\}$ se obtiene un camino con primera arista e_1 y última arista e_3 que tiene como vértices internos a los vértices internos de W_1 y W_2, es decir, se tiene que $e_1 \sim e_3$.

Así, como $\sim$ cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva , se puede afirmar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $E(G) - E(H)$. $\square$

Sean G un grafo y H un subgrafo de G. Un subgrafo de $G - E(H)$ inducido por una clase de equivalencia bajo la relación $\sim$ antes definida se llama *elevación de H en G*. De la definición se sigue de manera directa que si B es una elevación de H entonces B es un grafo conexo y cualquier par de vértices u, v de B está conectado por un camino que es internamente disjunto a H (basta tomar un camino con primera arista incidente en u y con última arista incidente en v tal que no tenga vértices interiores en H; este camino existe por definición de la relación de equivalencia $\sim$).

De aquí se deduce fácilmente que dos elevaciones de un subgrafo dado H de un grafo G no tienen vértices en común excepto, quizás, vértices de H.

Sea G un grafo y H un subgrafo de G. Sea B una elevación de H en G. Los vértices que se encuentran tanto en G como en H se llaman *vértices de anexión de B en H* y se denotan por $V(B, H) = V(B) \cap V(H)$.

Retomando la Figura 2.11, hay tres elevaciones de H en G, indicadas con una línea continua gruesa, una línea discontinua y una línea punteada. Estas elevaciones tienen como vértices de anexión a $\{v, w\}$, $\{u\}$ y $\{u\}$ respectivamente.

De ahora en adelante en esta sección se tratará el estudio de las elevaciones de un ciclo C dado en un grafo determinado. Así, para evitar repeticiones innecesarias, se escribirá *elevación* cuando nos refiramos a una elevación de C. La Figura 2.12 muestra 5 elevaciones, representadas cada una con un tipo de línea diferente.

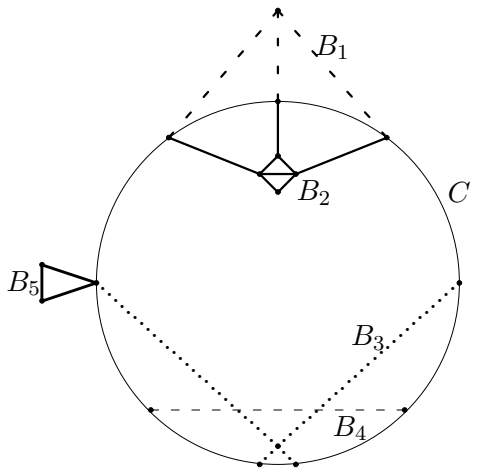


Figura 2.12: Ejemplos de elevaciones.

En un grafo conexo toda elevación tiene, al menos, un vértice de anexión. Se dice que una elevación con k vértices de anexión es una *k-elevación*. Dos k-elevaciones con los mismos vértices de anexión se llaman *k-elevaciones equivalentes*. Por ejemplo, en la Figura 2.12 B_1 y B_2 son 3-elevaciones equivalentes.

Los vértices de anexión de una k-elevación B con $k \geq 2$ delimitan una partición del ciclo C en caminos disjuntos llamados *segmentos de B*. Dos elevaciones *se evitan* la una a la otra si todos los vértices de anexión de una de las elevaciones se encuentran en un mismo segmento de la otra elevación; si esto no se cumple, se dice que las dos elevaciones *se solapan*. En la Figura 2.12 B_2 y B_3 se evitan la una a la otra mientras que B_4 y B_3 se solapan.

Dos elevaciones B y B' están *sesgadas* si existen 4 vértices diferentes u, v, u' y v' del ciclo C tales que u y v son vértices de anexión de B, u' y v' son vértices de anexión de B' y los 4 vértices aparecen en el orden cíclico u, u', v, v' en C. En la Figura 2.12 B_3 y B_4 están sesgadas y B_1 y B_2 no lo están.

Teorema 2.4.2 *Si dos elevaciones se solapan, entonces o bien están sesgadas o bien son 3-elevaciones equivalentes.*

Demostración: Sean B y B' dos elevaciones que se solapan. Por definición, como se solapan, cada una de ellas debe tener al menos dos vértices de anexión. Si B o B' es una 2-elevación entonces deben estar sesgadas, pues como se solapan no se evitan y, por tanto, los vértices de anexión de cada elevación están en segmentos diferentes respecto de la otra elevación. Si B y B' tienen al menos tres vértices de anexión existen dos posibles situaciones:

- B y B' no son elevaciones equivalentes. Entonces, B' tiene un vértice de anexión u' entre dos vértices de anexión consecutivos u y v de B. Como B y B' se solapan, algún vértice de anexión v' de B' no se encuentra en el segmento de B que conecta u y v. De aquí se sigue que B y B' están sesgadas.
- B y B' son k-elevaciones equivalentes con $k \geq 3$. Si $k = 3$, son 3-elevaciones equivalentes. Si $k \geq 4$, entonces B y B' están sesgadas porque existen vértices de anexión u, v, w y x de B y de B' que mantienen un orden cíclico de manera que el primero y el tercero son de B y el segundo y el cuarto son de B'.

Por tanto, B y B' están sesgadas o son 3-elevaciones equivalentes. □

Teorema 2.4.3 *Si una elevación B tiene 3 vértices de anexión v_1, v_2 y v_3 entonces existe un vértice v_0 en $V(B) - V(C)$ y tres caminos P_1, P_2 y P_3*

en B que unen v_0 a v_1, v_2 y v_3 respectivamente y tales que, para $i \neq j$, P_i y P_j tienen sólo el vértice v_0 en común (ver Figura 2.13).

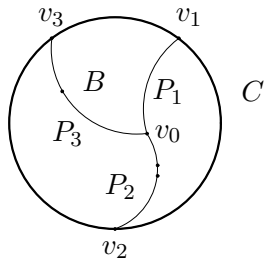


Figura 2.13: Representación gráfica para el Teorema 2.4.3.

Demostración: Sea P un camino de v_1 a v_2 en B internamente disjunto a C. P debe tener un vértice interno v porque si no fuera así entonces la elevación B sería simplemente P i no contendría un tercer vértice v_3. Sea Q un camino de v_3 a v en B, internamente disjunto a C, y sea v_0 el primer vértice de Q en P. Denotaremos por P_1 a la sección del camino P entre v_0 y v_1, por P_2 a la sección del camino P entre v_0 y v_2 y por P_3 a la sección del camino Q entre v_0 y v_3. Claramente, P_1, P_2 y P_3 satisfacen las condiciones requeridas y $v_0 \in V(B) - V(C)$. □

Para ajustarnos al problema de la planaridad, a partir de ahora se considerarán sólo elevaciones en grafos planos. Sea G un grafo plano y C un ciclo en G. Entonces, C es una curva de Jordan en el plano y toda arista $E(G) - E(C)$ está contenida en una de las dos regiones siguientes: Int C o Ext C. Una elevación contenida en Int C se llama *elevación interna* y una elevación contenida en Ext C se llama *elevación externa*. No existen otros tipos de elevaciones en un grafo plano porque no existen aristas que se corten y, por tanto, ninguna arista puede cortar al ciclo C. En la Figura 2.14 B_1 y B_2 son elevaciones internas y B_3 y B_4 son elevaciones externas:

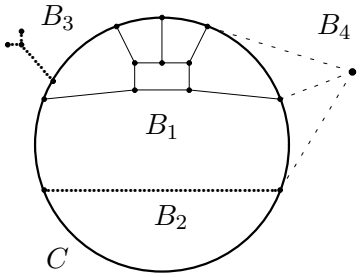


Figura 2.14: Elevaciones internas y externas en un grafo plano.

Teorema 2.4.4 *Las elevaciones internas (externas) se evitan entre sí.*

Demostración: Por contradicción. Sean B y B' dos elevaciones internas que se solapan. Entonces, por el Teorema 2.4.2, o bien están sesgadas o bien son 3-elevaciones equivalentes.

- Si B y B' están sesgadas, por definición existen vértices u y v de B y u' y v' de B' que aparecen en el orden cíclico u, u', v, v' en C. Sea P un camino de u a v en B y P' un camino de u' a v' en B', los dos internamente disjuntos a C. Los dos caminos P y P' no pueden tener ningún vértice interior en común porque pertenecen a elevaciones diferentes. A su vez, tanto P como P' deben estar contenidos en Int C porque B y B' son elevaciones internas. Como P divide Int C en dos regiones, Int C_1 y Int C_2, donde C_1 es un ciclo que contiene a u, v y u' y C_2 es un ciclo que contiene a u, v y v', se tiene por el Teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.1.1) que P' debe cortar a P en alguna arista, pues P' va de u' a v' y P y P' no comparten vértices. Así, G no puede ser un grafo plano, en contradicción con la hipótesis (ver Figura 2.15).

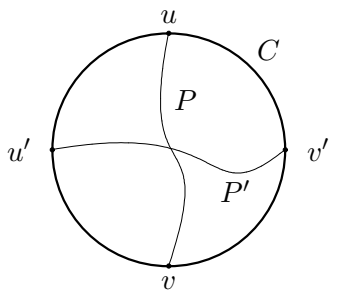


Figura 2.15: Si B y B' están sesgadas.

- Si B y B' son 3-elevaciones equivalentes, sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ el conjunto de vértices de anexión que tienen en común. Por el Teorema 2.4.3 existe en B un vértice v_0 y tres caminos P_1, P_2 y P_3 que unen v_0 a v_1, v_2 y v_3 respectivamente y tales que, para $i \neq j$, P_i y P_j sólo tienen el vértice v_0 en común. Análogamente, B' tiene un vértice v'_0 y tres caminos P'_1, P'_2 y P'_3 que unen v'_0 a v_1, v_2 y v_3 respectivamente y tales que, para $i \neq j$, P'_i y P'_j sólo tienen el vértice v'_0 en común. Los caminos P_1, P_2 y P_3 dividen Int C en tres regiones y v'_0, por construcción, debe estar en el interior de una de ellas. Como sólo dos de los vértices v_1, v_2 y v_3 pueden estar en la frontera de la región que contiene a v'_0 se puede suponer, por simetría, que es v_3 el vértice que no se encuentra en ella. Por el Teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.1.1), el

camino P_3' debe cortar a P_1, a P_2 o a C. Como B y B' son elevaciones internas distintas, P_3' no comparte ningún vértice con ninguno de ellos y, por tanto, debe cortarlos en alguna arista, hecho que nos lleva a contradicción (ver Figura 2.16).

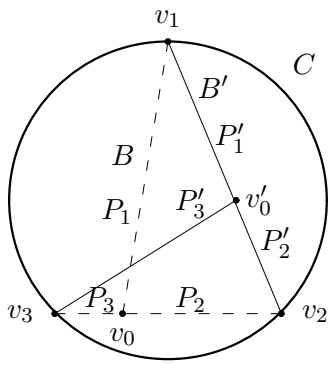


Figura 2.16: Si B (en líneas discontinuas) y B' son 3-elevaciones equivalentes.

Se concluye así que las elevaciones internas se evitan unas a otras. La demostración para elevaciones externas se hace análogamente. □

Sea G un grafo plano. Una elevación interna (externa) B de un ciclo C de G es *transferible* si existe una representación planar $\tilde{G}$ de G que sea idéntica al propio G excepto por el hecho de que B es una elevación externa (interna) de C en $\tilde{G}$. Se dice que el grafo plano plano $\tilde{G}$ se obtiene *transfiriendo B en G*. La Figura 2.17 muestra una transferencia de una elevación B en G:

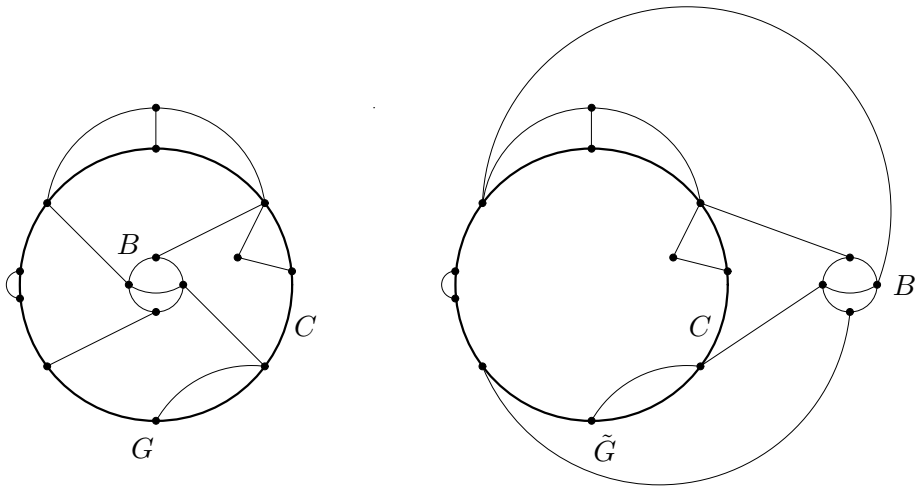


Figura 2.17: $\tilde{G}$ es el resultado de la transferencia de B en G.

Teorema 2.4.5 *Una elevación interna (externa) que evita a toda elevación externa (interna) es transferible.*

Demostración: Sea B una elevación interna que evita a toda elevación externa. Entonces, los vértices de anexión de B en C se encuentran todos en un mismo segmento de todas las otras elevaciones internas. Tomando la intersección de todos los segmentos de estas elevaciones que contengan algún vértice de B se comprueba fácilmente que está contenida en la frontera de alguna cara de G contenida en Ext C. Ahora B se puede dibujar en esa cara, tal como se muestra en la Figura 2.17. La demostración es análoga para elevaciones externas. □

Como se verá más adelante, este último teorema es crucial para la demostración de un resultado muy importante de planaridad: el Teorema de Kuratowski, que se demostrará en la Sección 2.6.

2.5. Subdivisiones y conjuntos cortantes

Esta sección está totalmente encaminada a adquirir técnicas y notaciones para demostrar el Teorema de Kuratowski, teorema que determina cuáles son los grafos planares.

Se necesita, para ello, considerar una manera alternativa a la que conocemos de eliminar vértices de un grafo y, además, se necesita considerar una manera de añadir nuevos vértices en una arista.

Para diferenciar la nueva técnica de eliminación de vértices de la que ya conocemos, a esta nueva técnica la llamaremos supresión y deberemos tener en cuenta que sólo se pueden suprimir vértices de grado 2.

Sea v un vértice de grado 2 de un grafo G con aristas incidentes $e = uv$ y $f = vw$, donde u y w son los otros extremos de dichas aristas. La *supresión del vértice* v consiste en obtener un grafo G' a partir de G añadiendo la arista uw y eliminando el vértice v.

Sea ahora e una arista de un grafo G con extremos u y v. Una *adición de un vértice* de grado 2 (en e) consiste en crear un nuevo vértice w no presente en G, añadir las aristas uw y vw y eliminar la arista $e = uv$. En la Figura 2.18 se puede ver la supresión del vértice v (a) y la adición de un vértice w (b) al grafo G.

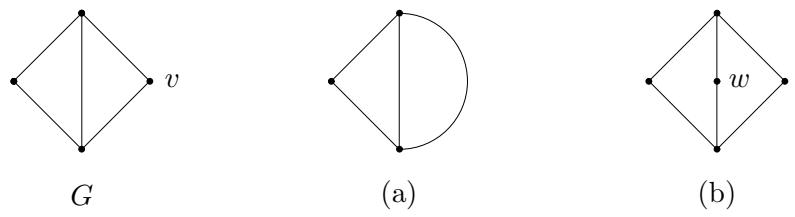


Figura 2.18: Ejemplo de supresión y adición de vértices de grado 2.

Observación 2.5.1 *Si $\tilde{G}$ es el resultado de añadir un vértice de grado 2 a G y $\bar{G}$ es el resultado de suprimir un vértice de G, por consecuencia directa de la definición se tiene que:*

- $\alpha(\tilde{G}) = \alpha(G) + 1, \quad \nu(\tilde{G}) = \nu(G) + 1 \quad y \quad \phi(\tilde{G}) = \phi(G).$
- $\alpha(\bar{G}) = \alpha(G) - 1, \quad \nu(\bar{G}) = \nu(G) - 1 \quad y \quad \phi(\bar{G}) = \phi(G).$

Se dice que un grafo es una *subdivisión* de otro grafo si ambos son isomorfos después de posibles adiciones o supresiones de algunos vértices de grado 2. Por ejemplo, en la Figura 2.19 H es una subdivisión de G (H_1 es el resultado de suprimir u de H, H_2 es el resultado de suprimir v de H_1 y H_3, que es isomorfo a G, es el resultado de añadir w a H_2).

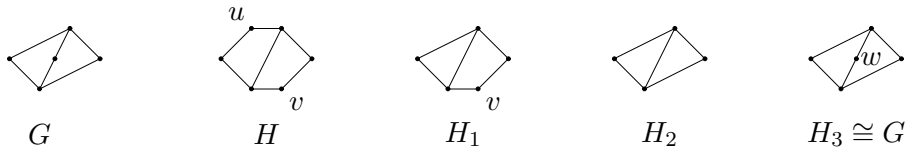


Figura 2.19: H es una subdivisión de G.

Los siguientes resultados son lemas sencillos e intuitivos que muestran que la planaridad es invariante respecto subdivisiones.

Lema 2.5.2 *Si G es planar entonces todo subgrafo de G es planar.*

Demostración: Sea G un grafo planar con representación planar φ y H un subgrafo de G. Basta tomar la representación planar φ restringida a los vértices y aristas de H como representación planar de H. □

Lema 2.5.3 *Si G es no planar entonces toda subdivisión de G es no planar.*

Demostración: Sea G un grafo no planar. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que G es conexo. Sea $\tilde{G}$ una subdivisión planar de G.

- Si $\tilde{G}$ es el resultado de añadir un vértice v de grado 2 a alguna arista $e \in E(G)$, como $\tilde{G}$ es planar existe una representación planar de $\tilde{G}$ y, por el Lema 2.5.2, $\tilde{G} - v$ también tiene una representación planar. $\tilde{G} - v$ es un subgrafo de G y, más precisamente, si e_1 y e_2 son las aristas incidentes en v en $\tilde{G}$, se tiene que

$$\tilde{G} - v = \tilde{G} - \{v, e_1, e_2\} = G - e,$$

  hecho que muestra que $G - e$ tiene también una representación planar. Por hipótesis G no tiene ninguna representación planar y, por tanto, la arista e debe cortar a alguna otra arista de G, llegando a contradicción porque si e cortara a otra arista de G entonces, por construcción, o bien e_1 o bien e_2 cortaría a alguna otra arista en el grafo planar $\tilde{G}$.

- Si $\tilde{G}$ es el resultado de suprimir un vértice v de grado 2 de G y llamamos e a la arista que se añade a $G - v$ para obtener $\tilde{G}$, como $\tilde{G}$ es planar tiene una representación planar y, por el Lema 2.5.2, $\tilde{G} - e$ también tiene una representación planar. Ahora bien, $\tilde{G} - e$ es un subgrafo de G. Más precisamente, $\tilde{G} - e = G - v$, hecho que muestra que $G - v$ también tiene una representación planar. Por hipótesis G no tiene ninguna representación planar y, por tanto, una de las dos aristas incidentes en v en G (lamémoslas e_1 y e_2) debe cortar a alguna otra arista de G excepto a la otra incidente en v (porque si se cortaran entre sí dicho corte se podría evitar, como muestra la Figura 2.20). Esto es una contradicción, pues si e_1 o e_2 corta a otra arista de G entonces, por construcción, e debe cortar a otra arista en $\tilde{G}$ y $\tilde{G}$ es planar.

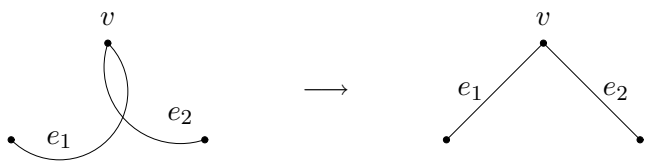


Figura 2.20: El corte entre las aristas e_1 y e_2 se puede evitar.

- Si $\tilde{G}$ es el resultado de sucesivas adiciones y/o supresiones de vértices de grado 2, basta aplicar los dos apartados anteriores.

Se ha visto, pues, que no existe ninguna subdivisión planar de un grafo no planar. □

Observación 2.5.4 *Como K_5 y $K_{3,3}$ son grafos no planares, se deduce a partir de estos dos lemas que si G es planar entonces G no puede contener una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$.*

De ahora en adelante en esta sección se supondrá, a no ser que se indique lo contrario, que todos los grafos con los que se trata son conexos, pues este aspecto no afecta en absoluto a su planaridad.

Se dice que un *conjunto cortante* de G es un subconjunto V' de $V(G)$ tal que $G - V'$ es desconexo. Un *k-conjunto cortante* es un conjunto cortante de k elementos. Por ejemplo, en la Figura 2.21 G_1 tiene a $\{v\}$ como conjunto cortante y G_2 tiene a $\{u, v\}$ como 2-conjunto cortante. Cualquier grafo completo no tiene ningún conjunto cortante.

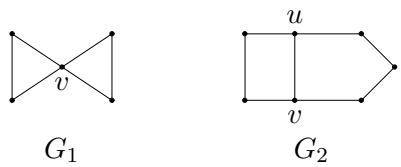


Figura 2.21: Ejemplos de conjuntos cortantes.

Sea G un grafo con un 2-conjunto cortante $\{u, v\}$. Entonces, existen dos subgrafos G_1 y G_2 de G con conjuntos disjuntos de aristas tales que $G_1 \cup G_2 = G$ y $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u, v\}$. Consideraremos tal separación en subgrafos de G. Consideraremos también la siguiente construcción: tanto en G_1 como en G_2 se unen los vértices u y v con una nueva arista e para obtener los grafos H_1 y H_2 respectivamente, como se indica en la Figura 2.22:

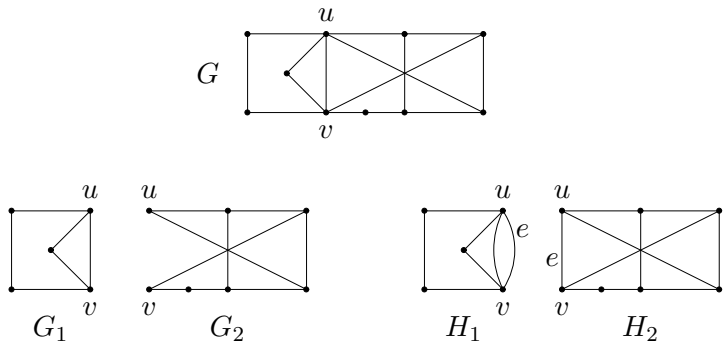


Figura 2.22: Ejemplo de construcción de los grafos H_1 y H_2 a partir de G_1 y G_2.

Claramente, $G = (H_1 \cup H_2) - e$ y $\alpha(H_i) < \alpha(G)$ para $i = 1, 2$.

Lema 2.5.5 *Si G es no planar, entonces H_1 o H_2 es no planar.*

Demostración: Por contradicción. Sea G no planar y supongamos que ni

H_1 ni H_2 son planares. Sea $\tilde{H}_1$ una representación planar de H_1 y sea f una cara de $\tilde{H}_1$ incidente en e. Si $\tilde{H}_2$ es una representación planar de H_2 en la cara f de manera que $\tilde{H}_1$ y $\tilde{H}_2$ tengan sólo los vértices u y v y la arista e en común, entonces $(\tilde{H}_1 \cup \tilde{H}_2) - e$ es una representación planar de G, llegando a contradicción. □

Sea G un grafo. Si G tiene al menos un par de vértices distintos no adyacentes, la *conectividad* de G, representada por $\kappa(G)$, es el mínimo k para el que G tiene un k-conjunto cortante; si no tiene ninguno, se dice que $\kappa(G) = \nu - 1$. Así, $\kappa(G) = 0$ si G es trivial o no conexo.

Se dice que G es *k-conexo* si $\kappa(G) \geq k$. Por ejemplo, todos los grafos conexos no triviales son 1-conexos. En la Figura 2.15 G_1 es 1-conexo y G_2 es 2-conexo y 1-conexo.

Se llama *bloque* a un grafo conexo que no tiene 1-conjuntos cortantes. Todo bloque con al menos 3 vértices es 2-conexo. Un *bloque de un grafo* es un subgrafo que es un bloque y que es maximal con su propiedad. Además, todo grafo es la unión de sus bloques, como se ilustra en la Figura 2.23 (los grafos en (b) representan los bloques del grafo G en (a)):

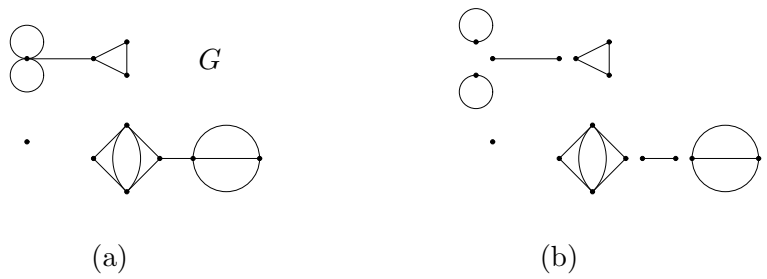


Figura 2.23: Un grafo (a) y sus bloques (b).

Teorema 2.5.6 *Un grafo G con $\nu \geq 3$ es 2-conexo si, y sólo si, cualquier par de vértices de G está conectado por al menos dos caminos internamente disjuntos.*

Demostración: Si dos vértices cualesquiera de G están conectados por al menos dos caminos internamente disjuntos entonces G es conexo y no tiene ningún 1-conjunto cortante. Por tanto, G es 2-conexo.

Recíprocamente, sea G un grafo 2-conexo. Demostraremos, por inducción sobre la distancia entre ellos, que dos vértices cualesquiera u y v están conectados por, al menos, dos caminos internamente disjuntos. Supongamos primero que $d(u, v) = 1$. Entonces, como G es 2-conexo, la arista uv no es un puente y, por la Proposición 1.4.2, está contenida en un ciclo. Se sigue

que u y v están conectados por dos caminos internamente disjuntos en G. Supongamos ahora que el teorema es cierto para cualquier par de vértices a distancia menor que k el uno del otro y que $d(u, v) = k \geq 2$. Consideramos un camino de u a v de longitud k y sea w el vértice que precede a v en este camino. Como $d(u, w) = k - 1$, por la hipótesis de inducción existen dos caminos de u a w internamente disjuntos, P y Q, en G. Además, como G es 2-conexo, $G - w$ es conexo y, por tanto, contiene un camino P' de u a v. Sea x el vértice final de P' que también está en $P \cup Q$ (ver Figura 2.24).

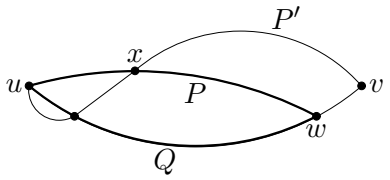


Figura 2.24: Ejemplo de los caminos P, Q y P' en G.

Como u está en $P \cup Q$ podemos asegurar que existe tal x, sin excluir la posibilidad de que x sea v. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que x está en P. Entonces, G tiene dos caminos internamente disjuntos de u a v, uno compuesto por la sección de camino de P de u a x junto con la sección de camino de P' de x a v y el otro compuesto por el camino Q junto con la arista wv. □

Corolario 2.5.7 *Si G es 2-conexo, entonces cualquier par de vértices de G se encuentra en el mismo ciclo.*

Demostración: Como dos vértices están en el mismo ciclo si, y sólo si, están conectados por dos caminos internamente disjuntos, este corolario se sigue del teorema anterior (Teorema 2.5.6). □

Lema 2.5.8 *Sea G un grafo conexo no planar que no contenga ninguna subdivisión de K_5 ni de $K_{3,3}$ y tal que tenga el menor número posible de aristas. Entonces, G es simple y 3-conexo.*

Demostración: Por contradicción. Sea G un grafo conexo no planar que no contenga ninguna subdivisión de K_5 ni de $K_{3,3}$ y con tan pocas aristas como sea posible. Entonces, G es un grafo no planar minimal y, en consecuencia, debe ser un bloque simple, pues si tuviera un 1-conjunto cortante se podría prescindir de alguna de las aristas incidentes en el vértice de ese conjunto y si tuviera aristas múltiples o lazos también se podría prescindir de alguna de ellas y de todos los lazos, obteniendo así un grafo no planar con menor número de aristas y entrando en contradicción con la hipótesis.

Si G no es 3-conexo, sea $\{u, v\}$ un 2-conjunto cortante de G y sean H_1 y H_2 los grafos obtenidos a partir de este conjunto cortante tal como se ha explicado en la construcción precedente. Por el Lema 2.5.5 o H_1 o H_2 es no planar. Podemos suponer que es H_1. Como $\alpha(H_1) < \alpha(G)$, H_1 debe contener un subgrafo K que sea una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ debido al hecho de que G, por hipótesis, es minimal respecto a la propiedad de no contener tal subdivisión. Como consecuencia de esto, K no puede ser subgrafo de G porque G no contiene tal subdivisión y, por tanto, la arista e está en K. Consideremos un camino P de u a v en $H_2 - e$: se tiene que G contiene al subgrafo $(K \cup P) - e$, que es una subdivisión de K y, en consecuencia, es una subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$, lo que es una conrtradicción. □

Como se observará más adelante, las hipótesis de este lema no se cumplen nunca. Sin embargo, es un resultado crucial para la demostración del Teorema de Kuratowski.

2.6. Teorema de Kuratowski

Como la planaridad es una propiedad fundamental en el estudio de los grafos, es muy importante poder determinar de una manera relativamente sencilla si un grafo es planar o no lo es. Hemos visto ya que K_5 y $K_{3,3}$ no son planares y que si un grafo G es planar entonces G no puede contener una subdivisión de ninguno de estos dos grafos. Kuratowski demostró en 1930 que esta condición necesaria también es suficiente.

Para demostrar el Teorema de Kuratowski adoptaremos la siguiente notación: supongamos que C es un ciclo en un grafo plano. C se puede recorrer en un sentido o en otro. A estas dos posibles orientaciones las llamaremos *horaria* y *antihoraria* siguiendo el criterio de las agujas de un reloj. Para dos vértices cualesquiera u y v de G se denotará por $C[u, v]$ el camino de u a v que sigues la orientación horaria de C; de manera similar se usarán los símbolos $C(u, v]$, $C[u, v)$ y $C(u, v)$ para denotar los caminos $C[u, v] - u$, $C[u, v] - v$ y $C[u, v] - \{u, v\}$ respectivamente. La demostración del Teorema de Kuratowski que sigue a continuación se basa en la de Dirac y Schuster (1954) [22].

Teorema 2.6.1 (Teorema de Kuratowski) *Un grafo es planar si, y sólo si, no contiene ninguna subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$.*

Demostración: Ya se ha visto que la necesidad es cierta (Observación 2.5.4).

El recíproco se demuestra por contradicción. Se escoge, si es posible, un grafo no planar G que no contenga ninguna subdivisión de K_5 o de $K_{3,3}$ y

con el menor número de aristas posible. Por el Lema 2.5.8, G es simple y 3-conexo. Además, G debe ser un grafo no planar minimal de acuerdo con el argumento dado en la demostración de dicho lema.

Sea uv una arista de G y sea H una representación planar del grafo planar $G - uv$. Dicha representación planar existe porque se ha escogido G no planar con el menor número de aristas posible y, por tanto, al quitar una sola arista G deja de ser no planar. Como G es 3-conexo, se tiene que $\kappa(G) \geq 3$. En particular, al eliminar una arista de G se está quitando, como mucho, un grado de conectividad, pues si G tenía un 3-conjunto cortante y este era el mínimo conjunto cortante de G entonces $G - uv$ tiene al menos un 2-conjunto cortante y este es el mínimo conjunto cortante de $G - uv$. Así, $\kappa(G - uv) \geq 2$, indicando que la representación planar H de $G - uv$ cumple $\kappa(H) \geq 2$ y, por tanto, H es 2-conexo.

Por el Corolario 2.5.7, u y v están contenidos en un mismo ciclo de H. Escogemos un ciclo C de H que contenga a u y a v y tal que el número de aristas de Int C sea lo más grande posible. Como H es simple y 2-conexo, toda elevación de C en H debe tener al menos dos vértices de anexión; si solamente tuviera uno, este vértice sería un 1-conjunto cortante, en contradicción con el hecho de que H es 2-conexo. Todas las elevaciones externas a C deben ser 2-elevaciones que se solapan con uv porque si alguna elevación externa a C fuera una k-elevación para $k \geq 3$ o una 2-elevación que evitara a uv, entonces existiría un ciclo C' que contendría a u y a v con más aristas en la clausura de su interior que C, contradiciendo así la elección de este último. Estos dos casos se ilustran en la Figura 2.25 (con C' representado por líneas más gruesas).

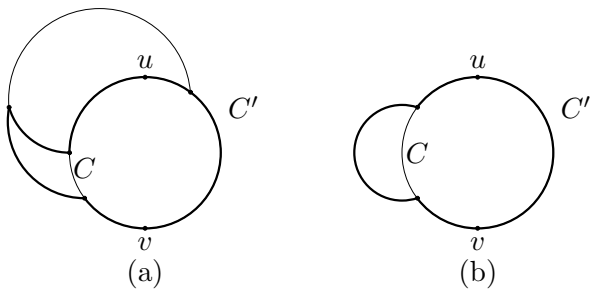


Figura 2.25: Si existiera una 3-elevación externa (a) o una 2-elevación que evita a uv (b).

De hecho, todas las elevaciones externas a C en H deben ser aristas solas, pues si una 2-elevación con vértices de anexión x e y tuviera un tercer vértice, el conjunto $\{x, y\}$ sería un 2-conjunto cortante de G, contradiciendo el hecho de que G es 3-conexo.

Por el Teorema 2.4.4, no existen dos elevaciones internas que se solapen. Así, debe existir alguna elevación interna sesgada con uv que se solape con alguna elevación externa. Si no fuera así, por el Teorema 2.4.5 tales elevaciones podrían ser transferidas una a una al exterior y entonces la arista uv se podría dibujar en Int C, obteniendo una representación planar de G; como G es no planar, esto no es posible. Por tanto, existe una elevación interna B que está sesgada tanto con uv como con alguna elevación externa xy. A partir de este punto se deben distinguir dos casos, dependiendo de se B tiene algún vértice de anexión diferente de u, v, x e y o no.

- B tiene un vértice de anexión distinto a u, v, x e y. Podemos escoger la notación de manera que B tenga un vétice de anexión v_1 en $C(x, u)$. Existen dos posibles subcasos:

  - B tiene un vértice de anexión v_2 en $C(y, v)$. En este caso, existe un camino de v_1 a v_2 en P que es internamente disjunto a C. Pero entonces $(C \cup P) + \{uv, xy\}$ es una subdivisión de $K_{3,3}$ en G, llegando a contradicción (ver Figura 2.26).

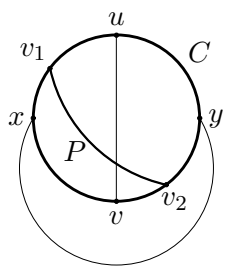


Figura 2.26: Si B tiene un vértice de anexión v_2 en $C(y, v)$.

  - B no tiene ningún vértice de anexión en $C(y, v)$. Como B está sesgado con uv y con xy, B debe tener un vértice de anexión v_2 en $C(u, y]$ y un vértice de anexión v_3 en $C[v, x)$. Así, B tiene tres vértices de anexión v_1, v_2 y v_3. Por el Teorema 2.4.3, existe un vértice v_0 en $V(B) - V(C)$ y tres caminos P_1, P_2 y P_3 en B que unen v_0 a v_1, v_2 y v_3 respectivamente, tales que para $i \neq j$, P_i y P_j tienen sólo el vértice v_0 en común. Ahora, $(C \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3) + \{uv, xy\}$ contiene una subdivisión de $K_{3,3}$, llegando a contradicción. Este caso está ilustrado en la Figura 2.27, donde la subdivisión de $K_{3,3}$ está marcada con líneas más gruesas en (a) y se da una reordenación gráfica de esta subdivisión de $K_{3,3}$ en (b):

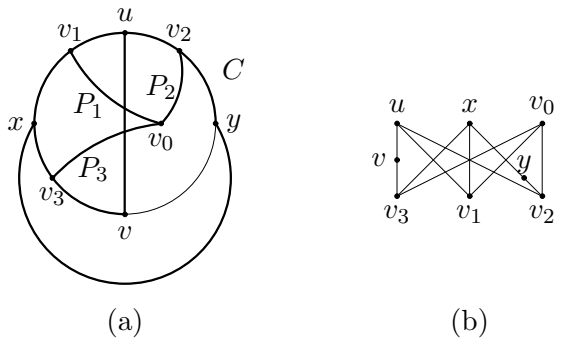


Figura 2.27: Si B no tiene ningún vértice de anexión en $C(y, v)$.

- B no tiene más vértices de anexión que u, v, x e y. Como B está sesgado con uv y con xy, se sigue que u, v, x e y deben ser todos vétices de anexión de B. Por el Teorema 2.4.3, existe un vértice v_0 en $V(B) - V(C)$ y tres caminos P_u, P_v y P_x de v_0 a u, v y x respectivamente tales que, para $i \neq j$, P_i y P_j tienen sólo el vértice v_0 en común. Análogamente, existe un vértice v_1 en $V(B) - V(C)$ y tres caminos Q_y, Q_v y Q_x de v_1 a y, v y x respectivamente tales que, para $i \neq j$, Q_i y Q_j tienen sólo el vértice v_1 en común. Ahora bien, v_1 pertenece a una de las tres regiones de Int C delimitadas por P_u, P_v y P_x. Se puede suponer, sin pédida de generalidad, que y no está en la frontera de esa región y, por el Teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.1.1), el camino Q_y debe cortar a P_x, a P_u o a P_v. Como habíamos supuesto que G es planar con el menor número de aristas posible, no puede existir un corte entre aristas donde ninguna de ellas dos sea la arista uv y, así, el corte entre estos dos caminos debe tener lugar en un vértice de B, llamémosle v_2 (ver Figura 2.28). Cogiendo $P = P_u \cup P_v$ y $Q = Q_y \cup Q_x$, se tiene que P y Q son internamente disjuntos a C y que $v_2 \in V(P) \cap V(Q)$, hecho que implica que $|V(P) \cap V(Q)| \geq 1$.

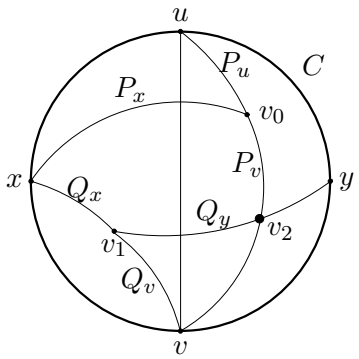


Figura 2.28: Representación gráfica del caso que se estudia en este párrafo.

Así, en resumiendo estos últimos pasos, se ha visto que existe un camino P de u a v y Q un camino de x a y en B tales que:

(I) P y Q son internamente disjuntos a C

(II) $|V(P) \cap V(Q)| \geq 1$.

Consideramos dos subcasos, dependiendo de si P y Q tienen uno o más vértices en común.

- $|V(P) \cap V(Q)| = 1$. En este caso, $(C \cup P \cup Q) + \{uv, xy\}$ es una subdivisión de K_5 en G, una contradicción (ver Figura 2.29).

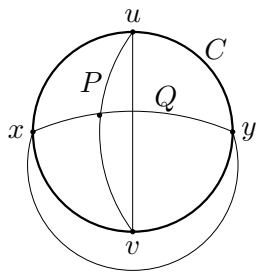
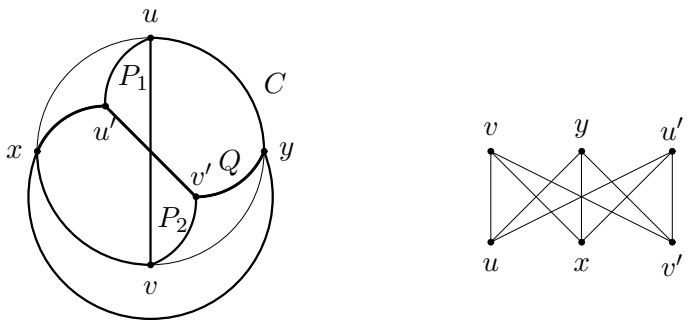


Figura 2.29: Si $|V(P) \cap V(Q)| = 1$.

- $|V(P) \cap V(Q)| \geq 2$. Sean u' y v' el primero y el último vértice de P en Q, y sean P_1 y P_2 las secciones de camino de u a u' y de v a v' en P, respectivamente. Entonces, $(C \cup P_1 \cup P_2 \cup Q) + \{uv, xy\}$ contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ en G, hecho que es una contradicción (ver Figura 2.30, donde la subdivisión de $K_{3,3}$ está marcada con líneas más gruesas en (a) y se da una reordenación gráfica de esta subdivisión de $K_{3,3}$ en (b)).

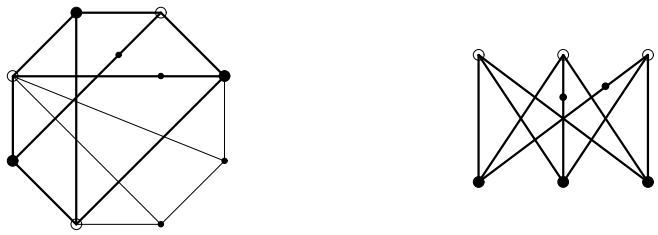


(a) (b)

Figura 2.30: Si $|V(P) \cap V(Q)| \geq 2$.

Así, todos los posibles casos llevan a contradicción, acabando la demostración del Teorema de Kuratowski. □

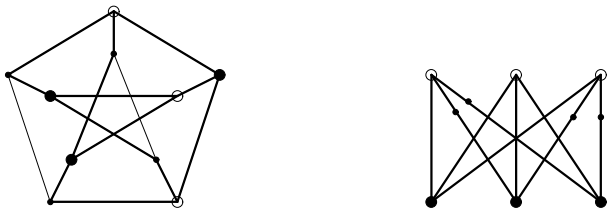
Confirmar que un grafo es planar es relativamente fácil: basta con poder dibujar una representación planar de éste. Confirmar que no lo es, sin embargo, es una tarea muy complicada si no se usa este teorema: con él tenemos una potente herramienta para determinar la ausencia de planaridad en cualquier grafo. Por ejemplo, el grafo de la Figura 2.31 (a) es no planar, pues se puede encontrar una subdivisión de $K_{3,3}$ en él (b):



(a) (b)

Figura 2.31: Ejemplo de grafo no planar.

Otro ejemplo muestra que el grafo de Petersen de 5 puntas, representado en la Figura 2.32 (a), es no planar, pues en (b) se muestra una subdivisión de $K_{3,3}$ en él.



(a) (b)

Figura 2.32: El grafo de Petersen de 5 puntas es no planar.

Se puede decir que el Teorema de Kuratowski resuelve en gran parte el problema de la planaridad.

Capítulo 3

Números de corte

En el momento de dar una representación de un grafo en el plano, la tendencia natural es querer dar un dibujo del mismo con el menor número posible de cortes entre aristas, ya sea por estética o por necesidad.

Este problema se conoce como el *problema del número de corte* y fue el matemático Paul Turán quien dio por primera vez un planteamiento formal de un problema derivado del mismo en el año 1954. Turán se vio obligado a hacer trabajos forzados durante la Segunda Guerra Mundial. Según sus propias palabras, el problema nació de una necesidad:

> "Había algunas casetas donde se fabricaban ladrillos y algunos almacenes donde éstos se guardaban. Todas las casetas estaban conectadas por raíles con todos los almacenes (...) el único problema estaba en los cruces entre raíles. Los camiones generalmente saltaban los raíles en estos cruces y los ladrillos caían de los camiones: eso creaba problemas y pérdidas de tiempo (...). Se me ocurrió que estos inconvenientes se podrían mejorar si se minimizaba el número de cruces entre raíles. Pero, ¿cuál es el menor número de cruces?"

A este planteamiento del problema para grafos bipartitos completos se le llama el *Problema de la Fábrica de Ladrillos de Turán*. Así, con este problema práctico nació, a su vez, el problema del número de corte para el grafo en general.

3.1. Dibujos y número de corte de un grafo

Un *dibujo* de un grafo es su representación gráfica en el plano. Un *buen dibujo* de un grafo es un dibujo del mismo en el que dos aristas incidentes en

un mismo vértice no se cortan nunca y dos aristas cualesquiera no se cortan entre ellas más de una vez.

La razón para definir un buen dibujo de esta manera es la siguiente: si dos aristas incidentes en un mismo vértice se cortaran, entonces este corte se podría evitar sin cambiar el dibujo del resto del grafo (ver Figura 3.1) y si dos aristas cualesquiera se cortaran dos veces o más, se podría evitar un número par de cortes entre ellas sin cambiar el dibujo del resto del grafo (ver Figura 3.2). En ambas figuras antes mencionadas se muestra un dibujo del grafo en (a) y un buen dibujo del mismo en (b), donde la parte sombreada representa el resto del grafo.

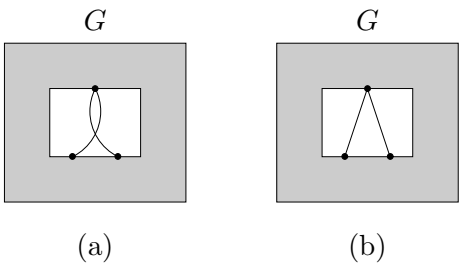


Figura 3.1: Ejemplo de corte que se puede evitar.

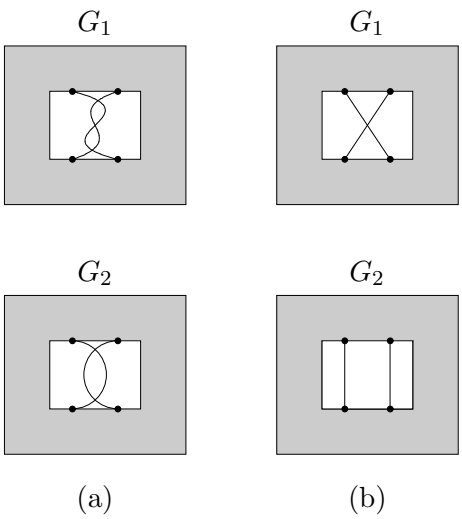


Figura 3.2: Ejemplo de cortes que se pueden evitar.

Un *dibujo óptimo* de un grafo es un dibujo que muestra el menor número posible de cortes entre las aristas del grafo. En particular, un dibujo óptimo es un buen dibujo.

Se dice que el *número de corte* de un grafo G, denotado por $cr(G)$, es el mínimo número de cortes entre aristas de todos los posibles dibujos de G. En consecuencia, si un dibujo de G muestra $cr(G)$ cortes entre aristas entonces tal dibujo es óptimo. Por ejemplo, en la Figura 3.3 se muestra un dibujo de K_5 en (a) y un dibujo óptimo de K_5 en (b), pues $cr(K_5) = 1$ como se demostrará más adelante.

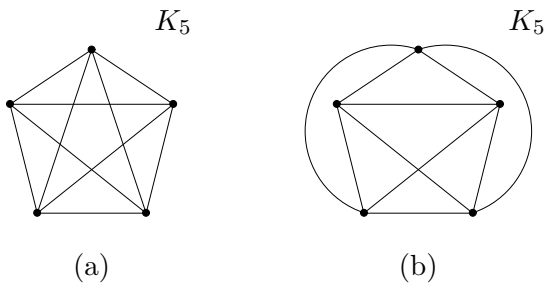


Figura 3.3: Dibujos de K_5.

Muchas de las preguntas sobre números de corte que uno se puede plantear permanecen sin resolución en la actualidad. Hasta el momento no se ha encontrado aún ningún algoritmo eficiente para calcular el número de corte de un grafo arbitrario. De hecho, este problema es NP-completo [14] y, en consecuencia, no es probable que tal algoritmo exista. Sin embargo, existen algunos resultados que sí que permiten acotar el número de corte de un grafo y también conjeturas sobre este número para ciertos tipos de grafos.

Observación 3.1.1 *Cada cara de la representación planar de un grafo planar simple G tiene como mínimo tres aristas en su borde. Por tanto, al ser una representación planar, se debe cumplir la siguiente desigualdad:*

$$3\phi(G) \leq 2\alpha(G).$$

Demostración: Este resultado es consecuencia directa de que si $3\phi(G) > 2\alpha(G)$, entonces alguna arista debe formar parte del borde de más de dos regiones y, por tanto, debe existir algún corte entre aristas, hecho que es una contradicción. La Figura 3.4 muestra este concepto de forma gráfica para una mayor comprensión de esta demostración. □

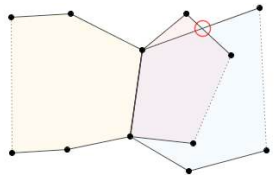


Figura 3.4: Si $3\phi(G) > 2\alpha(G)$, entonces hay al menos un corte entre aristas.

Proposición 3.1.2 *La cota inferior más simple para el número de corte de un grafo simple G con $\nu \geq 3$ vértices y α aristas es:*

$$\alpha - 3\nu + 6 \leq cr(G).$$

Esta cota se conoce por el nombre de *acotación lineal del número de corte.*

Demostración: Sea G un grafo simple. Si $cr(G) = 0$, por la Observación 3.1.1 se tiene que $3\phi(G) \leq 2\alpha(G)$. Usando la Fórmula de Euler (Teorema 2.3.1),

$$3\,(2 - \nu(G) + \alpha(G)) \leq 2\alpha(G) \quad \Leftrightarrow \quad 6 - 3\nu(G) + \alpha(G) \leq 0 = cr(G).$$

Si $cr(G) = k > 0$, consideramos el grafo $\tilde{G}$ resultado de eliminar k aristas del grafo G de tal manera que $cr(\tilde{G}) = 0$. Aplicando lo anterior,

$$6 - 3\nu(\tilde{G}) + \alpha(\tilde{G}) \leq 0.$$

Como $\nu(\tilde{G}) = \nu(G)$ y $\alpha(\tilde{G}) = \alpha(G) - k$ por construcción,

$$6 - 3\nu(G) + \alpha(G) \leq k,$$

como queríamos demostrar. □

La acotación lineal del número de corte es razonablemente buena cuando ν crece linealmente con α, es decir, cuando ambos valores son relativamente cercanos.

En 1973, Erdös y Guy conjeturaron, de manera independiente, una acotación mejor que esta última para los casos en que α crece más rápidamente que ν:

$$cr(G) \geq C \cdot \frac{\alpha^2}{\nu^2}$$

para alguna constante positiva C. En 1982 varios matemáticos dieron, de manera independiente, una primera demostración de este resultado con $C \geq \frac{1}{100}$. Más tarde se vio que $C \geq \frac{1}{64}$ para $\alpha \geq 4\nu$ [2] y $C \geq \frac{1}{33{,}75}$ para $\alpha \geq \frac{15\nu}{2}$ [31]. La mejor constante C encontrada hasta ahora es $C = \frac{1}{31{,}08}$ para $\alpha \geq \frac{103}{16}\nu$ [30].

Más en general, si $g(\nu, \alpha)$ es el mínimo de $cr(G)$ de todos los grafos G con ν vértices y α aristas, entonces se ha conjeturado que [10]:

$$C_1 \cdot \frac{\alpha^3}{\nu^2} \leq g(\nu, \alpha) \leq C_2 \cdot \frac{\alpha^3}{\nu^2},$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas. En otras palabras, la conjetura afirma que el límite

$$\lim_{\frac{\alpha}{\nu} \to \infty} \frac{g(\nu, \alpha)}{\frac{\alpha^3}{\nu^2}}$$

existe. Hasta la fecha, sólo se ha podido demostrar que la cota superior de la conjetura es trivial para $C_2 = \frac{1}{8}$ y que la cota inferior es una consecuencia automática del hecho de que cualquier dibujo de un grafo G con ν vértices y α aristas contiene un arco con al menos $C_3 \cdot \frac{\nu^2}{\alpha^2}$ cortes, donde C_3 es una constante positiva. Este último resultado sigue siendo también una conjetura [10].

En las siguientes secciones se estudiará el problema del número de corte para grafos con una estructura determinada: los grafos completos y los grafos bipartitos completos.

3.2. Número de corte de K_n

Al restringir el estudio del número de corte a los grafos completos K_n se consigue una acotación superior del número de corte de cualquier grafo simple con n vértices, pues K_n tiene el máximo número posible de aristas con ese número de vértices.

A continuación se estudiarán algunos resultados sobre $cr(K_n)$ para n pequeño.

Teorema 3.2.1 *$cr(K_n) = 0$ para $n = 2, 3, 4$.*

Demostración: K_2, K_3 y K_4 se pueden dibujar de manera que no existan cortes entre aristas, como se puede ver en la Figura 3.5. □

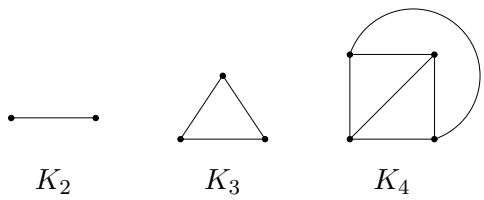


Figura 3.5: Dibujos sin cortes de K_2, K_3 y K_4.

Teorema 3.2.2 $cr(K_5) = 1$.

DEMOSTRACIÓN: Se ha demostrado ya que K_5 es no planar (Teorema 2.1.2). Por tanto, no existe ninguna representación planar o, dicho de otra manera, un dibujo sin cortes de K_5 en el plano. Así, $cr(K_5) \geq 1$. Por otro lado, la Figura 3.6 muestra un dibujo de K_5 con un solo corte. □

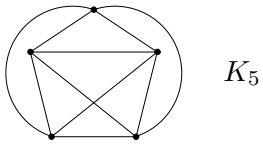


Figura 3.6: Dibujo óptimo de K_5.

Observación 3.2.3 *Si se tiene un dibujo de un grafo G con un solo corte entre aristas, al considerar un nuevo grafo $\tilde{G}$ definido como el primero pero en el que dicho corte es un nuevo vértice, se cumple lo siguiente:*

- *Se incrementa en 1 el número de vértices.*
- *Se incrementa en 2 el número de aristas.*
- *Se incrementa en 1 el número de caras.*

DEMOSTRACIÓN: Es obvio que el dibujo de $\tilde{G}$ tiene un vértice más que el de G y que, al añadir dicho vértice, lo que en G eran 2 aristas ahora son 4 en $\tilde{G}$. Por tanto (ver Figura 3.7),

$$\nu(\tilde{G}) = \nu(G) + 1,$$

$$\alpha(\tilde{G}) = \alpha(G) + 2.$$

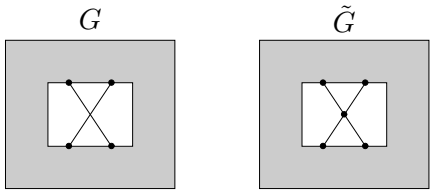


Figura 3.7: Dibujos de G y $\tilde{G}$, donde la parte sombreada representa el resto del grafo.

Como, por construcción, el dibujo de $\tilde{G}$ no tiene cortes, entonces es una representación planar de $\tilde{G}$ y se puede aplicar la Fórmula de Euler (Teorema 2.3.1). Así,

$$\phi(\tilde{G}) = 2 - \nu(\tilde{G}) + \alpha(\tilde{G}) = 2 - \nu(G) + 1 + \alpha(G) + 2 = \phi(G) + 1,$$

como queríamos demostrar. □

Observación 3.2.4 *Al aplicar la transformación de la Observación 3.2.3 a los c cortes de un dibujo de un grafo simple, se tiene que:*

- *Se incrementa en c el número de vértices.*
- *Se incrementa en $2c$ el número de aristas.*
- *Se incrementa en c el número de caras.*

Teorema 3.2.5 $cr(K_6) = 3$.

Demostración: Recordemos que $\nu(K_6) = 6$, $\alpha(K_6) = 15$ y $\phi(K_6) = 11$. Un dibujo de K_6 con c cortes induce, por la Observación 3.2.4, una aplicación en el plano con $6 + c$ vértices, $15 + 2c$ aristas y $11 + c$ caras. Por la Observación 3.1.1,

$$3(11 + c) \leq 2(15 + 2c),$$

de donde se deduce que $c \geq 3$, es decir, que $cr(K_6) \geq 3$. Como existe un dibujo de K_6 con 3 cortes (ver Figura 3.8), se tiene que $cr(K_6) \leq 3$ y, por tanto, $cr(K_6) = 3$. □

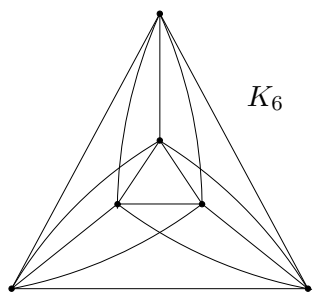


Figura 3.8: Dibujo óptimo de K_6.

Existe una demostración mucho más directa y sencilla para los Teoremas 3.2.2 y 3.2.5 usando la acotación lineal del número de corte de la Proposicion 3.1.2:

Corolario 3.2.6 $cr(K_5) = 1$.

DEMOSTRACIÓN: Como muestra la Figura 3.2, $cr(K_5) \leq 1$. Por la Proposición 3.1.2,

$$cr(K_5) \geq \alpha(K_5) - 3\nu(K_5) + 6 = 10 - 15 + 6 = 1.$$

Así, $cr(K_5) = 1$. □

Corolario 3.2.7 $cr(K_6) = 3$.

DEMOSTRACIÓN: Como muestra la Figura 3.4, $cr(K_6) \leq 3$. Por la Proposición 3.1.2,

$$cr(K_6) \geq \alpha(K_6) - 3\nu(K_6) + 6 = 15 - 18 + 6 = 3.$$

Así, $cr(K_6) = 3$. □

Sin embargo, ha sido necesario ver las demostraciones anteriores a éstas porque su estudio ayuda a comprender la naturaleza del problema y las dificultades que se presentan al incrementar el número de vértices: el problema del número de corte para el grafo completo K_n aumenta considerablemente su complejidad con cada n. Para encontrar $cr(K_n)$ con $n \geq 7$ se necesitan algunas nociones y algunos resultados previos.

Se dice que un corte en un dibujo de un grafo es *responsable* de un vértice cuando dicho vértice es extremo de una de las aristas del corte. Así, cada corte del dibujo de un grafo es responsable de exactamente 4 vértices.

Diremos que un vértice tiene *responsabilidad* de un corte en el dibujo de un grafo si es extremo de una de las aristas de dicho corte. A veces diremos que un vértice tiene *responsabilidad* l si tiene responsabilidad de l.

Observación 3.2.8 *Si un dibujo de un grafo con n vértices tiene c cortes, entonces la suma de las responsabilidades de sus vértices es $4c$.*

En consecuencia, existe un vértice con responsabilidad al menos $\left\{\frac{4c}{n}\right\}$, donde $\{\}$ denota "el menor entero mayor o igual que".

El siguiente argumento numérico clásico será de gran ayuda para dar una estimación del número de corte de K_{n+1} en función del número de corte de K_n. Supongamos que tenemos un dibujo óptimo de K_{n+1} y que conocemos $cr(K_n)$. Eliminando, por turnos, cada uno de los vértices de K_{n+1} se obtienen $n+1$ dibujos diferentes de K_n. Cada uno de ellos debe tener al menos $cr(K_n)$ cortes, así que se puede estimar el número de corte de K_{n+1} por $(n+1)cr(K_n)$.

Teorema 3.2.9 $cr(K_{n+1}) \geq \frac{n+1}{n-3} \cdot cr(K_n)$

DEMOSTRACIÓN: Es obvio que se están contando algunos cortes del dibujo de K_{n+1} más de una vez. ¿Cuántas veces estamos contando un corte ya dado? Sabemos que un corte de K_{n+1} aparece en alguno de los dibujos de K_n si los 4 vértices de los cuales este corte es responsable están todos en dicho K_n. Así, si estos 4 vértices están en K_n, sólo quedan $n-4$ vértices de K_n para escoger entre los $n-3$ vértices restantes de K_{n-1}. Por tanto, estos 4 vértices (y, por tanto, el corte del cual son extremos) están en

$$\binom{n-3}{n-4} = n-3$$

de los K_n, hecho que nos conduce a la conclusión de que cada corte se está contando $n-3$ veces y que nos lleva a la siguiente estimación:

$$cr(K_{n+1}) \geq \frac{n+1}{n-3} \cdot cr(K_n),$$

como queríamos demostrar. □

Observación 3.2.10 *La estimación* $cr(K_{n+1}) \geq \frac{n+1}{n-3} \cdot cr(K_n)$ *es equivalente a la desigualdad*

$$\frac{cr(K_{n+1})}{\binom{n+1}{4}} \geq \frac{cr((K_n)}{\binom{n}{4}}.$$

Teorema 3.2.11 *Para n impar, $cr(K_n)$ y $\binom{n}{4}$ tienen la misma paridad.*

DEMOSTRACIÓN: Ver [9]. □

Por otro lado, también necesitaremos los siguientes resultados, de los que no daremos demostración en este trabajo.

Teorema 3.2.12 *Cualquier dibujo óptimo de K_6 es isomorfo al dibujo de la Figura 3.8.*

DEMOSTRACIÓN: Ver [17]. □

Teorema 3.2.13 *Existen exactamente tres dibujos óptimos no isomorfos de K_8, dados en la Figura 3.9.*

DEMOSTRACIÓN: Ver [17]. □

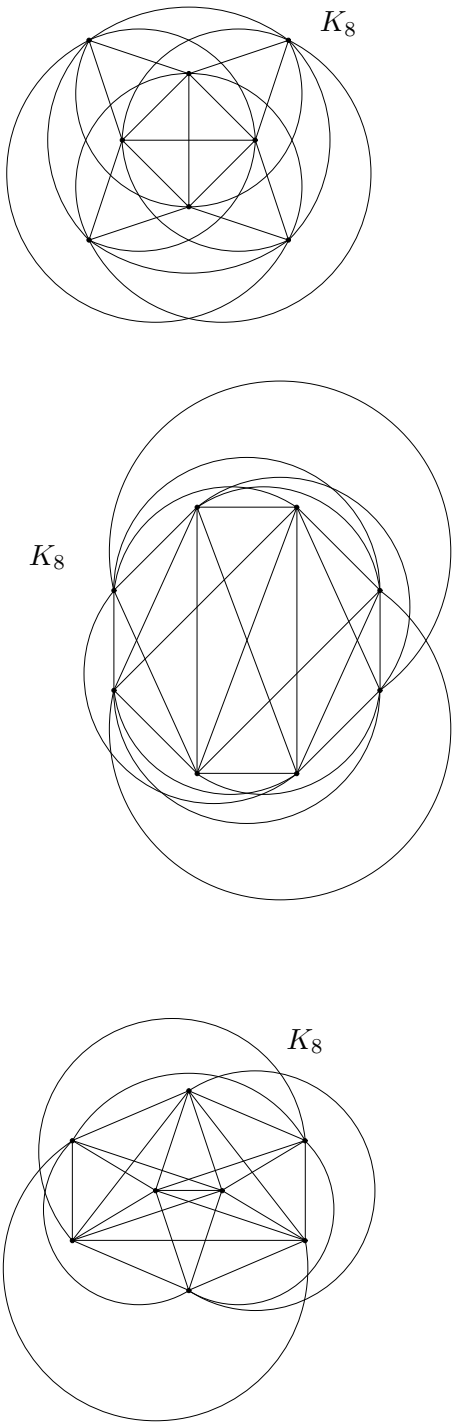


Figura 3.9: Dibujos óptimos de K_8.

Así, toda esta teoría de apoyo nos permitirá demostrar los siguientes resultados.

Teorema 3.2.14 $cr(K_7) = 9$.

Demostración: La Figura 3.10 muestra que $cr(K_7) \leq 9$. Por el Teorema 3.2.9,

$$cr(K_7) \geq \frac{7}{6-3} \cdot cr(K_6) = 7.$$

Así, $7 \leq cr(K_7) \leq 9$. Por el Teorema 3.2.11, como $\binom{7}{4} = 35$ es impar, entonces $cr(K_7)$ también lo es. Por tanto, $cr(K_7) = 7$ o $cr(K_7) = 9$.

Supongamos que $cr(K_7) = 7$. Entonces, existe un dibujo de K_7 con 7 cortes. Por la Observación 3.2.8, existe un vértice de K_7 que tiene responsabilidad al menos $\left\{\frac{4 \cdot 7}{7}\right\} = 4$ en este dibujo y, por tanto, al eliminar dicho vértice tendremos un dibujo de K_6 con como mucho $7 - 4 = 3$ cortes. Pero cualquier dibujo de K_6 tiene más de 3 cortes por el Teorema 3.2.5. Así, se concluye que todos los dibujos óptimos de K_7 se obtienen introduciendo un nuevo vértice a la Figura 3.8. Como esta figura sólo coniene tres regiones esencialmente diferentes donde se pueda añadir un vértice para conseguir un dibujo de K_7 y en todas ellas se deben añadir más de 4 cortes al dibujar las aristas que faltan para formar K_7, se obtiene un dibujo de K_7 con más de 7 cortes. Usando el Teorema 3.2.12, llegamos a contradicción.

Por tanto, $cr(K_7) = 9$. □

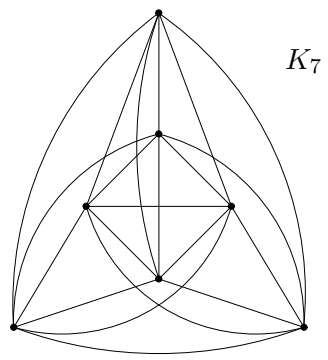


Figura 3.10: Dibujo óptimo de K_7.

Teorema 3.2.15 $cr(K_8) = 18$.

Demostración: La Figura 3.11 muestra que $cr(K_8) \leq 18$. Por el Teorema 3.2.9,

$$cr(K_8) \geq \frac{8}{7-3} \cdot cr(K_7) = 18.$$

Así, $cr(K_8) = 18$. □

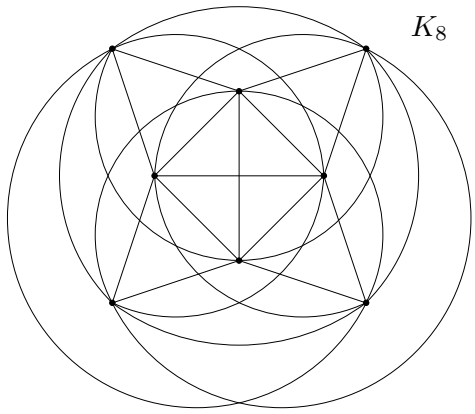


Figura 3.11: Dibujo óptimo de K_8.

Teorema 3.2.16 $cr(K_9) = 36$.

Demostración: La Figura 3.12 muestra que $cr(K_9) \leq 36$. Por el Teorema 3.2.9,

$$cr(K_9) \geq \frac{9}{8-3} \cdot cr(K_8) = 32 + \frac{2}{5} > 32.$$

Así, $33 \leq cr(K_9) \leq 36$. Por el Teorema 3.2.11, como $\binom{9}{4} = 126$ es par, entonces $cr(K_9)$ también lo es y, por tanto, $cr(K_9) = 34$ o $cr(K_7) = 36$.

Supongamos que $cr(K_9) = 34$. Entonces, existe un dibujo de K_9 con 34 cortes. Por la Observación 3.2.8, existe un vértice de K_9 que tiene responsabilidad al menos $\left\{\frac{4 \cdot 34}{9}\right\} = 16$ en este dibujo y, por tanto, al eliminar dicho vértice tendremos un dibujo de K_8 con como mucho $34 - 16 = 18$ cortes. Pero cualquier dibujo de K_8 tiene más de 18 cortes por el Teorema 3.2.15. Así, se concluye que todos los dibujos óptimos de K_9 se obtienen introduciendo un nuevo vértice a uno de los dibujos óptimos de K_8 de la Figura 3.9. Sin embargo, es imposible inroducir un nuevo vértice en cualquiera de estos tres dibujos para crear un dibujo de K_9 con 34 cortes. Usando el Teorema 3.2.13, llegamos a contradicción.

Por tanto, $cr(K_9) = 36$. □

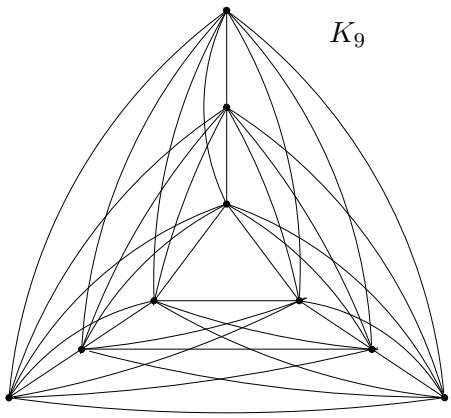


Figura 3.12: Dibujo óptimo de K_9.

Hasta el momento sólo se ha podido encontrar $cr(K_n)$ para $n \leq 12$ [18], como se muestra a continuación:

n	5	6	7	8	9	10	11	12
$cr(K_n)$	1	3	9	18	36	60	100	150

El problema crece en dificultad con cada n y, por ejemplo, no se pudo demostrar que $cr(K_{11}) = 100$ y $cr(K_{12}) = 150$ hasta el año 2007 [32]. Sin embargo, existe una conjetura para el número de corte de K_n y estos resultados obtenidos hasta ahora se ajustan a ella:

$$cr(K_n) = \frac{1}{4}\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right]\left[\frac{n-3}{2}\right],$$

donde [ ] denota la parte entera. Blažek, Koman y otros [5], [16] y [20] han dado construcciones que muestran que $\frac{1}{4}\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right]\left[\frac{n-3}{2}\right]$ es una cota superior de $cr(K_n)$. La demostración de esta conjetura es uno de los problemas abiertos actualmente en Teoría de Grafos.

No obstante, existe una manera de comprobar que esta conjetura es una cota superior cuando el número de vértices es par. Consideremos K_{2n}. El dibujo del grafo que se describe a continuación tiene exactamente

$$\frac{1}{4}[n]\left[\frac{2n-1}{2}\right][n-1]\left[\frac{2n-3}{2}\right]$$

cortes.

Consideremos un cilindro visto desde arriba y coloquemos n vértices de manera equidistante en el borde del disco superior y otros n vértices en el borde del disco inferior.

Ahora dibujemos K_n en el interior del disco inferior con líneas rectas y dibujemos K_n en el exterior del disco superior de manera que ese dibujo de K_n sea el resultado de deformar continuamente un dibujo con líneas rectas de K_n dentro del disco superior. Por tanto, tiene el mismo número de cortes que el K_n del disco inferior (ver Figura 3.13).

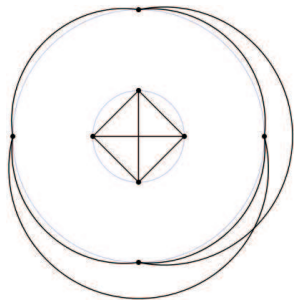


Figura 3.13: Ejemplo de cómo se deben dibujar los K_n en los discos superior e inferior del cilindro.

El dibujo dentro de la pared del cilindro del resto de aristas se hará de la siguiente manera: escojamos un vértice del disco inferior y unámoslo con todos los vértices del disco superior mediante curvas helicoidales en sentido horario, tal como se muestra en la Figura 3.14.

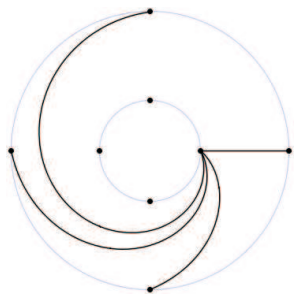


Figura 3.14: Ejemplo de cómo se deben trazar las curvas helicoidales.

Repitamos este paso con todos los vértices del disco inferior del cilindro.

Esta construcción fue estudiada por Guy, Blaẑek y Koman en [19] y [5] y es donde se demuestra que este método da un dibujo óptimo: con él se obtiene el número de corte conjeturado para K_{2n} [37]. Así, se tiene un dibujo de K_{2n} con $\frac{1}{4}[n]\left[\frac{2n-1}{2}\right][n-1]\left[\frac{2n-3}{2}\right]$ cortes (ver Figura 3.15), demostrando con ello que la conjetura da una cota superior para el número de corte del grafo completo si el número de vértices es par.

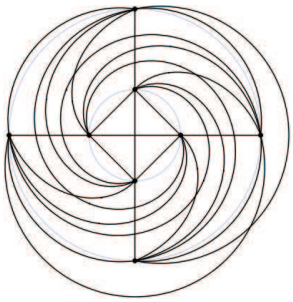


Figura 3.15: Dibujo de K_8 siguiendo este método.

En la siguiente sección se demostrará que este dibujo de $K_{n,n}$ dentro de la pared del cilindro es óptimo.

Existe, además, un argumento numérico que afirma que la conjetura es cierta para n par si ésta es cierta para el número impar precedente $n-1$ y que usa estos últimos resultados que acabamos de ver:

Teorema 3.2.17 *Sea n par. Si*

$$cr(K_{n-1}) = \frac{1}{4}\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right]\left[\frac{n-3}{2}\right]\left[\frac{n-4}{2}\right],$$

entonces

$$cr(K_n) = \frac{1}{4}\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right]\left[\frac{n-3}{2}\right].$$

Demostración: Sea n par. Entonces, $\exists n' \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2n'$. Acabamos de ver que

$$cr(K_{2n'}) \leq \frac{1}{4}[n']\left[\frac{2n'-1}{2}\right][n'-1]\left[\frac{2n'-3}{2}\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\left(\frac{n-4}{2}\right).$$

Supongamos que es cierta la conjetura para $n-1$:

$$cr(K_{n-1}) = \frac{1}{4}\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right]\left[\frac{n-3}{2}\right]\left[\frac{n-4}{2}\right].$$

Por el Teorema 3.2.9,

$$cr(K_n) \geq \frac{n}{n-4}\cdot cr(K_{n-1}) = \frac{1}{4}\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\left(\frac{n-4}{2}\right).$$

Así,

$$cr(K_n) = \frac{1}{4}\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\left(\frac{n-4}{2}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right]\left[\frac{n-3}{2}\right],$$

como queríamos demostrar. □

3.3. Número de corte de $K_{m,n}$

El problema del número de corte para el grafo bipartito completo, $K_{m,n}$, apareció por primera vez como el Problema de la Fábrica de Ladrillos de Turán (ver la introducción de este capítulo).

Como en el caso de los grafos completos, existe una conjetura para el número de corte de los grafos bipartitos completos:

$$cr(K_{m,n}) = \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Esta conjetura se conoce como la *Conjetura del Número de Corte de Zarankiewicz* y el mismo autor de la conjetura dio una demostración de ésta [40] en el año 1954. Sin embargo, años más tarde Ringel y Kainen encontraron, de manera independiente, una laguna en esta demostración [19] y, en consecuencia, la conjetura ha permanecido como tal hasta nuestros días.

A continuación se detalla una manera de comprender un poco mejor esta conjetura usando dibujos de $K_{m,n}$: supongamos que tenemos un plano con un eje horizontal y un eje vertical. Dibujemos $\left[\frac{m}{2}\right]$ vértices en la parte negativa del eje horizontal y $\left\{\frac{m}{2}\right\}$ vértices en la parte positiva del mismo eje, donde $[l]$ denota la parte entera de l y $\{l\}$ es el menor entero mayor o igual que l. Análogamente, dibujemos $\left[\frac{n}{2}\right]$ vértices en la parte negativa del eje vertical y $\left\{\frac{n}{2}\right\}$ en la parte positiva. Dibujemos ahora las mn aristas rectilíneas que unen todos los vértices de un eje con todos los del otro. En la Figura 3.16 se dan un par de ejemplos de este tipo de dibujos de $K_{m,n}$:

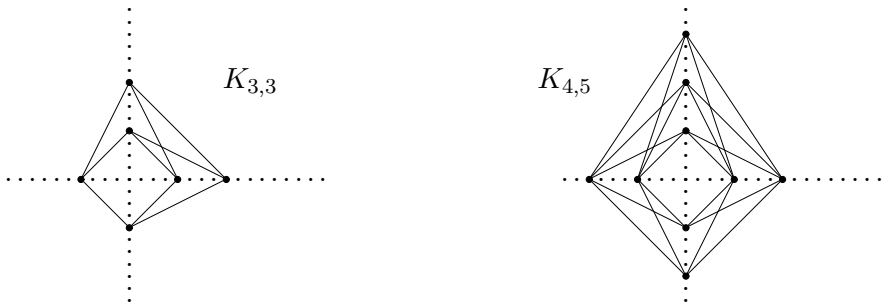


Figura 3.16: Dibujos de $K_{3,3}$ y de $K_{4,5}$.

Proposición 3.3.1 *Este tipo de dibujo de $K_{m,n}$ explicado arriba tiene exactamente $\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$ cortes.*

Demostración: Observemos que las aristas que unen los 4 vértices más cercanos al cruce entre los ejes nunca presentarán cortes por construcción.

Construimos primero las aristas que unen los dos vértices de la parte positiva y de la parte negativa, respectivamente, del eje vertical más cercanos al centro de los ejes con todos los vértices del eje horizontal. Por construcción, no hay cortes entre aristas (ver Figura 3.17).

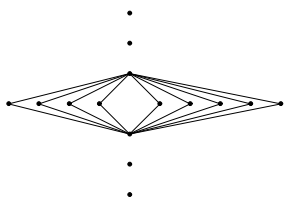


Figura 3.17: Ejemplo de este paso de la construcción del dibujo de $K_{9,6}$.

Ahora escogemos el siguiente vértice de la parte positiva del eje vertical más cercano al centro de los ejes y que no sea ninguno de los dos vértices anteriores. Lo unimos con aristas a todos los vértices del eje horizontal. Por construcción, se han creado

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\left[\frac{m}{2}\right] - k \right) + \sum_{k=1}^{\left\{\frac{m}{2}\right\}} \left(\left\{\frac{m}{2}\right\} - k \right)$$

cortes (ver Figura 3.18).

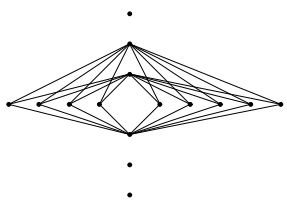


Figura 3.18: Ejemplo de este paso de la construcción del dibujo de $K_{9,6}$.

Al hacer lo mismo con el vértice de la parte negativa del eje vertical más cercano al centro de los ejes y que no sea ninguno de los tres vértices anteriores, se crean

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\left[\frac{m}{2}\right] - k \right) + \sum_{k=1}^{\left\{\frac{m}{2}\right\}} \left(\left\{\frac{m}{2}\right\} - k \right)$$

cortes más. Ahora, al unir con aristas los dos vértices siguientes más cercanos al centro en el eje vertical (siguiendo el método usado hasta ahora) con todos

los vértices del eje horizontal, se crean

$$2\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(\left[\frac{m}{2}\right]-k\right)+\sum_{k=1}^{\left\{\frac{m}{2}\right\}}\left(\left\{\frac{m}{2}\right\}-k\right)\right)$$

cortes. Análogamente, al hacer lo mismo con el vértice correspondiente de la parte negativa del eje:

$$2\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(\left[\frac{m}{2}\right]-k\right)+\sum_{k=1}^{\left\{\frac{m}{2}\right\}}\left(\left\{\frac{m}{2}\right\}-k\right)\right) \text{ cortes.}$$

Haciendo así sucesivamente, al unir los i-ésimos vértices del eje vertical (siguiendo este método) con todos los del eje horizontal, se crearán

$$(i-1)\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(\left[\frac{m}{2}\right]-k\right)+\sum_{k=1}^{\left\{\frac{m}{2}\right\}}\left(\left\{\frac{m}{2}\right\}-k\right)\right) \text{ cortes.}$$

$$+$$

$$(i-1)\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(\left[\frac{m}{2}\right]-k\right)+\sum_{k=1}^{\left\{\frac{m}{2}\right\}}\left(\left\{\frac{m}{2}\right\}-k\right)\right) \text{ cortes.}$$

Sumando todos los cortes que se han creado en este procedimiento, se tiene que el número total de cortes en el dibujo es (ver Figura 3.19):

$$\sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} l\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(\left[\frac{m}{2}\right]-k\right)+\sum_{k=1}^{\left\{\frac{m}{2}\right\}}\left(\left\{\frac{m}{2}\right\}-k\right)\right)$$

$$+\sum_{l=1}^{\left\{\frac{n}{2}\right\}-1} l\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left(\left[\frac{m}{2}\right]-k\right)+\sum_{k=1}^{\left\{\frac{m}{2}\right\}}\left(\left\{\frac{m}{2}\right\}-k\right).\right)$$

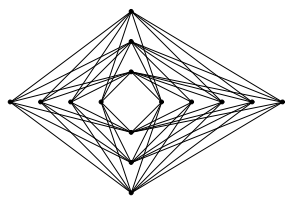


Figura 3.19: Ejemplo de este paso de la construcción del dibujo de $K_{9,6}$.

Simplificando, esta cantidad es, exactamente,

$$\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Esto se debe a que: como m es entero, entonces o bien $\frac{m}{2}$ es entero o bien $\frac{m}{2} = s + \frac{1}{2}$, con s entero. Pasa lo mismo con $\frac{n}{2}$. Se define

$$\lambda(m) := \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\left[\frac{m}{2}\right] - k\right) + \sum_{k=1}^{\left\{\frac{m}{2}\right\}} \left(\left\{\frac{m}{2}\right\} - k\right).$$

- Si $\frac{m}{2}$ es entero, $\left[\frac{m}{2}\right] + \left\{\frac{m}{2}\right\} = m$ y $\lambda(m) = \frac{m^2-2m}{4}$.
- Si $\frac{m}{2} = s + \frac{1}{2}$, con s entero, $\left[\frac{m}{2}\right] + \left\{\frac{m}{2}\right\} = m$ y $\lambda(m) = \frac{m^2-2m+1}{4}$.

Así, si se define

$$\mu(m,n) := \sum_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} l\lambda(m) + \sum_{l=1}^{\left\{\frac{n}{2}\right\}-1} l\lambda(m),$$

se distinguen 4 casos:

- Si $\frac{n}{2}$ es entero y $\frac{m}{2}$ es entero entonces

  $$\mu(m,n) = \frac{m^2n^2 - 2mn^2 - 2m^2n + 4mn}{16} = \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

  es el número de cortes en el dibujo.
- Si $\frac{n}{2} = t + \frac{1}{2}$, con t entero, y $\frac{m}{2}$ es entero entonces

  $$\mu(m,n) = \frac{m^2n^2 - 2mn^2 - 2m^2n + m^2 + 4mn - 2m}{16}$$

  es el número de cortes en el dibujo, que coincide con la cantidad

  $$\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right].$$
- Si $\frac{n}{2}$ es entero y $\frac{m}{2} = s + \frac{1}{2}$, con s entero, entonces

  $$\mu(m,n) = \frac{m^2n^2 - 2mn^2 - 2m^2n + n^2 + 4mn}{16}$$

  es el número de cortes en el dibujo, que coincide con la cantidad

  $$\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

- Si $\frac{n}{2} = t + \frac{1}{2}$, con t entero, y $\frac{m}{2} = s + \frac{1}{2}$, con s entero, entonces

$$\mu(m,n) = \frac{m^2n^2 - 2mn^2 - 2m^2n + n^2 + m^2 + 4mn - 2m - 2n + 1}{16}$$

es el número de cortes en el dibujo, que coincide con la cantidad

$$\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Así, este tipo de dibujo tiene exactamente $\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$ cortes. □

Teorema 3.3.2 $cr(K_{m,n}) \leq \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{m-1}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Demostración: Basta considerar la construcción de un dibujo de $K_{m,n}$ como se ha explicado antes. □

Hasta ahora nadie ha encontrado un dibujo de $K_{m,n}$ con menos cortes que los dados por esta conjetura. De hecho, la conjetura afirma que estos dibujos son óptimos para cada n y m.

Pese a que no se ha demostrado el caso general sí que se han podido demostrar algunos resultados parciales: se ha podido verificar la conjetura para $\text{mín}\{m,n\} \leq 6$ [29], para $m = 7$ y $n \leq 10$ [38] y para $7 \leq m \leq 8$ y $7 \leq n \leq 10$ [38].

A continuación daremos algunas de estas demostraciones para los grafos bipartitos completos más pequeños.

Teorema 3.3.3 $cr(K_{i,j}) = 0$ *para* $i, j \in \{1, 2\}$.

Demostración: Ver Figura 3.20. □

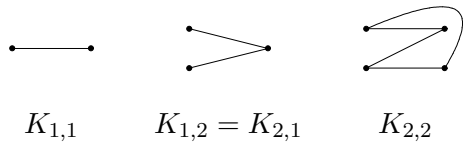


Figura 3.20: Dibujos de $K_{i,j}$ sin cortes para $i, j \in \{1, 2\}$.

Teorema 3.3.4 $cr(K_{2,3}) = cr(K_{3,2}) = 0$.

Demostración: Ver Figura 3.21. □

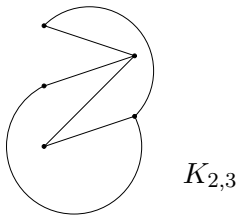


Figura 3.21: Dibujo de $K_{2,3} = K_{3,2}$.

Teorema 3.3.5 $cr(K_{3,3}) = 1$.

Demostración: Por el Teorema 3.3.2, $cr(K_{3,3}) \leq \left[\frac{3}{2}\right]\left[\frac{2}{2}\right]\left[\frac{3}{2}\right]\left[\frac{2}{2}\right] = 1$ (ver Figura 3.22).

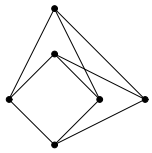


Figura 3.22: Dibujo de $K_{3,3}$.

Por otro lado, el Teorema 2.1.3 afirma que $K_{3,3}$ es no planar. Por tanto, $cr(K_{3,3}) \geq 1$ y, en consecuencia, $cr(K_{3,3}) = 1$. □

Teorema 3.3.6 $cr(K_{3,4}) = cr(K_{4,3}) = 2$.

Demostración: Por el Teorema 3.3.2, $cr(K_{3,4}) \leq \left[\frac{3}{2}\right]\left[\frac{2}{2}\right]\left[\frac{4}{2}\right]\left[\frac{3}{2}\right] = 2$ (ver Figura 3.23).

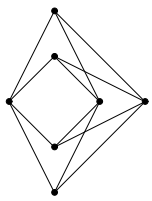


Figura 3.23: Dibujo de $K_{3,4} = K_{4,3}$.

$K_{3,4}$ contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ y, en consecuencia, no es un grafo planar. Así, $cr(K_{3,4}) \geq 1$.

Numeremos los vértices de $K_{3,4}$ de la siguiente manera: v_1, v_2 y v_3 son los vértices del primer conjunto de la partición de vértices y $v_1{}'$, $v_2{}'$, $v_3{}'$ y $v_4{}'$ son los vértices del segundo conjunto. Supongamos que $cr(K_{3,4}) = 1$. El subgrafo de $K_{3,4}$ formado por los vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1{}', v_2{}', v_3{}'\}$ y sus respectivas aristas es una subdivisión de $K_{3,3}$ y, por tanto, un buen dibujo del mismo debe tener al menos un corte. Análogamente, el subgrafo de $K_{3,4}$ formado por los vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_2{}', v_3{}', v_4{}'\}$ y sus respectivas aristas es una subdivisión de $K_{3,3}$ y, por tanto, un buen dibujo del mismo debe tener al menos un corte. Ambas subdivisiones comparten las aristas $v_1v_2{}'$, $v_1v_3{}'$, $v_2v_2{}'$, $v_2v_3{}'$, $v_3v_2{}'$ y $v_3v_3{}'$. Como $cr(K_{3,4}) = 1$ el corte entre ambas subdivisiones en un buen dibujo de $K_{3,4}$ debe ser el mismo y necesariamente debe ser un corte entre estas aristas que comparten ambos subgrafos. Por tanto, el corte será entre $v_iv_2{}'$ y $v_jv_3{}'$ con $i \neq j$ y $i, j \in \{1, 2, 3\}$. En consecuencia, las aristas $v_iv_1{}'$, $v_jv_1{}'$, $v_iv_4{}'$ y $v_jv_4{}'$ no presentan cortes de ningún tipo. Así, las aristas que presentan el corte y, por tanto, los vértices $v_2{}'$ y $v_3{}'$ deben estar o bien dentro o bien fuera de la región del plano delimitada por $v_iv_1{}'$, $v_jv_1{}'$, $v_iv_4{}'$ y $v_jv_4{}'$.

Ahora, si el vértice $v_k \in \{v_1, v_2, v_3\} \setminus \{v_i, v_j\}$ está en la misma zona delimitada por esta región (es decir, dentro o fuera de ella) que $v_2{}'$ y $v_3{}'$ entonces la arista $v_kv_1{}'$ o la arista $v_kv_4{}'$ tiene un corte, lo que es una contradicción. Si v_k está en una zona distinta delimitada por esta región que $v_2{}'$ y $v_3{}'$ entonces por el Teorema de la Curva de Jordan (Teorema 2.1.1) las aristas $v_kv_2{}'$ y $v_kv_3{}'$ presetan un corte cada una, hecho que es una contradicción.

Hemos visto así que $cr(K_{3,4}) \neq 1$, dejando como única posibilidad el resultado $cr(K_{3,4}) = 2$. □

Otra herramienta útil en el estudio de ciertos casos particulares del problema del número de corte de $K_{m,n}$ es dar una estimación de $cr(K_{n+1,n+1})$ en función de $cr(K_{n,n})$. Supongamos que tenemos un dibujo de $K_{n+1,n+1}$. Eliminando, por turnos, pares de vértices del dibujo (uno de cada conjunto de $n+1$ vértices) obteneos $(n+1)^2$ dibujos diferentes de $K_{n,n}$. Esto se debe a que hay $\binom{n+1}{n}^2 = (n+1)^2$ parejas diferentes de vértices de $K_{n+1,n+1}$. Cada uno de estos dibujos de $K_{n,n}$ debe tener al menos $cr(K_{n,n})$ cortes y, en consecuencia, estimamos el número de corte de $K_{n+1,n+1}$ por $(n+1)^2 cr(K_{n+1,n+1})$.

Teorema 3.3.7 $cr(K_{n+1,n+1}) \geq \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 \cdot cr(K_{n,n})$

Demostración: Como ya sabemos, algunos de los cortes de los $K_{n,n}$ se

están contando más de una vez. ¿Cuántas veces estamos contando un corte ya dado? Un corte dado en $K_{n+1,n+1}$ aparece en alguno de los dibujos de $K_{n,n}$ si los 4 vértices de los cuales este corte es responsable están todos en dicho $K_{n,n}$. Así, sólo quedan $2n-4$ vértices de $K_{n,n}$ para escoger entre los $2n+2-4 = 2(n-1)$ vértices restantes de $K_{n+1,n+1}$. Por tanto, estos 4 vértices (y, por tanto, el corte del que son extremos) están en $(n-1)^2$ de los $K_{n,n}$, pues hay $(n-1)^2$ parejas diferentes de vértices restantes. Así, cada corte se ha contado $(n-1)^2$ veces y, en consecuencia,

$$cr(K_{n+1,n+1}) \geq \frac{(n+1)^2}{(n-1)^2} \cdot cr(K_{n,n}),$$

como queríamos demostrar. □

Observación 3.3.8 *La estimación* $cr(K_{n+1,n+1}) \geq \frac{(n+1)^2}{(n-1)^2} \cdot cr(K_{n,n})$ *es equivalente a*

$$\frac{cr(K_{n+1,n+1})}{\binom{n+1}{2}^2} \geq \frac{cr((K_{n,n})}{\binom{n}{2}^2}.$$

El Problema de la Fábrica de Ladrillos de Turán sugiere una variante para el problema del número de corte de los grafos bipartitos completos: encontrar el menor número de cortes en un dibujo cilíndrico de $K_{n,n}$, esto es, encontrar un dibujo de $K_{n,n}$ en la pared de un cilindro tal que cada clase de n vértices esté en uno de los dos márgenes del cilindro (tal como se ha explicado en la sección anterior pero sin dibujar los grafos completos K_n en las bases del cilindro).

La pregunta que se plantea de manera natural es si este tipo de dibujo es óptimo. ¿Existe un mejor dibujo cilíndrico de $K_{n,n}$? Para saber si este es ya el mejor dibujo, salvo construcciones análogas, necesitaremos descubrir qué es lo que fuerza a que se produzca un corte en el dibujo.

Trabajaremos en aritmética módulo n. Consideremos un dibujo cilíndrico de $K_{n,n}$ como se ha explicado en la sección anterior, es decir, un dibujo donde las aristas son curvas helicoidales. Consideremos etiquetas $\{1, 2, \ldots, n\}$ para los n vértices del margen inferior del cilindro y etiquetas $\{1, 2, \ldots, n\}$ para los n vérices del margen superior de manera que sigan un orden cíclico con sentido horario. Para cada vértice i en el margen inferior existe un vértice $x_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ en el margen superior tal que la curva cerrada simple formada por las aristas con extremos i, x_i y i, $x_i + 1$, junto con el segmento pequeño del margen superior del cilindro que une x_i y $x_i + 1$, delimitan un disco que contiene al margen inferior del cilindro (ver Figura 3.24).

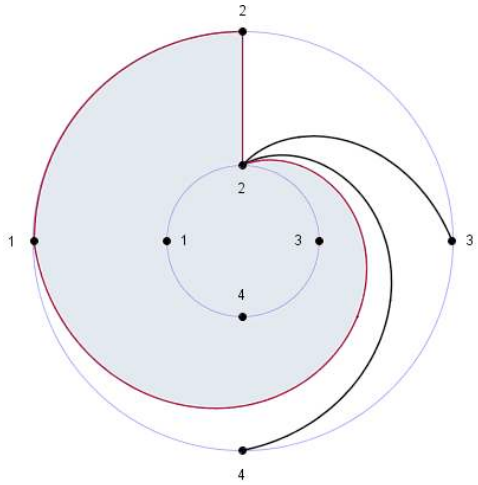


Figura 3.24: Ejemplo para $K_{4,4}$ con $i = 2$ y $x_i = 1$.

Escogemos, pues, una pareja $x_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ del margen superior para cada vértice i del margen inferior. Es obvio que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, las aristas ix_i, $i(x_i+1)$, jx_j, $j(x_j+1)$ se cortarán dos veces, pues las dos curvas cerradas que se forman como se ha explicado antes contienen al margen inferior del cilindro (ver Figura 3.25). Ahora, como los valores de $x_1, \ldots, x_n$ son conocidos, es suficiente calcular el número de cortes entre aristas incidentes con dos vértices i y j del margen inferior del cilindro.

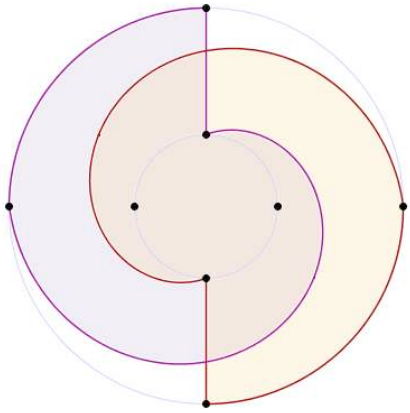


Figura 3.25: Dos cortes inevitables.

Si cogemos dos vértices r y s entre $x_i + 1$ y x_j tendremos que, entre las 4 aristas con extremos i o j y r o s habrá por lo menos un corte (ver Figura 3.26 (a)). De la misma manera, si r y s están ambos entre $x_j + 1$ y x_i pasará lo mismo. Sin embargo, si r está entre $x_i + 1$ y x_j y s está entre $x_j + 1$ y x_i o viceversa, entonces no hay necesidad de que se produzca un

corte entre estas 4 aristas (ver Figura 3.26 (b)).

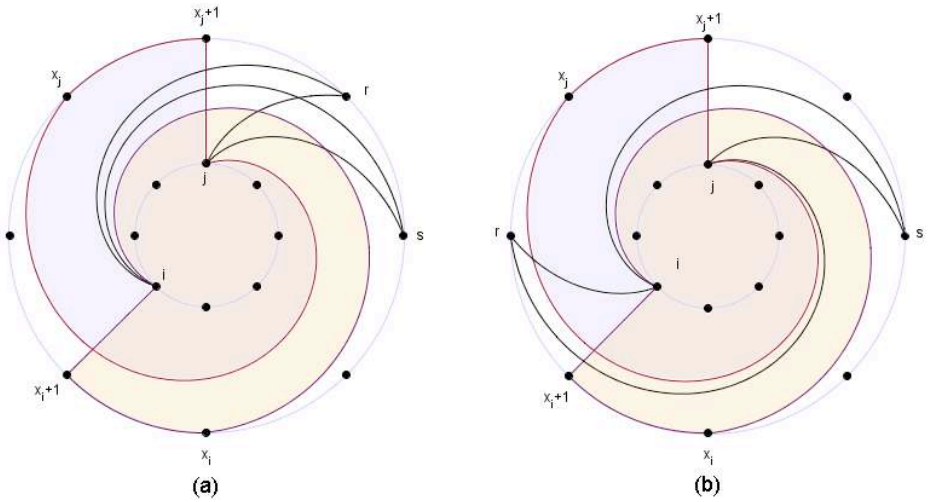


Figura 3.26: Las dos posibles ubicaciones de r y s.

Si suponemos que $1 \leq x_i \leq x_j \leq n$, entonces hay al menos

$$\binom{x_j - x_i}{2} + \binom{n + x_i - x_j}{2}$$

cortes en el dibujo entre aristas incidentes en i y en j. Esto se debe a que estamos contando las aristas con extremo i y con extremo j desde los vértices que se encuentran entre $x_i + 1$ y x_j (hay $\binom{x_j - x_i}{2}$ parejas de aristas así) y estamos contando también las aristas con extremo i y con extremo j desde los vértices que se encuentran entre $x_j + 1$ y x_i (hay $\binom{n + x_i - x_j}{2}$ parejas de aristas así). Todas estas parejas de aristas presentan al menos un corte entre ellas. El resto de parejas de aristas, como acabamos de ver, no tiene por qué presentar cortes entre ellas.

Como consecuencia de esto, una cota inferior para el número total de cortes de un dibujo así es

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \binom{|x_j - x_i|}{2} + \binom{n - |x_j - x_i|}{2}.$$

Usando la igualdad $\binom{y}{2} = \frac{y(y-1)}{2}$, podemos ver que esta cota inferior es la función

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{1\le i<j\le n} \frac{|x_j-x_i|\,(|x_j-x_i|-1)}{2} + \frac{(n-|x_j-x_i|)\,(n-|x_j-x_i|-1)}{2} \\
&= \sum_{1\le i<j\le n} |x_j-x_i|^2 + \frac{n^2-n}{2} - n\,|x_j-x_i| = \binom{n}{2}\frac{n(n-1)}{2} \\
&+ \sum_{1\le i<j\le n} |x_j-x_i|^2 - \sum_{1\le i<j\le n} n\,|x_j-x_i| = \binom{n}{2}^2 \\
&+ \sum_{1\le i<j\le n} |x_j-x_i|^2 - n\left(\sum_{1\le i<j\le n} |x_j-x_i|\right).
\end{aligned}
$$

Ordenando las variables de tal manera que $1 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le n$, vemos que la cota inferior viene dada por la función cuadrática

$$
F(x_1,\ldots,x_n) = \binom{n}{2}^2 + \sum_{1\le i<j\le n} (x_j-x_i)^2 - n\left(\sum_{1\le i<j\le n} (x_j-x_i)\right).
$$

Si encontramos un mínimo de la función F habremos resuelto la cuestión que nos planteamos.

La función F es diferenciable y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_1,\ldots,x_n) &= 0 + \sum_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne k}} 0 + 2\left(\sum_{\substack{1\le i<j\le n\\ i=k}} (x_j-x_k)\,(-1)\right) + 2\left(\sum_{\substack{1\le i<j\le n\\ j=k}} (x_k-x_i)\cdot 1\right) \\
&- n\left(\sum_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne k}} 0 + \sum_{\substack{1\le i<j\le n\\ i=k}} (-1) + \sum_{\substack{1\le i<j\le n\\ j=k}} 1\right) \\
&= 2\left(\sum_{j\ne k} x_k - x_j\right) + n(n-2k+1) \\
&= 2(n-1)x_k - 2\sum_{k\ne j} x_j + n(n-2k+1) \\
&= 2nx_k - 2\sum_{j=1}^{n} x_j + n(n-2k+1).
\end{aligned}
$$

Si imponemos $\nabla F = 0$, se obtiene el conjunto de ecuaciones

$$
x_k = \frac{2\sum_{j=1}^{n} x_j - n(n-2k+1)}{2n} \qquad \forall k = 1,\ldots n.
$$

Como $x_{i+1} - x_i = 1$ por la ordenación que le hemos dado a las variables, si escogemos $x_k = k-1$ obtenemos una solución a estas ecuaciones. De hecho,

cualquier otra solución de estas ecuaciones se obtiene a partir de la solución $x_k = k - 1$ añadiendo la misma cantidad t' a cada x_k:

$$x_k = k + t \text{ solución general de estas ecuaciones.}$$

Esto significa que hay un mínimo (natural) de F. En consecuencia, una cota inferior para el número de cortes en un dibujo cilíndrico de $K_{n,n}$ es

$$\begin{aligned} F(1,2,\ldots,n) &= \sum_{1\le i<j\le n} \binom{j-i}{2} + \sum_{1\le i<j\le n} \binom{n-j+i}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{2}(n-k) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{2} k = n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = n\binom{n}{3}. \end{aligned}$$

Así, con todo esto se ha demostrado que el dibujo cilíndrico propuesto para $K_{n,n}$ usando curvas helicoidales en sentido horario alcanza esta cota inferior (ver Figura 3.27 con el caso $n = 4$) y, por tanto, es óptimo.

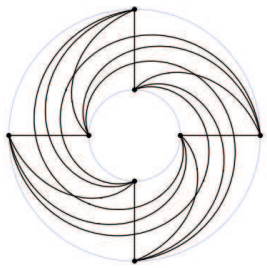


Figura 3.27: Ejemplo de un dibujo cilíndrico óptimo de $K_{4,4}$.

3.4. Comportamiento asintótico de $cr(K_n)$ y $cr(K_{m,n})$

Recordemos que en la Sección 3.2 habíamos encontrado la siguiente estimación para el número de corte de K_n (ver Observación 3.2.10):

$$\frac{cr(K_{n+1})}{\binom{n+1}{4}} \ge \frac{cr((K_n)}{\binom{n}{4}}.$$

De aquí se deduce que la sucesión $\frac{cr((K_n)}{\binom{n}{4}}$ es no decreciente. Recordemos también que al final de la Sección 3.2 se ha visto que

$$cr(K_n) \le \frac{1}{4}\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right]\left[\frac{n-3}{2}\right]$$

para n par o, lo que es lo mismo,

$$cr(K_n) < \frac{1}{4}\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{3}{8}\binom{n}{4}$$

para n par. Por tanto, combinando esta acotación con el hecho de que no es una sucesión decreciente, llegamos a la conclusión de que la sucesión de términos $cr(K_n)/\binom{n}{4}$ está acotada superiormente por $\frac{3}{8}$ y podemos asegurar que tiene límite. Sea LC este límite:

$$LC := \lim_{n\to\infty} \frac{cr(K_n)}{\binom{n}{4}} \qquad \text{límite para grafos completos.}$$

Es fácil comprobar que las conjeturas sobre el número de corte de K_n implican que $LC = \frac{3}{8}$:

- Si n es par,

$$LC = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\left(\frac{n-4}{2}\right)}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{8}\cdot\frac{n^2-6n+8}{n^2-4n+3} = \frac{3}{8}.$$

- Si n es impar,

$$LC = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\left(\frac{n-3}{2}\right)^2}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{8}\cdot\frac{n^2-4n+3}{n^2-2n} = \frac{3}{8}.$$

Así, $LC = \frac{3}{8}$ si la conjetura para $cr(K_n)$ fuera cierta.

Un argumento análogo al que se ha seguido para K_n muestra que la sucesión $cr(K_{n,n})/\binom{n}{2}^2$ tiene límite: de la Observación 3.3.8 se deduce que la sucesión $cr(K_{n,n})/\binom{n}{2}^2$ es no decreciente. Recordemos también que, por el Teorema 3.3.2, $cr(K_{n,n}) \leq \left[\frac{n}{2}\right]^2\left[\frac{n-1}{2}\right]^2$. Así,

- Si n es par,

$$cr(K_{n,n}) \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 < \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\binom{n}{2}^2.$$

- Si n es impar,

$$cr(K_{n,n}) \leq \left(\frac{n-1}{2}\right)^2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 < \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\binom{n}{2}^2.$$

Por tanto, la sucesión de términos $cr(K_{n,n})/\binom{n}{2}^2$ está acotada superiormente por $\frac{1}{4}$ y podemos asegurar que tiene límite. Sea LB este límite:

$$LB := \lim_{n\to\infty} \frac{cr(K_{n,n})}{\binom{n}{2}^2} \qquad \text{límite para grafos bipartitos completos.}$$

Es fácil comprobar que las conjeturas sobre el número de corte de $K_{n,n}$ implican que $LB = \frac{1}{4}$:

- Si n es par,

$$LB = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 \left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{\frac{n^2(n-1)^2}{4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{n^2-4n+4}{n^2-2n+1} = \frac{1}{4}.$$

- Si n es impar,

$$LB = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \left(\frac{n-1}{2}\right)^2}{\frac{n^2(n-1)^2}{4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{n^2-2n+1}{n^2} = \frac{1}{4}.$$

Así, $LB = \frac{1}{4}$ si la conjetura para $cr(K_{n,n})$ fuera cierta.

A continuación demostraremos que los límites LC para los grafos completos y LB para los grafos bipartitos completos están relacionados de manera lineal.

Teorema 3.4.1 *$LC \geq \frac{3}{2}LB$. Además, si $LB = \frac{1}{4}$, entonces $LC = \frac{3}{8}$.*

Demostración: Supongamos que tenemos un dibujo de K_{2n} con $cr(K_{2n})$ cortes entre aristas. Dentro de este dibujo existen, como ya se ha visto, numerosos dibujos diferentes de $K_{n,n}$. Necesitamos estimar cuántos dibujos de $K_{n,n}$ hay y cuántos de ellos contienen un corte determinado.

Contaremos los $K_{n,n}$ por orden, es decir, escogeremos primero un conjunto de n vértices y después el otro conjunto de n vértices. Hay $\binom{2n}{n}$ de estos grafos.

Consideremos ahora un corte dado entre las aristas ab y cd de K_n. Uno de los vértices a o b debe estar en el primer conjunto de n vértices escogido y lo mismo para c y d. Entonces, hay 4 maneras posibles de distribuir a, b, c y d en el primer conjunto de n vértices escogido si éste aparece en el $K_{n,n}$ resultante.

Nos quedan $2n-4$ vértices por escoger aún, $n-2$ de los cuales serán del primer conjunto de n vértices. Así, hay $4\binom{2n-4}{n-2}$ $K_{n,n}$ diferentes que contienen el corte dado y, por lo tanto,

$$cr(K_{2n}) \geq \frac{\binom{2n}{n}}{4\binom{2n-4}{n-2}} cr(K_{n,n}).$$

Calculando,

$$cr(K_{2n}) \geq \frac{\binom{2n}{n}}{4\binom{2n-4}{n-2}} cr(K_{n,n})$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{cr(K_{2n})}{\binom{2n}{4}} \geq \frac{\binom{2n}{n}}{4\binom{2n-4}{n-2}} \frac{cr(K_{n,n})}{\binom{2n}{4}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{cr(K_{2n})}{\binom{2n}{4}} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{cr(K_{n,n})}{\binom{n}{2}^2}$$

Tomando límites, $LC \geq \frac{3}{2}LB$.

De aquí se sigue que si $LB = \frac{1}{4}$, entonces $LC \geq \frac{3}{8}$. Como hemos visto previamente, $LC \leq \frac{3}{8}$ y, por tanto, $LC = \frac{3}{8}$. □

El Teorema 3.4.1 muestra que la conjetura para $cr(K_{n,n})$ implica la conjetura para $cr(K_{2n})$, al menos asintóticamente.

Veamos ahora un ejemplo de cálculo del número de corte de un grafo concreto. Consideremos el grafo de Petersen de 5 puntas P de la Figura 3.28.

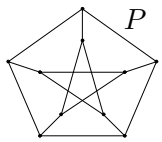


Figura 3.28: El grafo de Petersen de 5 puntas.

Observemos que P es isomorfo al grafo de la Figura 3.29.

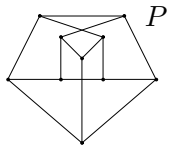
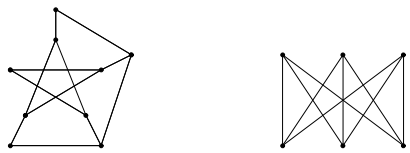


Figura 3.29: Otra manera de dibujar P.

Esta última figura muestra que $cr(P) \leq 2$. Por otro lado, ya se ha demostrado anteriormente que el grafo de Petersen de 5 puntas contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ (ver Figura 2.32) y, por lo tanto, $cr(P) \geq 1$. Así, $cr(P) = 1$ ó $cr(P) = 2$.

Observamos que para todo $v \in V(P)$ el grafo $P - v$ contiene una subdivisión de $K_{3,3}$, como se muestra en la Figura 3.30.



(a) (b)

Figura 3.30: P (a) contiene una subdivisión de $K_{3,3}$ (b).

Esta figura es válida para todo vértice de P, pues todo vértice desempeña el mismo papel en el grafo en este sentido (por ejemplo, todos los vértices tienen el mismo grado). Por tanto, podemos concluir que $cr(P - v) \geq 1$ $\forall v \in V(P)$ por ser un grafo no planar.

Retomemos ahora el grafo P. Como se ha visto unas líneas más arriba, $cr(P) = 1$ ó $cr(P) = 2$. Supongamos que $cr(P) = 1$ y consideremos un dibujo óptimo de P. Entonces, existe un vértice v con responsabilidad al menos $\left\{\frac{4 \cdot 1}{10}\right\} = 1$ y, por tanto, al eliminar este vértice se tiene que existe un dibujo de $P - v$ con, como mucho, $1 - 1 = 0$ cortes. Sin embargo, $cr(P - v) \geq 1$, llegando a contradicción.

Por tanto, podemos afirmar que $cr(P) = 2$.

Como se ha podido ver a lo largo de este capítulo, no es fácil demostrar las conjeturas que existen para el número de corte de grafos de tipos muy restringidos. No cabe duda, por tanto, de que tan sólo encontrar una posible fórmula para el número de corte de un grafo cualquiera es una tarea que, hasta el momento, no parece tener solución. Sin embargo, poco a poco se van descubriendo resultados como los que hemos visto que permiten acotar cada vez mejor el problema.

La investigación sobre el número de corte sigue siendo muy activa en la actualidad: muestra de ello es el artículo [39], publicado en el año en el que se ha elaborado la mayor parte de este trabajo. Los resultados que se suelen conseguir siguen siendo muy limitados y restringidos a una minúscula porción de la infinidad de los grafos existentes.

Capítulo 4

Coloración de vértices

El problema de la coloración trata la manera de agrupar elementos con el único objetivo de que aquellos que pertenezcan a un mismo grupo no estén relacionados entre sí. La forma de aplicar esto a la Teoría de Grafos y de asignarle un grafo es identificar cada objeto con un vértice y unir con aristas aquellos pares de vértices cuyos objetos representados estén relacionados de alguna manera: ¿Cómo podemos agrupar los vértices en un número mínimo de grupos diferentes? Se usa la palabra *coloración* para referirse a este problema porque usualmente a cada grupo se le asigna un "color" o un número natural para identificarlo.

Para una mayor comprensión de esta explicación, consideremos el siguiente ejemplo [6]. Imaginemos que queremos distribuir las conferencias de un congreso de tal manera que ningún participante se vea forzado a perderse alguna conferencia a la que quiera asistir, es decir, no queremos que dos conferencias se solapen si ambas son de interés para una misma persona. Suponiendo que disponemos de suficientes salas para llevar a cabo tantas conferencias paralelas como se necesite, ¿cuál deberá ser la duración mínima del congreso?

Como se ha explicado arriba, podemos reformular este problema en términos de grafos. Sea G un grafo cuyos vértices son las conferencias y en el que dos vértices están unidos por una arista si, y sólo si, existe un participante del congreso que desea asistir a las dos conferencias representadas por estos vértices. ¿Cuál es el mínimo valor de k para el que $V(G)$ puede tener una partición de k clases, $V_1, \ldots, V_k$, tal que ninguna arista una dos vértices de la misma clase?

4.1. Número cromático

Sea G un grafo sin lazos. Una *k-coloración de los vértices* de G es una asignación de k colores diferentes, que denotaremos por $1, \ldots, k$, a los vértices de G de manera que:

- cada vértice tenga exactamente un color asignado
- no existan dos vértices adyacentes con el mismo color asignado

Así, una k-coloración de los vértices de un grafo sin lazos G es una partición $(V_1, \ldots, V_k)$ de $V(G)$ en k conjuntos independientes. Además, esta coloración se puede entender como la aplicación exhaustiva

$$c : V(G) \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$$

tal que $c(v) \neq c(w)$ siempre que v y w sean dos vérties adyacentes de G. Cada conjunto $c^{-1}(j)$, con $j \in \{1, \ldots, k\}$, es independiente. De acuerdo con esta notación, definimos el *color del vértice v* del grafo G como $c(v)$.

Se dice que un grafo sin lazos G es *k-colorable* si existe una k-coloración de los vértices de G. A modo de ejemplo, en la Figura 4.1 se muestra que el grafo G es 5-colorable (a), 4-colorable (b), 3-colorable (c) y 2-colorable (d):

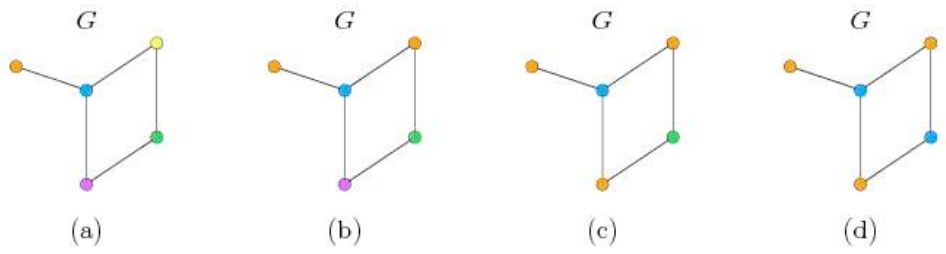


Figura 4.1: k-coloración de G para $k = 2, 3, 4, 5$.

De ahora en adelante en este capítulo, con *k-coloración* nos referiremos a una k-coloración de los vértices de un grafo. Cuando no sea necesario especificar el número de colores, la llamaremos *coloración*.

El *grafo simple intrínseco* de un grafo cualquiera es el resultado de eliminar las mínimas aristas para conseguir que el grafo sea simple. Por ejemplo, en la Figura 4.2 el grafo $\tilde{G}$ es el grafo intrínseco de G:

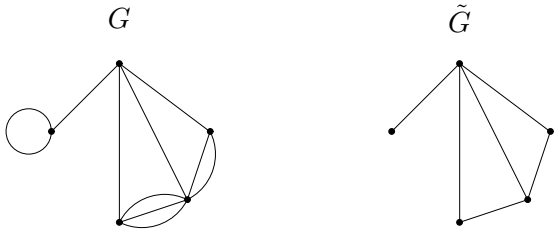


Figura 4.2: $\tilde{G}$ grafo intrínseco de G.

Claramente, un grafo es k-colorable si, y sólo si, su grafo intrínseco es k-colorable. Así, podemos restringir el estudio de la coloración a los grafos simples.

Proposición 4.1.1 *Un grafo simple es 1-colorable si, y sólo si, tiene conjunto de aristas vacío.*

Demostración: Un grafo simple es 1-colorable si, y sólo si, todo par de vértices adyacentes no comparte el mismo color. Como sólo se usa un color en esta coloración, esto solamente se cumple si, y sólo si, ningún vértice es adyacente a otro. □

Proposición 4.1.2 *Un grafo simple es 2-colorable si, y sólo si, es bipartito.*

Demostración: Sea G un grafo simple 2-colorable. Sea (X, Y) una partición de sus vértices de manera que X sea el conjunto de todos los vértices con color asignado 1 e Y el de todos los vértices con color asignado 2. Por la Proposición 4.1.1 no pueden existir aristas que unan dos vértices del conjunto X o dos vértices del conjunto Y. Así, G es un grafo bipartito tomando la partición (X, Y) de sus vértices.

Recíprocamente, si G es un grafo bipartito con partición (X, Y) basta tomar la 2-coloración que asigna el color 1 a todos los vértices de X y el color 2 a todos los vértices de Y. Así, G es 2-colorable. □

Observación 4.1.3 *Todo grafo simple de n vértices es n-colorable. Basta tomar una coloración que asigne un color distinto a cada uno de sus vértices.*

Proposición 4.1.4 *Sea G un grafo simple de n vértices. Si G es k_1-colorable, entonces G es k-colorable para toda $k \in \mathbb{N}$ tal que $k_1 \leq k \leq n$.*

Demostración: Sea G un grafo simple de n vértices k_1-colorable. Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k_1 \leq k \leq n$. Tomemos una k_1-coloración de G. Si $k = k_1$ ya hemos

acabado. Si $k_1 < k < n$ escogemos $k - k_1$ vértices cuyo color asignado esté asignado también a al menos otro vértice de los que no se han escogido (hay $n - k_1$ vértices con colores repetidos y, como $k < n$, existen $k - k_1$ vértices con colores repetidos) y cambiemos el color de estos vértices por un color distinto del conjunto $\{k_1 + 1, \ldots, k\}$ para cada uno de ellos, sin repetir color. Así, tenemos una k-coloración de G. Si $k = n$, aplicando la Observación 4.1.3 ya hemos acabado. □

Proposición 4.1.5 *Sea G un grafo simple de n vértices y sea $k_1 \leq n$ con $k_1 \in \mathbb{N}$. Si G no es k_1-colorable, entonces G tampoco es k-colorable para $k < k_1$, $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Sea G un grafo simple. Supongamos que G no es k_1-colorable. Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k < k_1$. Si G fuera k-colorable, como $k < k_1 < n$ entonces, por la Proposición 4.1.4, G sería k_1-colorable, llegando a contradicción. □

El *número cromático* de un grafo G, denotado por $\chi(G)$, es la mínima k con la que G es k-colorable; si $\chi(G) = k$ se dice que G es *k-cromático*. Por ejemplo, en la Figura 4.3 se muestra un grafo 3-cromático: existe una 3-coloración (la del dibujo) y no es 2-colorable por no ser un grafo bipartito.

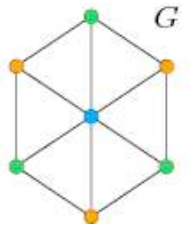


Figura 4.3: G es 3-cromático.

Observación 4.1.6 *$\chi(G) = 1$ si, y sólo si, G tiene conjunto de aristas no vacío y $\chi(G) = 2$ si G es bipartito.*

Observación 4.1.7 *Si $\chi(G) \leq k$, entonces el grafo simple G es k-colorable.*

El número cromático para ciertos tipos de grafos está totalmente determinado independientemente de la cantidad de vértices que éstos tengan. Esto ocurre porque para este tipo de grafos las restricciones son tales que a partir del número de vértices se puede determinar el número de aristas y, en consecuencia, el problema de la coloración es mucho menos complicado que para el caso general. Por ejemplo,

- $\chi(K_n) = n$

- $\chi(K_n - v) = n - 1 \ \forall v \in V(K_n)$
- $\chi(K_{m,n}) = 2$
- $\chi(C_{2n}) = 2$
- $\chi(C_{2n+1}) = 3$
- $\chi(T) = 2 \ \forall T$ árbol no trivial.

Estos resultados no son difíciles de deducir. $\chi(K_n) = n$ porque todo par de vértices de K_n está unido por una arista y esto obliga a que todos los vértices deban tener distinto color. $\chi(K_n - v) = n - 1 \ \forall v \in V(K_n)$ como consecuencia directa de esto último. $\chi(K_{m,n}) = \chi(C_{2n}) = \chi(T) = 2 \ \forall T$ árbol no trivial porque todos ellos son grafos bipartitos. Un ciclo C_{2n+1}, sin embargo, no es bipartito por el Teorema 1.5.1 y no se pueden colorear sus vértices alternativamente con dos colores 1 y 2, pues el último vértice en ser coloreado será vecino de un vérice con color 1 y un vértice con color 2. Así, necesita ser coloreado con un tercer color y, dado que esa manera de colorear da una 3-coloración $\forall n$, $\chi(C_{2n+1}) = 3$ (ver Figura 4.4 a modo de ejemplo).

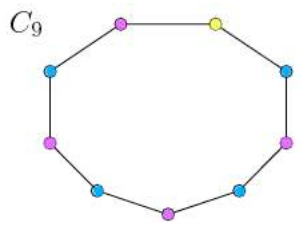


Figura 4.4: Ejemplo de coloración de un ciclo de longitud impar.

4.2. Un algoritmo básico de coloración

Una de las primeras cuestiones que uno se plantea al estudiar el problema de la coloración de vértices es la siguiente: ¿cuál es el mejor método para colorear un grafo con los colores $1, 2, \ldots$ usando el menor número posible?

Es obvio que, en general, la coloración óptima (o $\chi(G)$-coloración) de un grafo G no es única, como muestra la Figura 4.5:

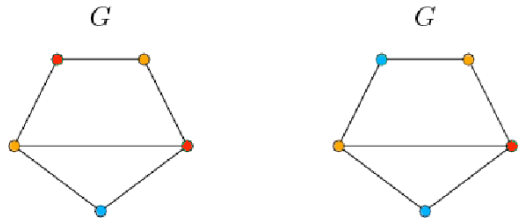


Figura 4.5: 3-coloraciones distintas de G, donde $\chi(G) = 3$.

Una manera natural de colorear los vértices de un grafo simple G es el *algoritmo del miope*. Este algoritmo establece prioridad para resolver el problema local de la coloración de cada uno de los vértices respecto de sus vecinos, dejando el problema general de la coloración de todos los vértices del grafo en un segundo plano. Por ello recibe este nombre tan peculiar. Consiste en lo siguiente:

Sea G un grafo simple de n vértices. Sea $v_1, \ldots, v_n$ una numeración (arbitraria) de los vértices de G.

1. Coloreamos v_1 con el color 1.
2. Para cada $i = 2, \ldots, n$ coloreamos v_i con el menor color disponible entre sus vecinos ya coloreados, es decir, con el menor estero k tal que ninguno de sus vecinos entre $v_1, \ldots, v_{i-1}$ tenga color k.

De esta manera nunca se usarán más de $\Delta(G) + 1$ colores incluso para malas elecciones de los vértices de G, pues ningún vértice tiene más de $\Delta(G)$ vecinos. En la Figura 4.6 se da un ejemplo de la aplicación de este algoritmo:

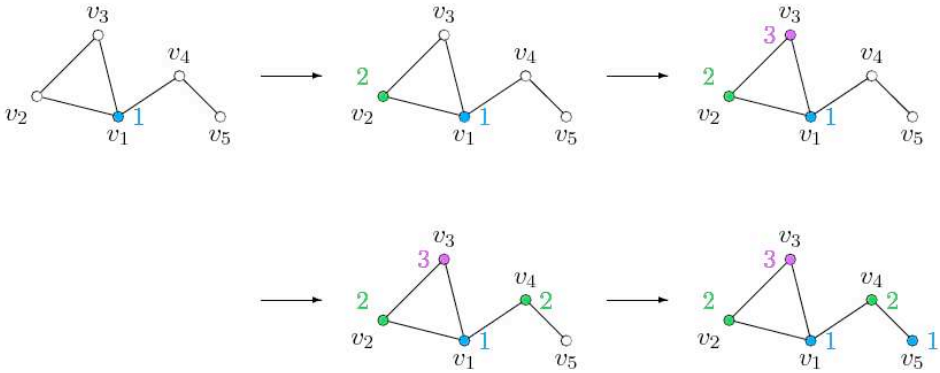


Figura 4.6: Ejemplo de aplicación del algoritmo del miope.

Debe observarse que este algoritmo ignora a los vecinos v_j de v_i para $j > i$ y que, por tanto, en la mayoría de grafos se puede mejorar la coloración dada

por este método: basta ver la Figura 4.7 donde se ha aplicado el algoritmo del miope en el grafo bipartito G (2-colorable) gastando 4 colores en vez de 2.

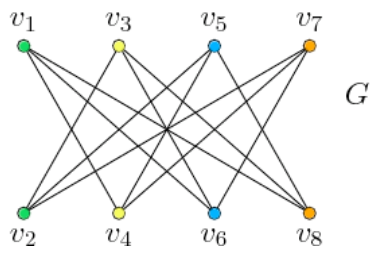


Figura 4.7: Algoritmo del miope para esta numeración de los vértices.

Simplemente eligiendo una numeración adecuada de los vértices se puede mejorar la coloración sin cambiar de algoritmo, como se puede ver en la Figura 4.8. En algunos casos, esta mejor numeración se consigue haciendo que los primeros vértices sean los de grado más alto y que los últimos sean los de menor grado.

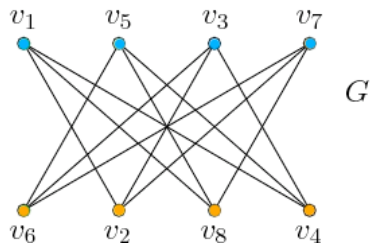


Figura 4.8: Algoritmo del miope para esta otra numeración de los vértices del grafo G de la Figura 4.7.

4.3. Cotas para el número cromático

No se conoce aún ningún método general para determinar el número cromático de un grafo arbitrario. No obstante, existen cotas para $\chi(G)$ en función de otros invariantes del grafo G, como pueden ser el grado máximo o el número de aristas.

Nuestro objetivo en esta sección es determinar cotas superiores e inferiores para el número cromático de un grafo cualquiera.

Observación 4.3.1 *Todo grafo simple G con n vértices es n-cromático, es decir, $\chi(G) \leq n$.*

Esta cota superior del número cromático suele ser pobre, excepto cuando el grafo simple G contiene muchas aristas. Esta desigualdad se convierte en una igualdad ($\chi(G) = n$) sólo cuando G es el grafo completo K_n: como ya se ha visto, $\chi(K_n) = n$; por otro lado, si $\chi(G) = n$ y $V(G) = n$ entonces existe una arista entre todo par de vértices (pues si no ocurriera esto podrían existir dos vértices con un mismo color) y, por tanto, $G = K_n$.

La cota superior del número cromático dada por la observación anterior se puede mejorar considerablemente en algunos casos, como muestran los siguientes resultados.

Proposición 4.3.2 *Todo grafo simple G con m aristas cumple que*

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

Demostración: Sea G un grafo simple con m arisas. Consideremos una $\chi(G)$-coloración de G. Entonces, G tiene como mínimo una arista que une dos clases de colores, pues si ocurriera lo contrario se podría haber usado el mismo color para ambas clases. Así,

$$m \geq \binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G)\,(\chi(G) - 1)}{2}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}},$$

como queríamos demostrar. □

Teorema 4.3.3 *Sea G un grafo simple. Entonces,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Demostración: Basta tomar una coloración cualquiera de G dada por el algoritmo del miope: como se ha observado en la sección anterior, nunca se usarán más de $\Delta(G)+1$ colores en esta coloración porque todo vértice tiene, como mucho, $\Delta(G)$ vecinos. □

La igualdad $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ sólo se cumple para grafos completos o para ciclos con un número impar de vértices: ya se ha visto que si un grafo G es completo entonces $\chi(G) = n = \Delta(G)+1$ y si G es un ciclo de longitud impar entonces $\chi(G) = 3 = 2 + 1 = \Delta(G) + 1$. Para el resto de grafos, tal como mostró Brooks en 1941 [7] y como se demostrará más adelante en

esta sección, esta cota superior se puede mejorar. Para verlo es necesario ver antes algunos resultados y definiciones.

Consideraremos que un *subgrafo inducido* por el conjunto de vértices $S \in V(G)$ de un grafo G es el subgrafo H de G con conjunto de vértices S y tal que para todo par de vértices u, v de H si $uv \in E(G)$ entonces $uv \in E(H)$. Dicho de otra manera, el subgrafo inducido por S en G es $G - (V(G) \setminus S)$. En la Figura 4.9 H es el subgrafo inducido por los vértices u, v y w de G:

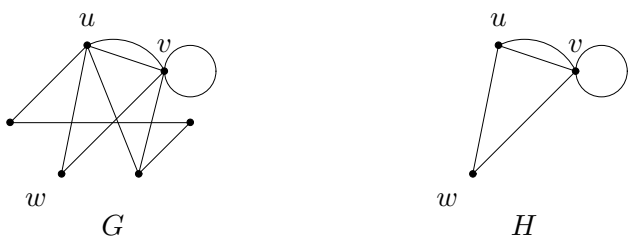


Figura 4.9: H es el subgrafo inducido por los vértices u, v y w de G.

Usando una ordenación apropiada de los vértices, se puede encontrar una cota superior para el número cromático más fuerte que la del Teorema 4.3.3:

Lema 4.3.4 *Sea G un grafo simple. Entonces,*

$$\chi(G) \leq 1 + \text{máx}\{\delta(H) \mid H \textit{ subgrafo inducido de } G\}.$$

Demostración: Definamos $k := \text{máx}\{\delta(H) \mid H \text{ subgrafo inducido de } G\}$. Por hipótesis, $k \geq \delta(G)$. Escojamos un vértice v_n con grado $g(v_n) \leq k$ en G. Ahora, sea $H = H_{n-1} := G - v_n$ y escojamos un vértice v_{n-1} con grado $g(v_{n-1}) \leq k$ en H. Seguimos haciendo así sucesivamente hasta que consigamos un grafo H_1 que consista en un solo vértice: llamemos v_1 a este vértice. Esto determina una numeración $v_1, \ldots, v_n$ de los vértices de G: aplicando el algoritmo del miope con esta ordenación cada vértice v_i tiene, como mucho, k predecesores adyacentes, pues $g(v_i) \leq k$ en cada subgrafo H_i por construcción. Así, el algoritmo del miope usa como mucho $k+1$ colores para colorear G. □

Corolario 4.3.5 *Sea G un grafo conexo simple y no regular. Entonces,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Demostración: Supongamos que G es un grafo conexo simple no regular y supongamos que $\chi(G) > \Delta(G)$ o, lo que es lo mismo, que $\chi(G) \geq$

$\Delta(G) + 1$. Sea $k := \text{máx}\{\delta(H) \mid H \text{ subgrafo inducido de } G\}$. Por el Lema 4.3.4, $\chi(G) \leq 1 + k$. Así, $\Delta(G) + 1 \leq \chi(G) \leq 1 + k$, esto es, $k \geq \Delta(G)$. Por tanto, G debe tener un subgrafo inducido H con $\delta(H) = \Delta(G)$. Esto obliga a que H sea un subgrafo $\Delta(G)$-regular de G y, en consecuencia, debe contener todos los vértices de G. Se concluye que $G = H$ y, por tanto, G es $\Delta(G)$-regular, llegando a contradicción. □

Teorema 4.3.6 (Teorema de Brooks) *Sea G un grafo simple. Si G no es un grafo completo ni un ciclo de longitud impar, entonces*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Demostración: Sea G un grafo simple. Supongamos que G no es ni completo ni un ciclo de longitud impar. Si G no fuera conexo, podríamos reducir el problema al estudio de cada una de sus componentes conexas por separado. Por tanto, podemos suponer que G es conexo. Por el Corolario 4.3.5 también podemos suponer que G es regular de grado $k = \Delta(G)$.

Si $k = 2$ enonces G es un ciclo. Por hipótesis, G debe ser un ciclo de longitud par y, como ya se ha visto, $\chi(G) = 2 = \Delta(G)$. Supongamos, pues, que $k \geq 3$.

Si G no es 2-conexo, entonces existe un vértice v tal que $G - v$ no es conexo. Consideremos las componentes conexas $V_1, \ldots, V_l$ de $G - v$. Para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$, si V_i tiene un solo vértice entonces el subgrafo H_i de G inducido por $V_i \cup \{v\}$ se puede colorear con k colores, pues $k \geq 3$ y $\chi(H_i) \leq V(H_i) = 2$. Usando inducción sobre el número de vértices, podemos suponer que el subgrafo H_i se puede colorear con k colores. Entonces, G también se puede colorear usando k colores: $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Sólo nos falta ver el caso en que G es 2-conexo. Si G es 2-conexo, el teorema se podría demostrar fácilmente si pudiéramos encontrar tres vértices v_1, v_2 y v_n tales que el grafo $H := G - \{v_1, v_2\}$ fuera conexo y G tuviera las aristas v_1v_n y v_2v_n pero no la arista v_1v_2. Supongamos que hemos encontrado tales vértices; entonces podríamos ordenar el resto de vértices de G de la siguiente manera: para $i = n - 1, \ldots, 3$ escojamos (en orden decreciente, empezando por $i = n - 1$) un vértice $v_i \in V(G) \setminus \{v_1, v_2, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ adyacente a al menos uno de los vértices $v_{i+1}, \ldots, v_n$. Recordemos que esto es posible, pues H es conexo por hipótesis. Ahora apliquemos el algoritmo del miope para dar una coloración usando esta ordenación de los vértices. Primero obtenemos $c(v_1) = c(v_2) = 1$ porque v_1 y v_2 no son adyacentes. Después, para $i \in \{3, \ldots, n - 1\}$, cada vértice v_i tiene como mucho $k - 1$ predecesores adyacentes con esta ordenación: v_i es adyacente a al menos un vértice v_j con $j > i$ (porque, por hipótesis, G es k-regular). Finalmente, v_n es adyacente a v_1 y v_2, que tienen el mismo color. Así, el algoritmo necesita como mucho $k = \Delta(G)$ colores y, en consecuencia, $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Si demostramos que G contiene vértices v_1, v_2 y v_n satisfaciendo las condiciones anteriores, habremos demostrado el teorema.

Primero supongamos que G es 3-conexo. Escojamos un vértice cualquiera v_n. Observemos que el conjunto de vecinos de v_n debe contener dos vértices no adyacentes v_1 y v_2 (si fuera de otra manera, los k vértices vecinos de v_n y el vértice v_n inducirían un grafo completo K_{k+1} de G porque G es k-regular; como, además, G es conexo este grafo debería ser el propio G, contradiciendo que G no es completo). Como G es 3-conexo, $H = G - \{v_1, v_2\}$ es conexo, como queríamos demostrar.

Supongamos, por el contrario, que G no es 3-conexo (recordando que, por hipótesis, G es 2-conexo). Escojamos dos vértices $\{v, v_n\}$ tales que $G-\{v, v_n\}$ no sea conexo y sean $V_1, \ldots, V_m$ las componentes conexas de $G-\{v, v_n\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea G_i el subgrafo de G inducido por $V_i \cup \{v, v_n\}$. Los grafos G_i son conexos por construcción y, además, v_n debe tener algún vecino diferente de v en cada uno de los G_i, ya que si fuera de otra manera entonces $G - v$ no sería conexo. Escojamos, pues, dos vecinos $v_1 \in G_1$ y $v_2 \in G_2$ de v_n tales que $v_1, v_2 \neq v$. Claramente v_1 y v_2 no son adyacentes. Además, $H = G - \{v_1, v_2\}$ es conexo: si consideramos x un vértice cualquiera de H, basta ver que existe un camino de x a v en H. Como G es 2-conexo, existen dos caminos internamente disjuntos de x a v en G por el Teorema 2.5.6. Es obvio que H contiene al menos uno de estos dos caminos. Esto muestra que H es conexo y concluye la demostración del Teorema de Brooks. □

Para dar un ejemplo del uso del Teorema de Brooks, consideremos el grafo G de la Figura 4.10:

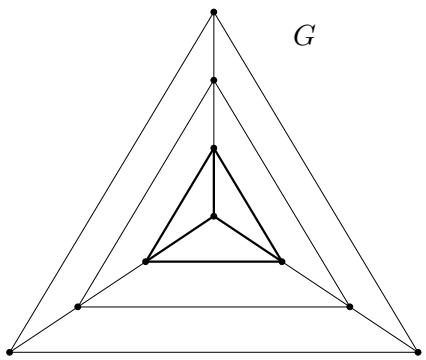


Figura 4.10: $\chi(G) = 4$.

Como G contiene al grafo completo K_4, marcado con líneas más gruesas, sabemos que $\chi(G) \geq 4$. Por otro lado, G satisface las hipóesis del Teorema

de Brooks con $\Delta(G) = 4$. Por tanto, $\chi(G) \leq 4$, de donde se deduce que $\chi(G) = 4$.

Sin embargo, esta cota superior dada por Brooks no es siempre tan satisfactoria. En particular, si un grafo contiene pocos vértices con un grado relativamene alto entonces esta cota no aporta demasiada información. Por ejemplo, en la Figura 4.11 G es un grafo bipartito y, por tanto, $\chi(G) = 2$. El Teorema de Brooks sólo da la cota $\chi(G) \leq 12$.

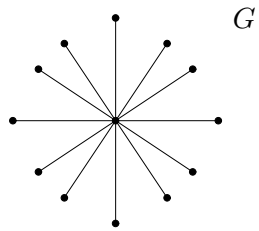


Figura 4.11: G es el grafo bipartito $K_{1,12}$.

Las cotas inferiores para el número cromático son más difíciles de determinar. Una causa trivial para que un grafo simple G tenga número cromático $\chi(G) \geq n$ es la presencia de un subgrafo completo K_n, pues como se ha visto anteriormente $\chi(K_n) = n$. Así, por ejemplo, la presencia de un *triángulo* K_3 en un grafo hace que su número cromático deba ser superior o igual a 3.

Proposición 4.3.7 *Sea G un grafo simple. Entonces, $\chi(G) \geq 2$ si, y sólo si, G contiene alguna arista y $\chi(G) \geq 3$ si, y sólo si, G contiene algún ciclo con un número impar de vértices.*

Demostración: Sea G un grafo simple. Si $\chi(G) \geq 2$, entonces G no es 1-colorable. Por la Proposición 4.1.1, esto pasa si, y sólo si, no tiene conjunto de aristas vacío. Si $\chi(G) \geq 3$ entonces G no es 2-colorable. Por la Proposición 4.1.2 esto pasa si, y sólo si, no es un grafo bipartito. Por el Teorema 1.5.1, G no es bipartito si, y sólo si, contiene un ciclo con un número impar de vértices. □

En la Figura 4.4, el grafo G tiene una 3-coloración y, en consecuencia, $\chi(G) \leq 3$. Por otro lado, G contiene el ciclo $v_1v_2v_3$, que es un ciclo con un número impar de vértices. Por la Proposición 4.3.7, $\chi(G) \geq 3$. Así, $\chi(G) = 3$.

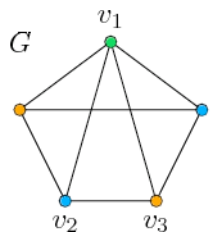


Figura 4.12: G 3-cromático.

Para $k \geq 4$ no existe, hasta el momento, una caracterización para grafos con número cromático al menos k similar a ésta. En general, determinar $\chi(G)$ es un problema NP-completo (ver [26]). Si P≠NP es cierto, entonces ni tan solo existe un algoritmo polinómico que dé una solución aproximada que no necesite menos de $2\chi(G)$ colores (ver [15]).

4.4. Coloración en grafos planares

Es corriente pensar que cuanto más complicado sea un grafo más alto será su número cromático. Lo que veremos en esta sección es que esta afirmación es falsa para grafos planares, pues el número cromático de cualquier grafo planar es "pequeño".

El problema de colorear un grafo planar nació en el año 1852 cuando Francis Guthrie, al intentar colorear el mapa de los condados de Inglaterra, se dio cuenta de que bastaban 4 colores paras conseguir pintarlo de manera que los condados adyacentes (aquellos que compartían un segmento de frontera, no sólo un punto) no tuvieran el mismo color. Se planteó si cualquier mapa se podría colorear también con 4 colores y esta pregunta se fue extendiendo dentro de su círculo de amistades y familiares, entre los que se encontraba su hermano el matemático Frederick Guthrie, como una conjetura. La primera referencia escrita apareció en una carta de Augustus de Morgan dirigida a William Rowan Hamilton. Fue Arthur Cayley quien presentó esta conjetura a la Sociedad Matemática de Londres en el año 1878, haciendo que el problema fuera conocido públicamente. Su demostración, sin embargo, tardó un siglo en aparecer.

Un mapa político se corresponde con un grafo planar cuyos vértices son las regiones del mapa. Cada par de estos vértices está unido por una arista si, y sólo si, sus correspondientes regiones son adyacentes. En la Figura 4.13 se da un ejemplo de un grafo planar que se corresponde con el mapa político de Europa.

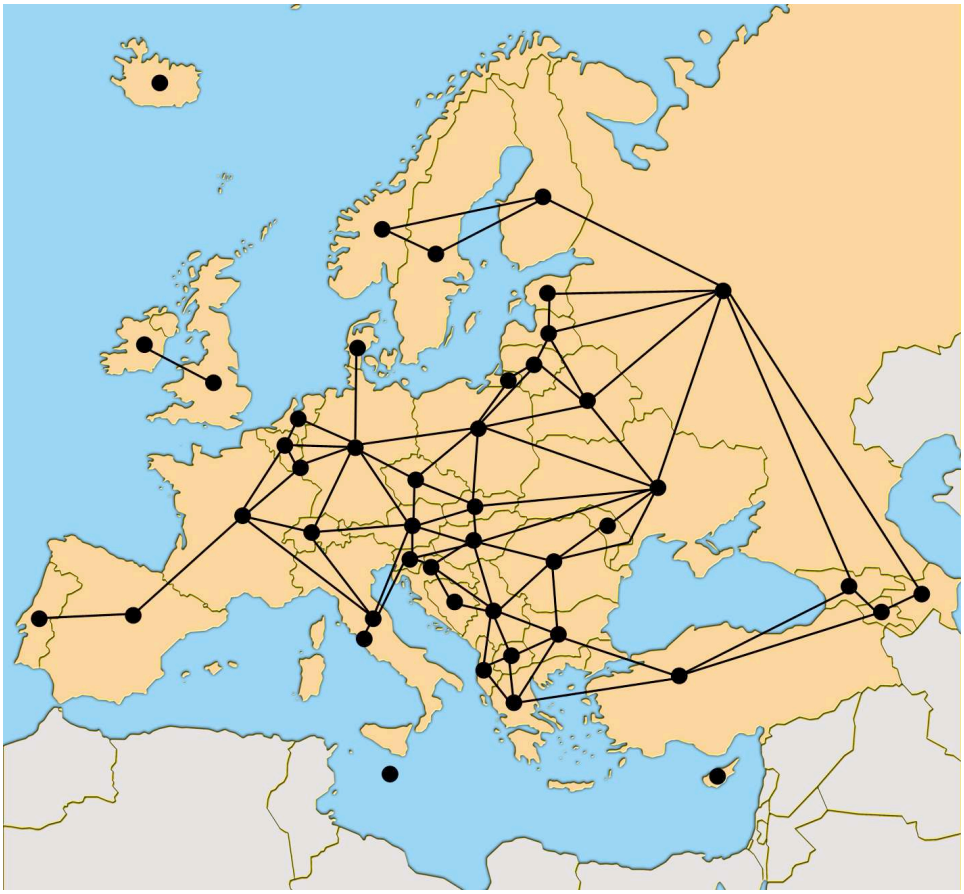


Figura 4.13: Grafo planar que se corresponde con el mapa político de Europa.

Así, el problema de demostrar que cualquier mapa se puede colorear con 4 vértices es equivalente a demostrar que todo grafo planar es 4-colorable. Este problema se conoció en su momento como la *Conjetura de los 4 colores* y actualmente se le da el nombre de *Teorema de los 4 colores*:

Teorema 4.4.1 (Teorema de los 4 colores) *Todo grafo planar simple es 4-colorable.*

Su demostración no se dará en este trabajo, pues presenta un nivel de dificultad muy elevado. La primera "demostración" de este teorema la dio el abogado y matemático inglés Alfred Bray Kempe en el año 1879 [28]. Sin embargo, 11 años después Heawood encontró un error en esta demostración [25] y la modificó para demostrar el mismo resultado con 5 en vez de 4 colores. De la misma manera, Tait dio otra demostración del teorema en 1880 y en 1981 Petersen descubrió que también era errónea. Todo este trabajo no se hizo en vano: sirvió para encontrar formulaciones equivalentes del

problema.

La primera demostración aceptada del Teorema de los 4 colores fue publicada por Appel y Haken en 1977 [4], [3]. La idea general de esta demostración se basa en dos pasos. El primero demuestra que toda triangulación plana debe contener al menos una de ciertas 1482 "configuraciones inevitables". El segundo usa un ordenador para demostrar que cada una de estas 1482 configuraciones es reducible, es decir, que toda triangulació plana que contenga tal configuración se puede colorear con 4 colores mediante la composición de 4-coloraciones de triangulaciones planas más pequeñas. Juntando los dos pasos se obtiene una demostración inductiva del Teorema de los 4 colores.

No obstante, esta demostración ha sido cuestionada y criticada desde entonces por su uso de los ordenadores. De hecho, es la primera demostración en la historia de las matemáticas donde se hace uso de la computación y, por tanto, no es una demostración en el sentido tradicional, pues contiene pasos que nunca podrán ser enteramente comprobados por un ser humano. Como ya se sabe, la computación es una posible fuente de error. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, la posibilidad de que un error de computación aparezca constantemente de exactamente la misma manera en todas las compilaciones del algoritmo usado y en todos los compiladores u ordenadores que se utilicen para la demostración es infinitésimamente más pequeña que la posibilidad de que exista un error humano llevando a cabo los mismos cálculos o comprobaciones.

En aquel momento, los autores de esta demostración respondieron a las críticas de su trabajo con la publicación de una larga versión algorímica (de más de 700 páginas) de dicha demostración, corrigiendo además algunos errores como por ejemplo la adición de nuevas "configuraciones inevitables" a la lista [3]. Más adelante, en 1997, se dio una demostración del Teorema de los 4 colores basada en estas mismas ideas pero mucho más breve [33].

Pese al tiempo transcurrido desde la primera demostración de Appel y Hanken un sector de la comunidad matemática sigue sin aceptar que tal demostración sea correcta y hasta el momento no se ha dado ninguna demostración de este teorema que no use la computación.

Aceptando que la demostración sea correcta, el Teorema de los 4 colores es el mejor resultado posible para los grafos planares: por ejemplo, K_4 es un grafo planar y es 4-cromático, mostrando que no todo grafo planar tiene una 3-coloración.

Pese a que la dificultad para 4-coloraciones es elevada, las versiones para 6-coloraciones y 5-coloraciones de este teorema no son demasiado complicadas. A continuación se da una demostración de ambas.

Teorema 4.4.2 (Teorema de los 6 colores) *Todo grafo planar simple es*

6-colorable.

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre el número de vértices. Sea G un grafo planar simple. Podemos suponer que G es conexo, pues si no lo fuera el problema se reduciría a estudiar por separado cada una de sus componentes conexas. Si $\nu(G) = 1$, entonces claramente G es 1-colorable y, en extensión, es 6-colorable. Supongamos que el teorema es cierto para grafos planares conexos de menos de n vértices. Sea G un grafo planar simple conexo con $\nu(G) = n$. Por el Corolario 2.3.3 G contiene un vértice v con $g(v) \leq 5$. Consideremos $\tilde{G} := G - v$: $\tilde{G}$ tiene menos de n vértices y, por hipótesis de inducción, es 6-colorable. Consideremos, pues, una 6-coloración de $\tilde{G}$. Al reinserar el vértice v y las aristas correspondientes a $\tilde{G}$ para obtener G de nuevo, como v tiene como mucho 5 vecinos existe un color de esta 6-coloración de $\tilde{G}$ que se puede usar para colorear v. Así, existe una 6-coloración de G. □

Teorema 4.4.3 (Teorema de los 5 colores) *Todo grafo planar simple es 5-colorable.*

DEMOSTRACIÓN: Por inducción sobre el número de vértices. Para cualquier grafo planar simple con $\nu(G) \geq 5$ vértices, el teorema es trivial porque el grafo es 5-colorable.

Supongamos que todos los grafos planares simples H con $\nu(H) \leq n$ son 5-colorables. Sea G un grafo planar simple con $\nu(G) = n + 1$. Por el Corolario 2.3.3 G tiene un vértice v con $g(v) \leq 5$. Por hipótesis de inducción, el grafo $\tilde{G} := G - v$ es 5-colorable. Consideremos, pues, una 5-coloración de $\tilde{G}$, donde denotaremos los colores por i, con $i \in \{1, \ldots, 5\}$. Se tiene que si algún color, pongamos que es el color j, no se usa para colorear los vértices adyacentes a v entonces, si se asigna el color j a v, se obtiene una 5-coloración de G a partir de la 5-coloración de $\tilde{G}$.

Esto último cubre todos los casos que se pueden dar excepto la situación en que $g(v) = 5$ y se usan 5 colores diferentes para colorear los vértices vecinos de v. Permutemos los colores, si es necesario, de manera que los vecinos de v tengan coores 1, 2, 3, 4 y 5 siguiendo un orden cíclico rodeando v. Llamemos v_i a cada vértice vecino de v con color i, $i \in \{1, \ldots, 5\}$ (ver Figura 4.14).

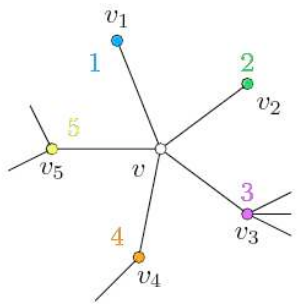


Figura 4.14: Ejemplo del orden cíclico de la coloración.

Sea $G_{i,j}$ el subgrafo de $G - v$ inducido por aquellos vértices con color i y con color j. Consideremos $G_{1,3}$. Si v_1 y v_3 pertenecen a componentes conexas diferentes de $G_{1,3}$, entonces se podría obtener una 5-coloración de $G - v$ intercambiando los colores de los vértices (cambiando el color 1 por el color 3 y el color 3 por el color 1) en la componente conexa de $G_{1,3}$ que contenga a v_1. En esta 5-coloración, sin embargo, no existe ningún vértice adyacente a v con color 1 y, en consecuencia, si se colorea v con el color 1 se obtiene una 5-coloración de G.

Si, por el contrario, v_1 y v_3 pertenecen a la misma componente conexa de $G_{1,3}$ entonces existe un camino de v_1 a v_3 en G cuyos vértices tienen color 1 ó 3. Este camino unido al camino v_1vv_3 es un ciclo que necesariamente rodea al vértice v_2 o a los dos vértices v_4 y v_5. En cualquier caso, como G es planar no existe un camino de v_2 a v_4 cuyos vértices tengan todos color 2 ó 4. Así, v_2 y v_4 pertenecen a diferentes componentes conexas de $G_{2,4}$ y, como se ha explicado antes, intercambiando los colores en la componente conexa de $G_{2,4}$ que contenga a v_2 se obtiene una 5-coloración de G.

Por tanto, G es 5-colorable. □

4.5. Las conjeturas de Hadwiger y Hajós

Existen dos importantes conjeturas que tratan la estructura de los grafos k-colorables. La primera de ellas es uno de los problemas abiertos más famosos de la teoría de grafos: la *Conjetura de Hadwiger* [21]. Esta conjetura afirma que si $\chi(G) \geq n$ entonces G contiene un subgrafo contraíble a K_n.

Esta conjetura sólo se ha podido demostrar para $n \leq 6$ (ver [1] para $n \leq 4$, para $n = 5$ el resultado es equivalente a demostrar el Teorema de los 4 colores [36], ver [34] para $n = 6$).

La segunda conjetura se conoce como la *Conjetura de Hajós* y es más

fuerte que la primera: asegura que todo grafo G con $\chi(G) \geq n$ contiene una subdivisión de K_n. Sin embargo, Catlin [8] encontró un contraejemplo para $n = 8$ demostrando así que la conjetura es falsa en general. Esta conjetura se sabe que es cierta para $n \leq 4$ [1] y para $5 \leq n \leq 7$ es un problema abierto.

Capítulo 5

Teorema de Turán y propiedad (n, k)

El Teorema de Turán es uno de los resultados fundamentales en Teoría de Grafos. Este Teorema trata la existencia de ciertos tipos de subgrafos en un grafo dado y se considera que fue el resultado que inició el estudio de la Teoría de Grafos Extrema, que es como se denomina a la rama de esta displina que estudia los casos extremos o límite que se pueden dar en grafos con ciertas propiedades. Con el paso del tiempo, el Teorema de Turán se ha convertido en un resultado muy útil en la práctica.

Por otro lado, la propiedad (n, k) también se puede considerar parte de la Teoría de Grafos Extrema, pues su estudio trata con grafos que están en el "límite" de aquellos que cumplen cierta propiedad.

En las siguientes secciones haremos un pequeño estudio tanto del Teorema de Turán como de la propiedad (n, k).

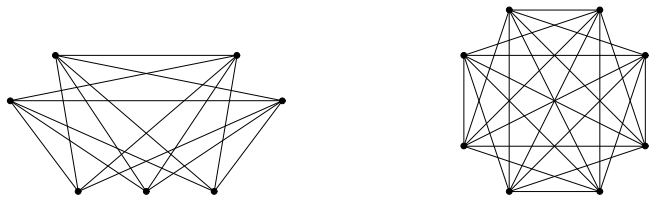
5.1. Teorema de Turán

Antes de enunciar y comprender ese importante resultado es necesario familiarizarse con la notación usada en el mismo. Sea $k \in \mathbb{N}$. Un *k-clique* en G es un subgrafo completo de G con k vértices, que denotaremos por K_k usando la notación usual. Definimos $t(n, k)$ como el número máximo de aristas que puede tener un grafo con n vértices y que no contenga un k-clique. Se tiene, por ejemplo, que $t(n, 2) = 0$ porque si un grafo no contiene un 2-clique entonces no contiene ninguna arista, pues toda arista forma, junto con sus extremos, un grafo K_2.

Observación 5.1.1 *Fijada n, $t(n, k)$ es creciente en función de k.*

Turán se planteó la siguiente pregunta: dado un grafo G que no contenga un k-clique, ¿cuál es el máximo número de aristas que puede tener G? Es decir, usando la notación anterior, Turán se propuso determinar $t(n, k)$ para toda n y para toda k.

Se pueden obtener ejemplos de grafos que alcanzan este número máximo de aristas, $t(n, k)$, de la siguiente manera: dados n y k, consideremos un grafo G con $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y dividamos este conjunto en $k-1$ conjuntos disjuntos, denotándolos por V_i, $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Así, $V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1}$. Sea $n_i = |V_i|$. Claramente, $n = n_1 + \ldots + n_{k-1}$. Unamos ahora cada par de vértices con una arista si, y sólo si, pertenecen a conjuntos diferentes V_i, V_j. Denotemos el grafo resultante como $K_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$ y llamémosle *grafo* $(k-1)$-*partito completo*. Por ejemplo, en la Figura 5.1 se muestran los grafos $K_{2,2,3}$ y $K_{2,2,2,2}$.



$K_{2,2,3}$ $K_{2,2,2,2}$

Figura 5.1: Ejemplos de grafos 3-partito completo y 4-partito completo.

El grafo $K_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$ tiene $\sum_{i \neq j} n_i n_j$ aristas, pues cada uno de los vértices del conjunto V_i es extremo de $\sum_{j \neq i} n_j$ aristas. Este número de aristas es el máximo posible si distribuimos los naturales n_i tan uniformemente como sea posible, es decir, imponiendo que $|n_i - n_j| \leq 1$ para todo i, j. En particular, si $k-1$ divide a n, entonces podremos escoger $n_i = \frac{n}{k-1}$ para toda i, obteniendo

$$\sum_{i \neq j} n_i n_j = \sum_{s=1}^{\binom{k-1}{2}} \left(\frac{n}{k-1}\right)^2 = \binom{k-1}{2} \frac{n^2}{(k-1)^2} = \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2}{2}$$

aristas. El Teorema de Turán afirma que este número es una cota superior para el número de aristas de cualquier grafo G con n vértices y sin k-cliques.

Teorema 5.1.2 (Teorema de Turán) *Sea G un grafo con n vértices y sin k-cliques. Entonces,*

$$\alpha(G) \leq \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2}{2}$$

o, lo que es lo mismo,

$$t(n, k) = \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2}{2}.$$

Más precisamente, Turán afirma que el grafo $K_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$ con $|n_i - n_j| \leq 1$ para $i \neq j$ es el único grafo sin k-cliques con el número máximo $t(n,k)$ de aristas.

Existen numerosas demostraciones diferentes del Teorema de Turán. En este trabajo detallaremos la demostración dada por Paul Erdös en el año 1970. No obstante, es interesante ver antes una demostración para el caso particular $k = 3$ de este teorema, que es el caso no trivial con k más pequeña, y poder comprender mejor la demostración general.

5.2. Teorema de Turán para el caso $k = 3$

Denotemos por $T(n,k)$ y denominemos *grafo de Turán* al grafo $K_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$ con $|n_i - n_j| \leq 1$ para $i \neq j$. Recordemos que $T(n,k)$ tiene $t(n,k)$ aristas.

Consideremos también la siguiente notación: sea G un grafo y X un subconjunto de $V(G)$. Diremos que X es *independiente* si G no tiene aristas que unan dos vértices de X. Por ejemplo, todos los conjuntos de vértices V_i del grafo $K_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$ son independientes.

El número

$$\rho(G) := \text{máx}\,\{|X| \mid X \subseteq V(G) \text{ independiente}\}$$

se denomina el *número de independencia de G*.

Teorema 5.2.1 *Consideremos un grafo G con n vértices y sin 3-cliques, es decir, libre de triángulos. Este grafo contiene como mucho $\frac{n^2}{4}$ aristas.*

Demostración: Sea G un grafo con $\nu(G) = n$ y sin 3-cliques. Sea A el conjunto independiente más grande de G. Tenemos, por definición, que $|A| = \rho(G)$. Como G es libre de triángulos por hipótesis, se tiene que $g(v) \leq \rho(G)$ para todo $v \in V(G)$, pues si existiera un vértice v de G con $g(v) > \rho(G)$ entonces, al ser G libre de triángulos, tendríamos que los vértices adyacentes a v forman un conjunto independiente de cardinal $g(v) > \rho(G)$, llegando a contradicción.

Sea $B := V(G) \setminus A$. B contiene extremos de todas las aristas de G. Observemos que $\sum_{v \in A} g(v) \leq \sum_{v \in B} g(v)$ porque por cada arista incidente en un vértice de A existe una arista incidente en un vértice de B (ella misma) y B, además, puede contener dos extremos de una misma arista (cosa que no pasa en A).

Usando la Fórmula de Euler (Teorema 2.3.1) y esta última observación

se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\alpha(G) \leq \frac{\sum_{v\in V(G)} g(v)}{2} = \frac{\sum_{v\in A} g(v) + \sum_{v\in B} g(v)}{2} \leq \frac{2\sum_{v\in B} g(v)}{2} = \sum_{v\in B} g(v).$$

Si definimos $\beta := |B| = n - \rho(G)$ y recordamos que $g(v) \leq \rho(G)$ para todo $v \in V(G)$, usando la desigualdad de la media geométrica y aritmética $\left(\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad \forall x, y\right)$ se obtiene que

$$\alpha(G) \leq \sum_{v\in B} g(v) \leq \sum_{v\in B} \rho(G) = \beta\rho(G) \leq \left(\frac{\beta + \rho(G)}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4},$$

como queríamos demostrar. □

5.3. Demostración del Teorema de Turán

Ahora que ya conocemos los detalles para el caso $k = 3$ ya estamos preparados para entender la demostración completa del Teorema de Turán.

La primera demostración para este teorema fue dada por el propio Turán en el año 1941 y en ella usaba la inducción sobre el número de vértices del grafo. Es una prueba larga y elaborada y por ello en este trabajo demostraremos una prueba posterior más sencilla y corta. Fue dada por Paul Erdös en 1970 y usa la estructura de los grafos de Turán.

Demostración: **[del Teorema 5.1.2]** Sea G un grafo con n vértices y sin k-cliques. Sea m un vértice de G con grado máximo en el grafo (es decir, tal que $g(m) = \Delta(G) = \text{máx}_{v\in V(G)} g(v)$). Sea S el conjunto de vecinos de m en G, $|S| = g(m)$, y definamos $T := V(G) \setminus S$. Como, por hipótesis, G no contiene ningún k-clique y m es un vértice adyacente a todos los vértices de S, entonces el subgrafo inducido por S en G no puede contener ningún $(k-1)$-clique (si lo tuviera entonces $S \cup \{v\}$ induciría un subgrafo de G con un k-clique).

Construimos el siguiente grafo H con conjunto de vértices $V(G)$ (ver Figura 5.2): H es el grafo G habiendo eliminado todas las aristas que unan dos vértices de T y que contiene todas las aristas con extremos uno en T y otro en S (añadiéndolas aunque no estén en G).

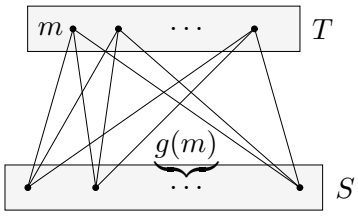


Figura 5.2: Construcción de H.

En otras palabras, T es un conjunto independiente en H y, de la misma manera que en G, H tampoco tiene k-cliques. Notemos por $g'(v)$ el grado de un vértice v en H. Si $v \in S$, podemos asegurar que $g'(v) \geq g(v)$, donde $g(v)$ es el grado de v en G, por la propia construcción de H. Si $v \in T$, $g'(v) = |S| = g(m) \geq g(v)$ por la elección de m. Así, $\forall v \in V(G)\ g'(v) \geq g(v)$.

Tenemos también que $\alpha(H) \geq \alpha(G)$. Esto ocurre porque G no tiene ningún k-clique y, por lo tanto, las aristas añadidas a G para formar H son las mismas o, quizás, más que las que se han quitado. Así, dado que $\alpha(H) \geq \alpha(G)$, podemos concluir que de entre todos los grafos con un número maximal de aristas hay al menos uno de la forma de H. Aplicando inducción sobre S vemos que entre todos los grafos con un número maximal de aristas hay un grafo $K_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$, hecho que implica que

$$\alpha(G) \leq \alpha(K_{n_1,\ldots,n_{k-1}}) = \sum_{i \neq j} n_i n_j$$

y, por lo tanto,

$$\alpha(G) \leq \sum_{i \neq j} n_i n_j = \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2}{2},$$

demostrando finalmente el Teorema de Turán. □

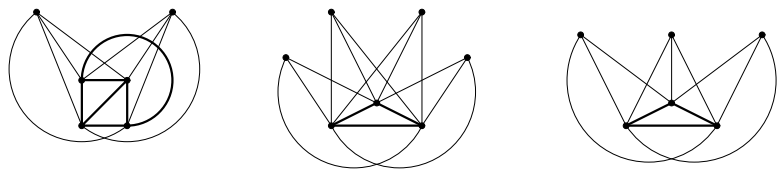
5.4. Propiedad (n, k)

En esta sección estudiaremos grafos que, en cierta manera, se encuentran en el "límite" del conjunto de grafos con n vértices y un número determinado de subgrafos completos K_k: los grafos con propiedad (n, k). Algunos de estos grafos cumplen las hipótesis del Teorema de Turán para n, k, hecho que nos permite acotar superiormente su número de aristas. Además, existen numerosos resultados que nos dicen algo más sobre este tipo de grafos.

Como podemos observar, esta propiedad puede considerarse parte de la Teoría de Grafos Extrema, pues la mínima alteración en un grafo con dicha propiedad provoca que deje de tenerla.

Diremos que un grafo simple G tiene la *propiedad* (n, k), donde n y k son números naturales con $2 \leq k \leq n$, si G tiene n vértices y la adición de cualquier nueva arista incrementa el número de grafos completos de k vértices K_k contenidos en G.

A modo de ejemplo, consideremos el grafo simple $A_k(n)$ con n vértices y $n(k-2) - \binom{k-1}{2}$ aristas consistente en un grafo completo de $k-2$ vértices, los cuales están (todos) unidos al resto de $n-(k-2)$ vértices restantes (ver Figura 5.3, donde los subgrafos completos están marcados con líneas más gruesas).



$A_6(6)$ $A_5(7)$ $A_5(6)$

Figura 5.3: Ejemplos de grafos $A_k(n)$.

Es trivial comprobar que $A_k(n)$ no contiene grafos completos de k vértices. Sin embargo, si le añadimos una arista entonces se forma un grafo completo de k vértices. Esto se debe a que, al ser un grafo simple, cualquier arista que se le añada tendrá como extremos a dos vértices del conjunto de $n-(k-2)$ vértices que no forman parte del subgrafo completo K_{k-2} y, al unirlos, como estos dos vértices ya están unidos con todos los de K_{k-2}, se forma un grafo completo K_k.

Por tanto, $A_k(n)$ tiene la propiedad (n, k). La siguiente pregunta que nos planteamos es: ¿qué grafos tienen la propiedad (n, k) y el menor número posible de aristas? La respuesta es que $A_k(n)$ es el único grafo simple que cumple esto.

Teorema 5.4.1 *Para todo par de enteros n y k con $2 \leq k \leq n$, el único grafo con número de aristas mínimo y con propiedad (n, k) es $A_k(n)$.*

Demostración: Primero veremos que $A_k(n)$ es mínimo con la propiedad (n, k) y después veremos que es el único. Denotemos por $\alpha_k(n)$ al número de aristas de un grafo mínimo con la propiedad (n, k). Queremos ver que

$$\alpha_k(n) \geq \alpha_k(n-1) + (k-2) \quad \text{para } n = k+1, k+2, \ldots$$

Sea G un grafo mínimo con la propiedad (n, k), con $n \geq k+1$. Como el grafo completo K_n es no mínimo con la propiedad (n, k), deben existir al

menos dos vértices no adyacentes en G: llamémosles p y q. $G + pq$ contiene al menos un grafo completo de k vértices más que G por hipótesis. Así, p y q deben ser ambos adyacentes a todos los vértices de algún grafo completo K_{k-2}. Si G^* denota el grafo obtenido al unir p a cada vértice del conjunto $\{v \mid v \text{ vecino de } q\} \setminus \{v \mid v \text{ vecino de } p\}$ mediante una arista y eliminar después q de G, tenemos que G^* tiene al menos $k-2$ aristas menos que G (pues se quitan las $k-2$ aristas de q a los vértices del subgrafo K_{k-2} y no se reponen al estar p ya unido a estos vértices). Observemos además que G^* tiene la propiedad $(n-1, k)$: para verlo, consideremos dos vértices a y b no adyacentes en G^*, ambos diferentes de p. La adición de la arista ab forma al menos un grafo completo de k vértices, pues ninguno de los grafos completos de k vértices que se forman al añadir ab a G podría haber contenido a la vez a p y a q por construcción y el vértice p en G^* es vecino de todos los vértices de los que q era vecino; en los casos restantes la adición de una nueva arista a G^* forma los mismos nuevos grafos completos de k vértices que los que se formaron con la adición de la misma arista en G. Como G contiene, como poco, $\alpha_k(n-1)$ aristas, hemos demostrado ya la igualdad $\alpha_k(n) \geq \alpha_k(n-1) + (k-2)$ para toda $n \geq k+1$.

Está claro que $\alpha_k(k) = \binom{k}{2} - 1$. Esto, combinado con la desigualdad anterior, implica que

$$\begin{aligned}\alpha_k(n) &\geq \alpha_k(n-1) + (k-2) \geq \alpha_k(n-2) + 2(k-2) \geq \ldots \geq \\ &\geq \alpha_k(k) + (n-k)(k-2) = \binom{k}{2} - 1 + (n-k)(k-2) = \\ &= n(k-2) - \binom{k-1}{2} \qquad \text{para } n = k+1, k+2, \ldots\end{aligned}$$

Pero $A_k(n)$ es un ejemplo de un grafo que tiene la propiedad (n, k) y con solamente $n(k-2) - \binom{k-1}{2}$ aristas. Enonces, debe ocurrir que $A_k(n)$ es mínimo con la propiedad (n, k) y, por tanto, se obtiene la igualdad en las ecuaciones de esta demostración.

Ahora usaremos inducción para demostrar que $A_k(n)$ es el único grafo mínimo con propiedad (n, k). Como ya se ha visto, esto es cierto cuando $n = k$. Supongamos que la afirmación es cierta para $k \leq n < m$ para un entero m y consideremos ahora un grafo mínimo G con la propiedad (m, k). Como se cumple que su número de aristas es

$$\alpha_k(m) = \alpha_k(m-1) + (k-2)$$

se sigue que el grafo G^* (construido como antes) es un grafo mínimo con propiedad $(m-1, k)$. Por tanto, por hipótesis de inducción, debemos suponer que G^* es $A_k(m-1)$.

Si el vértice p de G^*, usando la misma notación que antes, es uno de los $k-2$ vértices adyacentes a cualquier otro vértice en G^*, entonces debe

pasar que q es adyacente al resto de $k-3$ tales vértices en G y a uno de los vértices restantes de todo esto. Así, la adición de pq a G formaría al menos un nuevo grafo completo de k vértices. Cada uno de los otros $m-k$ vértices es adyacente o bien a p o bien a q pero no a los dos a la vez, pues si ocurriera lo contrario entonces tanto p como q serían adyacentes a la vez a más de $k-2$ vértices y, en consecuencia, G contendría más de $\alpha_k(m)$ aristas. Así, podemos suponer que existe un vértice h no adyacente a p y sí a q. Sin embargo, la adición de la arista ph no formaría un nuevo grafo completo de k vértices en G, contradiciendo la definición de G. La única alternativa que nos queda entonces es que p sea uno de los vértices de grado $k-2$ en G^*. De la definición de G^* se sigue que G se diferencia de G^* sólo por la presencia de un vértice q de grado $k-2$ que es adyacene a los mismos $k-2$ vértices que p. Esto implica que G es exactamente el grafo $A_k(m)$, completando así la demostración del teorema. □

Finalmente, en [11] Paul Erdös, A. Hajnal y J. W. Moon proponen una conjetura análoga para grafos bipartitos. Se dice que un grafo bipartito con partición de n y m vértices $G(n, m)$ tiene la *propiedad* (n, m, k, k) si toda nueva arista que se le pueda añadir al grafo incrementa el número de grafos bipartitos completos $K_{k,k}$ dentro de $G(n, m)$ (suponiendo que $k \leq n, m$). La conjetura afirma que todo grafo bipartito $G(n, m)$ con la propiedad (n, m, k, k) tiene al menos $(k-1)(n+m-k+1)$ aristas.

Existe, no obstante, una conjetura menos fuerte: todo grafo bipartito que no tenga ningún subgrafo bipartito completo $K_{k,k}$ pero que pierda esta propiedad si se le añade cualquier nueva arista tiene, al menos, $(k-1)(n+m-k+1)$ aristas.

Una de las principales dificultades que se presentan al intentar demostrar estas conjeturas es que los grafos extremos obvios no son únicos y, por tanto, no se pueden demostrar con un proceso análogo al que se ha utilizado en las demostraciones anteriores. Además, esto hace que sea difícil de llevar a cabo cualquier tipo de demostración por inducción.

Capítulo 6

La Conjetura de Ulam

En el año 1960 el matemático polaco Stanislaw Marcin Ulam planteó la siguiente pregunta en su famoso libro de problemas [35]:

> "Supongamos que A y B son dos conjuntos con n elementos cada uno ($n \geq 3$). Se da una métrica p en A con la propiedad de que $p(x, y)$ es 1 ó 2 siempre que x e y estén en A y $x \neq y$. Se da una métrica similar q en B.
>
> Supongamos ahora que los n subconjuntos de $n-1$ elementos de A y los de B pueden ser etiquetados: $A_1, \ldots, A_n$ y $B_1, \ldots, B_n$, de manera que cada A_i sea isométrico a B_i. ¿Obliga esto a que A sea isométrico a B?"

La *Conjetura de Ulam* dice que la respuesta a esta pregunta es afirmativa. Adaptaremos ahora esta conjetura a la teoría de grafos.

6.1. Conjetura de Ulam para grafos

Consideremos los conjuntos A y B y las métricas p y q descritas al inicio de este capítulo. Dados los elementos $a_1, \ldots, a_n$ de A marcamos n puntos $x_1, \ldots, x_n$ como vértices del grafo G_A asignado a A, donde cada x_i respresenta a a_i.

Escribamos $p(a_i, a_i) = 0$ para expresar que no existe ningún lazo en x_i. Si $i \neq j$, dibujemos una arista con extremos x_i y x_j sólo cuando $p(x_i, x_j) = 1$. Así, G_A respresenta el espacio métrico discreto (A, p). Construimos, de manera análoga, un grafo G_B para representar el espacio métrico discreto (B, q).

En estos términos podemos dar una versión equivalente a la Conjetura de Ulam.

Conjetura 6.1.1 (Conjetura de Ulam para grafos, versión 1) *Si el grafo $G_A - x_i$ es isomorfo a $G_B - y_i$ para cada i, entonces G_A es isomorfo a G_B.*

Si consideramos la noción de reconstrucción de grafos entonces obtendremos una versión para esta conjetura.

Supongamos que tenemos n grafos $H_1, \ldots, H_n$, cada uno de ellos con $n-1$ vértices. Se dice que un grafo K es una *reconstrucción* de los grafos $H_1, \ldots, H_n$ si K tiene n vértices $t_1, \ldots, t_n$ y $K - t_i$ es isomorfo a H_i para toda i.

Así, reformulando lo que hemos estado desarrollando hasta ahora, G_A es una reconstrucción de los grafos $G_A - x_i$ y lo mismo pasa con G_B y los grafos $G_B - y_i$, donde $y_1, \ldots, y_n$ son los vértices de G_B.

Si miramos $G_A - x_i$ como un grafo isomorfo a $G_B - y_i$, cambiando la ordenación de los vértices para que así ocurra si es necesario, y los llamamos H_i para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces obtenemos la siguiente versión de la Conjetura de Ulam:

Conjetura 6.1.2 (Conjetura de Ulam para grafos, versión 2) *Si K y K' son reconstrucciones de $H_1, \ldots, H_n$ entonces K y K' son isomorfos.*

Esta es la Conjetura de Ulam en su forma más concreta.

La reconstrucción de grafos se puede abordar desde dos puntos de vista muy diferenciados. Una manera de entenderla consiste en plantearse si existen reconstrucciones diferentes de una reconstrucción dada G a partir de los grafos $G - x_1, \ldots, G - x_n$, donde $x_1, \ldots, x_n$ son todos los vértices de G. El otro punto de vista es intentar ver si hay alguna reconstrucción de n grafos dados $H_1, \ldots, H_n$ con $n-1$ vértices cada uno.

Por ejemplo, los grafos de la Figura 6.1 no tienen ninguuna reconstrucción.

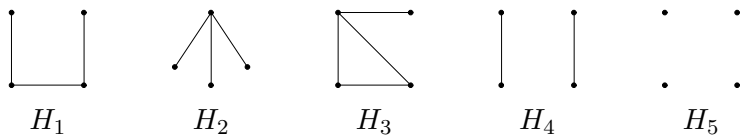


Figura 6.1: Grafos sin reconstrucción.

Esto se debe a que si añadimos un vértice v al grafo H_1 y k aristas arbitrarias con extremo v, $\{e_1, \ldots, e_k\}$, para formar una reconstrucción H de $H_1, \ldots, H_5$, entonces no existiría ningún vértice w de $G = H + v + \{e_1, \ldots, e_k\}$ tal que al eliminarlo obtuviéramos un grafo isomorfo a H_5, pues $G - w$ tiene al menos una arista $\forall w \in V(G)$ y H_5 no tiene ninguna (ver Figura 6.2).

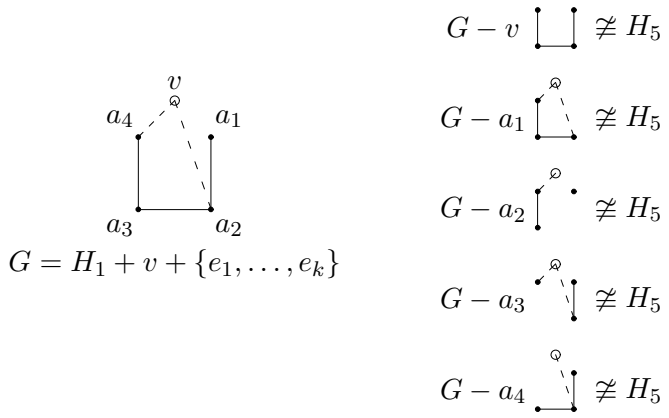


Figura 6.2: Demostración gráfica de la no existencia de reconstrucción para $H_1, \ldots, H_5$.

Esta versión de la Conjetura de Ulam para grafos afirma la existencia y la unicidad de reconstrucciones en ciertos casos.

6.2. Unicidad de la reconstrucción

La cuestión de la unicidad ya se ha podido solucionar para grafos relativamente "pequeños". Por ejemplo, P. J. Kelly [27] demostró en 1957 que la Conjetura de Ulam para grafos es cierta para $n < 7$. Harary y Palmer [23] consiguieron extenderlo hasta $n = 7$ nueve años después. Sin embargo, los argumentos que se usaron en estas demostraciones (que incluyen la consideración de todos los posibles casos) no sugieren ningún método de demostración para n arbitraria.

Algunos de los mejores resultados que se conocen hasta la fecha dependen de la conectividad de los grafos a reconstruir. Un ejemplo de grafos con buenas propiedades de conectividad son los árboles: recordemos que un árbol es un grafo conexo sin ciclos. P. J. Kelly demostró en [27] que cualquier árbol se puede recostruir de manera única a partir de sus n subgrafos de $n - 1$ vértices. Por tanto, la Conjetura de Ulam para grafos es cierta para árboles. Es más, Harary y Palmer [24] mejoraron este último resultado demostrando

que cualquier árbol puede ser reconstruido de manera única solamente a partir de los subgrafos obtenidos por eliminación de los vértices de grado 1.

A modo de aproximación a este resultado, que no se demostrará en este trabajo, detallaremos algunas de las propiedades de la reconstrucción de un árbol. Sea T un árbol con vértices $v_1, \ldots, v_n$ y sean $T_1, \ldots, T_n$ todos los subgrafos de T con $n-1$ vértices, tomando la notación $T_i = T - v_i$.

Si T_i es conexo, entones v_i es un vértice de grado 1 en el árbol, pues si $g(v_i) > 1$ entonces existirían dos aristas con extremo v_i y hacia dos vértices distintos v_j, v_k; por ser T un árbol, v_j y v_k no podrían estar conectados por un camino que no contuviera a v_i y, por tanto, v_j y v_k estarían en componentes conexas distintas, en contradicción con que T_i es conexo.

De hecho, si T_i tiene k componentes conexas entonces $g(v_i) = k$, pues repitiendo el argumento anterior los vértices que están conectados entre ellos por un camino que pasa por v_i dejan de estarlo si se elimina v_i, porque T no tiene ciclos.

Se puede encontrar una muestra gráfica de esta propiedad en la Figura 6.3: si v_i tiene grado $g(v_i)$, T_i tiene $g(v_i)$ componentes conexas.

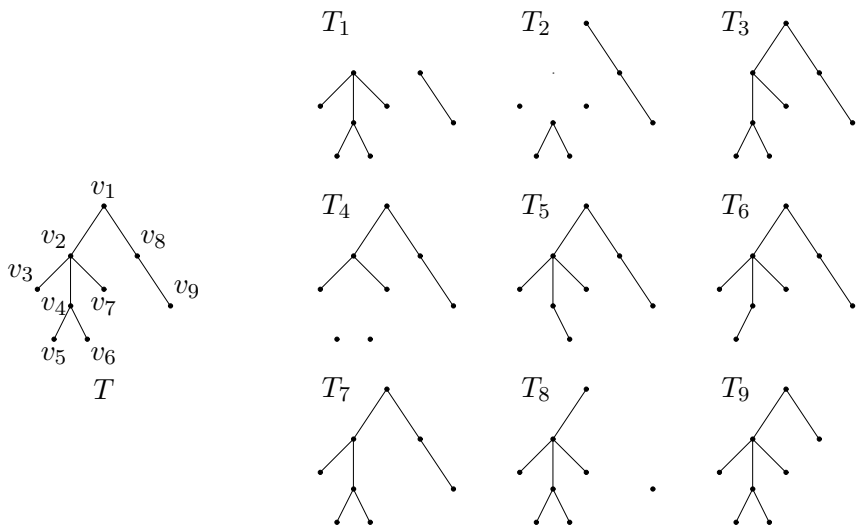


Figura 6.3: $T_1, \ldots, T_9$ para el árbol T.

Existe otro resultado importante que demuestra la Conjetura de Ulam para grafos en otro caso muy concreto:

Teorema 6.2.1 *Sean $G_1, \ldots, G_n$ n grafos con $n-1$ vértices cada uno. Supongamos que $n > 2$ y que estos grafos tienen una reconstrucción G. Si,*

como mucho, uno de los G_i es conexo, entonces G es única.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que G es conexa. Entonces, algunos de los conjuntos de $n-1$ aristas de G formarán un árbol. Esto se debe a que, como ya hemos visto en la Sección 1.7, todo grafo conexo tiene al menos un árbol expansivo. Sea T uno de estos árboles. Como $n > 2$, T tiene al menos dos vértices de grado 1, llamémosles x e y. Por lo tanto, $G - x$ y $G - y$ son conexos. Así, hemos visto que si como mucho un G_i es conexo entonces su reconstrucción G no puede ser conexa. Recíprocamente, si G no es conexo y $n > 2$ entonces todos excepto, quizás, un G_i son grafos no conexos.

Concluimos, por tanto, que si $n > 2$ G es no conexo si, y sólo si, existe como mucho un G_i conexo.

Ahora podemos usar la no conectividad de cualquier reconstrucción de los grafos G_i para producir una reconstrucción componente a componente. Supongamos que, como mucho, uno de los G_i es conexo.

- Si todos los G_i son isomorfos entre sí, entonces es obvio que todas las componentes conexas de, por ejemplo, G_1 serán isomorfas excepto una. La reconstrucción de $G_1, \ldots, G_n$ será un grafo con tantas componentes conexas comco G_1 y todas ellas isomorfas la la mayoría de componentes conexas de este grafo y, por tanto, isomorfas entre sí. Esta reconstrucción es única.

- Supongamos que existen dos G_i, $G_{i'}$ diferentes. Sea m el menor número de componentes conexas de todos los G_i,

  $$m := \min_{i=1,\ldots,n} \{k(G_i)\},$$

  donde $k(G_i)$ denota el número de componentes conexas de G_i.

  Sea G_j un grafo con exactamente m componentes conexas y tal que tenga una coponente conexa con el mínimo número posible de vértices de entre todas las componentes conexas de todos los grafos G_i con m componentes conexas. Nombremos las componentes de G_j como $C_1, \ldots, C_m$, ordenadas en orden decreciente respecto su número de vértices (es decir, C_m es una de las componentes de G_j con menor número de vértices).

  De momento, mantendremos a $C_1, \ldots, C_{m-1}$ como candidatas a componentes conexas de una reconstrucción G'. Solamente nos falta producir sus componentes conexas restantes. Ahora operaremos sobre la componente C_1 de G_j. Primero, formemos el grafo H consistente en eliminar un vértice v de C_1 tal que no deje a C_1 disconexa una vez eliminado: $H = C_1 - v$. Si H no es isomorfo a ninguna componente

conexa de los grafos $G_1, \ldots, G_{j-1}, G_{j+1}, \ldots, G_n$ entonces volvemos a escoger otro vértice de C_1 diferente de v que al quitarlo no deje a C_1 disconexa y que el grafo resultant, H, sea isomorfo a alguna componente conexa de $G_1, \ldots, G_{j-1}, G_{j+1}, \ldots, G_n$. Si no existe tal vértice, entonces volvemos a comenzar el proceso escogiendo otra j que cumpla las condiciones que se pedían antes.

Escojamos ahora algún grafo G_k no isomorfo a G_j y con el menor número de componentes conexas posible tal que $m-1$ de sus componentes conexas sean $H, C_2, \ldots, C_{m-1}$. Si no existe tal G_k, entonces volvemos a empezar el proceso escogiendo a otra j que cumpla las condiciones que se pedían unas líneas más arriba. Podemos afirmar que se llegará a una situación, con un número finito de repeticiones de este proceso, en que exista tal G_k (pues, por hipótesis, existe una reconstrucción G de $G_1, \ldots, G_n$). Si existe tal G_k, lo escogemos con una componente conexa mínima entre todos los posibles G_k's.

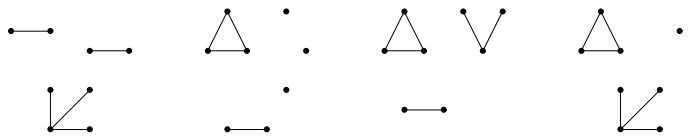
Las componentes conexas restantes de este grafo G_k (es decir, $G_k - (H \cup C_2 \cup \ldots \cup C_{m-1})$ formarán la parte de la reconstrucción G' que no habíamos considerado:

$$G' = C_1 \cup \ldots \cup C_{m-1} \cup (G_k - (H \cup C_2 \cup \ldots \cup C_{m-1})).$$

Sólo nos falta ver que G' es isomorfo a G, pero esto es cierto, pues por construcción G y G' coinciden en las componentes conexas $C_1, \ldots, C_{m-1}$ y también en las componentes conexas de $G_k - (H \cup C_2 \cup \ldots \cup C_{m-1})$.

Por tanto, acabamos de demostrar la unicidad de la reconstrucción. □

Veamos con un ejemplo cómo funciona en la práctica el algoritmo o proceso de reconstrucción que se ha dado en la demostración anterior. Consideremos los grafos $G_1, \ldots, G_9$ de la Figura 6.4:



$G_1 = G_2 = G_3$ G_4 $G_5 = G_6 = G_7$ $G_8 = G_9$

Figura 6.4: Ejemplo de grafos para reconstruir.

En este caso concreto, tenemos que $m = 3$. Como G_8 y G_9 son los grafos de 3 componentes conexas que tienen una componente con menor número

de vértices, escogemos uno de los dos: por ejemplo, G_8. Nombremos las componentes conexas de G_8 de manera decreciente, tal como se muestra en la Figura 6.5:

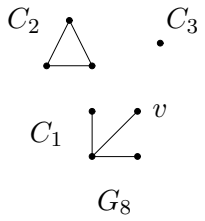


Figura 6.5: Componentes conexas de G_8.

Consideremos $H := C_1 - v$, donde v es el vértice indicado en la figura anterior, y busquemos ahora grafo G_i no isomorfos a G_8 con las siguientes componentes conexas: H y C_2 (ver Figura 6.6).

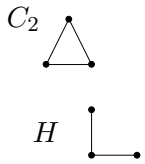


Figura 6.6: $H \cup C_2$.

Los posibles grafos son G_5, G_6 y G_7, que son isomorfos entre sí. Escogemos, por ejemplo, G_5. Ahora, $G_5 - (H \cup C_1)$ es el grafo de la Figura 6.7:

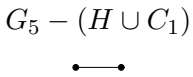


Figura 6.7: $G_5 - (H \cup C_1)$.

Así, por la demostración del teorema anterior, $G = C_1 \cup C_2 \cup (G_5 - (H \cup C_1))$ o, lo que es lo mismo, G es el grafo de la Figura 6.8 y es único.

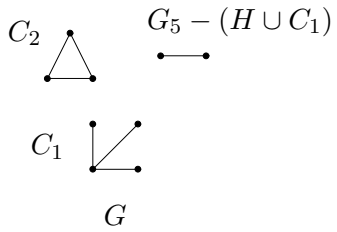


Figura 6.8: G es la reconstrucción de $G_1, \ldots, G_9$.

En resumen, si existe una reconstrucción G de los grafos G_i podemos predecir a partir de los G_i cuándo G será disconexo y, en este caso, construir G de manera única.

6.3. Existencia de reconstrucciones

Ya hemos visto que existe la posibilidad de que n grafos con $n-1$ vértices cada uno tengan una reconstrucción. Ahora nos centraremos en el problema de la existencia de reconstrucciones: dados $G_1, \ldots, G_k$, cada uno con $n-1$ vértices ($k \leq n$), ¿existe algún grafo de n vértices con vértices $x_1, \ldots, x_k$ tales que $G - x_i$ sea isomorfo a G_i?

Comencemos por el caso no trivial más simple: $k = 2$. Si $G - x_1 = G_1$ y $G - x_2 = G_2$, entonces

$$(G - x_1) - x_2 = G_1 - x_2$$

$$(G - x_2) - x_1 = G_2 - x_1$$

Así, $G_1 - x_2$ y $G_2 - x_1$ son isomorfos y, en consecuencia, G_1 y G_2 son "isomorfos salvo por un vértice". En palabras más formales, si existe una reconstrucción de G_1 y G_2 entonces debe existir un vértice x de G_1 y un vértice y de G_2 tales que $G_1 - x$ es isomorfo a $G_2 - y$.

Esta condición es, por tanto, necesaria. Además, también es una condición suficiente: para verlo, supongamos que $G_1 - x$ es isomorfo a $G_2 - y$. Podemos construir un grafo G adecuado a nuestros intereses empezando por una copia de $G_1 - x$ y añadiéndole dos nuevos vértices y aristas apropiadas para cada uno de ellos. Para seguir paso a paso esta reconstrucción, tomaremos como referencia los grafos H_1 y H_3 del ejemplo de la Figura 6.1 (ver Figura 6.9).

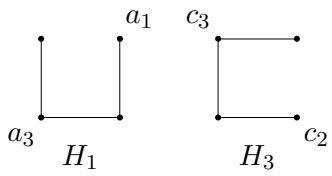


Figura 6.9: Los grafos H_1 y H_3 de la Figura 6.1.

Si eliminamos los vértices a_1 y c_2 se tiene que $H_1 - a_1$ es isomorfo a $H_3 - c_2$, como se muestra en la Figura 6.10:

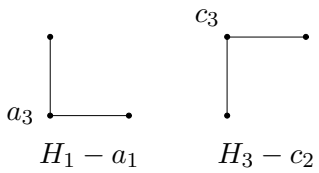


Figura 6.10: $H_1 - a_1 \cong H_3 - c_2$.

Sin embargo, estos dos grafos tienen más de una reconstrucción posible G donde $G - u = H_1$ y $G - v = H_2$:

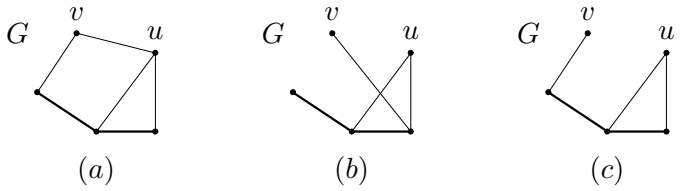


Figura 6.11: Tres construcciones diferentes.

Esto nos muestra que, en general, una reconstrucción nunca es única cuando $k = 2$, pues en ese caso somos libres de poner o dejar sin poner la arista entre dos vértices añadidos (u y v en este caso).

A su vez, no obstante, esto nos sugiere un método para producir todas las posibles reconstrucciones de dos grafos. Solamente se debe hacer una lista con todos los pares a y b tales que $G_1 - a \cong G_2 - b$ y repetir estas construcciones para cada uno de estos pares.

Ahora que ya hemos encontrado una solución para el caso $k = 2$, intentaremos encontrar un resultado similar para el caso general. Como ya se ha

visto, si $G_i := G - x_i$ para $i = 1, \ldots, k$ se tiene que

$$G_i - x_j = (G - x_i) - x_j \cong (G - x_j) - x_i = G_j - x_i$$

y así, todos los pares G_i y G_j son idénticos excepto por un vértice.

Si retomamos el ejemplo de la Figura 6.1 vemos que el método usado para H_1 y H_3 (con $k = 2$) ya no nos sirve para H_1, H_2 y H_3 (con $k = 3$):

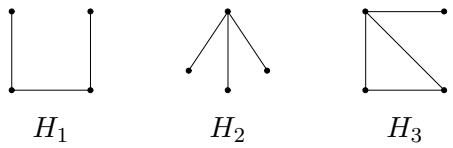


Figura 6.12: Los grafos H_1, H_2 y H_3 de la Figura 6.1.

Esto se debe a que, por parejas, se tiene que $H_1 - a_1 \cong H_2 - b_1$, $H_2 - b_2 \cong H_3 - c_2$ y $H_3 - c_3 \cong H_1 - a_3$ (ver Figura 6.6).

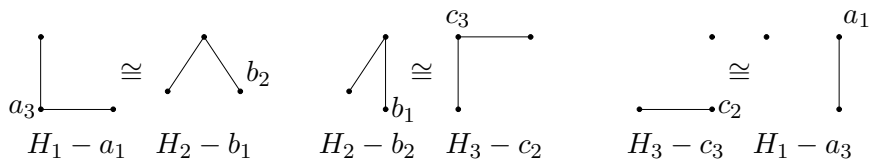


Figura 6.13: Isomorfías por parejas.

Observamos que no existe ninguna reconstrucción de los grafos H_1, H_2 y H_3 y, sin embargo, los posibles pares H_i, H_j son isomorfos salvo por un vértice. Esto muestra que, para asegurar la existencia, no basta con los isomorfismos entre $G_i - x$ y $G_j - y$ y se necesitan un tipo determinado de isomorfismos.

A partir de ahora trabajaremos en términos de ordenación de vértices. Sea x_i^j una ordenación de los vértices de G_j, para $1 \leq i \leq n-1$ y $1 \leq j \leq k$: $x_1^j, \ldots, x_{n-1}^j$. Entonces, podemos definir las siguientes aplicaciones en el plano:

$$\begin{aligned} f_{1+r}^t : \quad & G_t - x_r^t \longrightarrow G_{1+r} - x_t^{1+r} \\ & x_i^t \longmapsto x_i^{1+r} \quad si\ 1 \leq i \leq t-1 \ \text{ ó } \ 1+r \leq i \leq n-1 \\ & x_i^t \longmapsto x_{i+1}^{1+r} \quad si\ t \leq i < r, \end{aligned}$$

donde $1 \leq t \leq \text{mín}\{3, k-1\}$ y $t \leq r \leq k-1$ para cada t. En el caso en que todas estas aplicaciones sean isomorfas diremos que son *ordenaciones compatibles*.

Ahora sí podemos enunciar un teorema general de existencia:

Teorema 6.3.1 *Los grafos $G_1, \ldots, G_k$ (usando la notación anteriormente definida) tienen una reconstrucción G si, y sólo si, sus vértices tienen una ordenación compatible.*

No daremos la demostración de dicho teorema en este trabajo. No obstante, sí que detallaremos la creación de una reconstrucción G a partir de $G_1, \ldots, G_k$ que se da en ella.

Marquemos n puntos, $v_1, \ldots, v_n$, como vértices de G. Dibujemos una arista con extremos v_i y v_j, con $2 \leq i < j \leq n$, si x_{i-1}^1 y x_{j-1}^1 están unidos por una arista en G_1. Para $i \geq 3$, unamos v_1 y v_i con una arista cuando x_1^2 y x_{i-1}^2 están unidos por una arista en G_2. Finalmente, si $k > 2$, unamos v_1 y v_2 sólo si x_1^3 y x_2^3 están unidos por una arista en G_3. Observemos que se ha construido G a partir de G_1, G_2 y G_3.

La condición de ordenaciones compatibles sólo asegura que los otros G_i se pueden obtener a partir de G. Por otro lado, estas condiciones son más teóricas que prácticas, ya que no existe una manera obvia ni se ha descubierto ningún método para determinar si existen o no ordenaciones compatibles. En realidad, lo que ocurre es que cuando $k = 2$ los vértices de G_1 y G_2 siempre se pueden ordenar de manera que el isomorfismo

$$G_1 - x \longleftrightarrow G_2 - y$$

sea de la forma que queremos. Sin embargo, para $k > 2$ las complicaciones se incrementan considerablemente y, de momento, no se ha encontrado un método para evitarlas.

La Conjetura de Ulam para grafos tiene un enunciado equivalente en términos de estas ordenaciones compatibles:

Conjetura 6.3.2 (Conjetura de Ulam para grafos, versión 3) *Sea i tal que $1 \leq i \leq n-1$. Si x_i^j e y_i^j son ordenaciones compatibles de los vértices G_j para $1 \leq j \leq n$, entonces la aplicación $x_i^j \longrightarrow y_i^j$ es un isomorfismo de G_j en sí mismo para cada j.*

En general, aún no se conoce nada sobre cuándo tiene lugar la unicidad de una reconstrucción. Sólo se sabe que para $k = 2$, como hemos visto, las reconstrucciones nunca son únicas y que para $k = 3$ podría haber unicidad.

Bibliografía

[1] M. Aigner. *Graphentheorie. Eine entwicklung aus dem 4-farbenproblem.* Teubner, Stuttgart (1984).

[2] M. Aigner y G. M. Ziegler. *Raisonnements Divins.* Springer-Verlag, France (2002), 237–239.

[3] K. Appel y W. Haken. *Every planar graph is four colorable.* American Mathematical Society (1989).

[4] K. Appel y W. Haken. *Every planar map is 4-colorable.* I. Discharging. Illinois J. Math. **21** (1977), 429–490.

[5] J. Blaẑek y M. Koman. *A minimal problem concerning complete plane graphs.* M. Fiedler (Ed.), Theory of Graphs and its Applications, Proceedings of the Symposium on Smolenice (1963), Publ. House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague (1964), 113–117.

[6] B. Bollobás. *Graph Theory. An introductory course.* Graduate Texts in Mathematics **63**, Springer-Verlag, Berlín (1979), 88–93.

[7] R. L. Brooks. *On colouring the nodes of a network.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **37** (1941), 194–197.

[8] P. A. Catlin. *Hajós' graph coloring conjecture: variations and counterexamples.* J. Combin. Theory (B) **26** (1979), 268–274.

[9] R. B. Eggleton. *Ph. D. thesis.* Univ. of Calgary (1973).

[10] P. Erdös y R. K. Guy. *Crossing number problems.* The American Mathematical Monthly **80**, núm. 1 (1973), 52–58.

[11] P. Erdös, A. Hajnal y J. W. Moon. *A problem in graph theory.* The American Mathematical Monthly **71**, núm. 10 (1964), 1107–1110.

[12] L. Euler. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.* Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae **8** (1736), 128–140, Opera Omnia Series **1-7** (1766), 1–10.

[13] F. García y M. L. Puertas. *El teorema de la curva de Jordan.* Divulgaciones Matemáticas **6**, núm. 1 (1998), 43–60.

[14] M. R. Garey y D. S. Johnson. *Crossing number is NP-complete*. SIAM J. Alg. Disc. Meth. **4** (1983), 312–316.

[15] M. R. Garey y D. S. Johnson. *The complexity of near optimal graph coloring*. J. Ass. Comp. Mach. **23** (1976), 43–49.

[16] R. K. Guy. *A combinatorial problem*. Nabla (Bull. Malayan Math. Soc.) **7** (1960), 68–72.

[17] R. K. Guy. *Crossing numbers of graphs*. Graph Theory and Applications **303**, Lecture Notes in Mathematics.

[18] R. K. Guy. *Latest results on crossing numbers*. Recent Trends in Graph Theory, Springer, New York (1971), 143–156.

[19] R. K. Guy. *The decline and fall of Zarankiewicz's theorem*. F. Harary (Ed.), Proof Techniques in Graph Theory, Academic Press, New York (1969), 63–69.

[20] R. K. Guy, T. A. Jenkyns y J. Schaer. *The toroidal crossing number of the complete graph*. J. Combinatorial Theory **4** (1968), 376–390.

[21] H. Hadwiger. *Über eine klassification der streckenkomplexe*. Viertelj. Schr. Naturforsch. Ges. Zürich **88** (1943), 133–142.

[22] F. Harary. *Graph Theory*. Perseus Books Group (1999).

[23] F. Harary y M. Palmer. *On similar points of a graph*. J. Math. Mech. **15** (1966), 623–630.

[24] F. Harary y M. Palmer. *The reconstruction of a tree from its maximal subtrees*. Canad. J. Math. **18** (1966), 803–810.

[25] P. J. Heawood. *Map colour theorem*. Quart. J. Pure Appl. Math. **24** (1890), 332–338.

[26] R. M. Karp. *Reducibility among combinatorial problems*. R. E. Miller y J. W. Thatcher (Ed's), *Complexity of computer computations*, Plenum Press, New York (1972), 85–103.

[27] P. J. Kelly. *A congruence theorem for trees*. Pacific J. Math. **7** (1957), 961–968.

[28] A. B. Kempe. *On the geographical problem of the four colors*. Amer. J. Math. **2** (1879), 193–200.

[29] D. J. Kleitman. *The crossing number of* $K_{5,n}$. Journal of Combinatorial Theory **9** (1970), 315–323.

[30] J. Pach, R. Radoiĉić, G. Tardos y G. Tóth. *Improving the crossing lemma by finding more crossings in sparse graphs*. Proceedings of the 19th Annual ACM Symposium on Computational Geometry (2004).

[31] J. Pach, J. Spencer y G. Tóth. *New bounds on crossing numbers*. Discrete Comp. Geom. **24** (2000), 623–644.

[32] S. Pan y R. B. Richter. *The crossing number of K_{11} is 100.* Publ. online en Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com) DOI 10.1002/jgt.20249 (2007).

[33] N. Robertson, D. Sanders, P. D. Seymour y R. Thomas. *The Four-Color Theorem.* J. Combin. Theory **70** (1997), 2–44.

[34] N. Robertson, P. D. Seymour y R. Thomas. *Hadwiger's conjecture for K_6-free graphs.* Combinatorica **13** (1993), 279–361.

[35] S.M. Ulam. *A collection of mathematical problems.* Wiley (Interscience), New York (1960).

[36] K. Wagner. *Bemerkungen zu Hadwigers vermutung.* Math. Ann. **141** (1960), 433–451.

[37] A. T. White. *Topological graph theory.* Selected Topics in Graph Theory, Academic Press, New York (1978).

[38] D. R. Woodall. *Cyclic-order graphs and Zarankiewicz's crossing-number conjecture.* J. Graph Theory **17** (1993), 657–671.

[39] Z. Yuan, T. Ling, Y. Huang y J. Liu. *The crossing number of $C(8,2)\sharp P$.* Graphs and Combinatorics **24**, Springer-Verlag (2008), 597–604.

[40] K. Zarankiewicz. *On a problem of P. Turán concerning graphs.* Fund. Math. **41** (1954), 137–145.

Índice alfabético

k-clique, 103
k-colorable, 86
k-coloración, 86
k-conjunto cortante, 44
k-cromático, 88
k-elevación, 37
árbol, 18
    expansivo, 19
4 colores
    teorema de los, 98
5 colores
    teorema de los, 100
6 colores
    teorema de los, 99
adición
    de aristas, 12
    de vértices, 41
algoritmo del miope, 90
arista, 5
    incidente, 5
    múltiple, 6
bloque, 45
Brooks
    teorema de, 94
camino, 9
    cerrado, 9
    elemental, 9
    final de un, 9
    origen de un, 9
    simple, 9
    vértices interiores de un, 9
cara, 28
    exterior, 29
    incidente, 29
ciclo, 9
color, 86
coloración, 85
componente conexa, 11
conectividad κ, 45
conjunto cortante, 44
conjunto independiente, 105
contracción
    de aristas, 13
corte, 6
dibujo, 53
    óptimo, 54
    buen, 53
    sin cortes, 23
distancia, 17
elevación, 36
    externa, 38
    interna, 38
    segmento de una, 37
    transferible, 40
eliminación
    de aristas, 12
    de vértices, 13
equivalencia
    de k-elevaciones, 37
Euler
    fórmula de, 32
    teorema de, 8
evitar elevaciones, 37
extremo, 5
frontera, 29
grado
    de un vértice, 7
    de una cara, 29
    mínimo δ, 8
    máximo Δ, 8

grafo, 5
  $(k-1)$-partito completo, 104
  r-regular, 9
  bipartito, 16
    completo $K_{m,n}$, 16
  cíclico C_n, 16
  completo K_n, 15
  conexo, 11
  contraíble, 13
  dual, 29
  nulo N_n, 16
  planar, 23
  plano, 23
  plano P_n, 16
  simple, 6
    intrínseco, 86
  trivial, 15
Hadwiger
  conjetura de, 101
Hajós
  conjetura de, 101
igualdad
  de grafos, 6
invariante, 7
isomorfía
  de grafos, 6
Jordan
  curva de, 24
    exterior de una, 24
    interior de una, 24
    teorema de la, 24
Kuratowski
  teorema de, 47
lazo, 6
número
  cromático χ, 88
  de aristas α, 7
  de caras ϕ, 29
  de componentes conexas k, 11
  de corte cr, 55
  de independencia, 105
  de vértices ν, 7
ordenaciones compatibles, 120
propiedad (n,k), 108
propiedad(n,m,k,k), 110
puente, 12
reconstrucción, 112
representación planar, 23
responsabilidad
  de un corte, 60
  de un vértice, 60
sesgar elevaciones, 37
solapar elevaciones, 37
subdivisión, 42
subgrafo, 12
  inducido, 93
sucesión de grados, 8
sugrafo
  expansivo, 12
supresión
  de vértices, 41
Turán
  grafo de, 105
  teorema de, 104
Ulam
  conjetura de, 111
    (para grafos, versión 1), 112
    (para grafos, versión 2), 112
    (para grafos, versión 3), 121
vértice, 5
  adyacente, 5
  de anexión, 36
Zarankiewicz
  conjetura de, 68