UNIVERSITAT DE BARCELONA

PROBLEMA DEL SUBESPACIO INVARIANTE

Trabajo Académicamente Dirigido

Autor: Carlos Domingo.
Tutores: F. Javier Soria, Pedro Tradacete.

Licenciatura de Matemáticas - Universitat de Barcelona
Curso 2010-2011

Índice general

Prólogo

A lo largo de las últimas décadas, el estudio del Problema del Subespacio Invariante ha supuesto una fuente de progresos en la teoría moderna de operadores. En el Capítulo 1, daremos una presentación general del problema, lo resolveremos para los casos más triviales (espacios de dimensión finita y espacios no separables) y explicaremos algunos resultados obtenidos hasta la fecha, terminando con la demostración de existencia de subespacios invariantes para operadores compactos.

En el Capítulo 2, recogemos una serie de conceptos y resultados, principalmente de análisis funcional, que necesitaremos tener presentes a lo largo del texto.

A continuación, en el Capítulo 3, llegamos a la parte central del trabajo, donde presentamos el contraejemplo de C. Read para el caso general del problema. Para ello, seguimos el libro de B. Beauzamy [3], que explica la construcción de un operador en ℓ^1 sin subespacios invariantes no triviales. La construcción presentada en [3] es una simplificación de A.M. Davie del resultado original de C. Read. A lo largo del capítulo, nos encontraremos con una serie de hipótesis de crecimiento sobre un par de sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ que son la base de la construcción del contraejemplo. Para demostrar la existencia de un operador sin subespacios invariantes, basta suponer un crecimiento suficientemente rápido de estas sucesiones, pero tener controladas las condiciones exactas implica poder construir sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ concretas y, en consecuencia, dar un operador sin subespacios invariantes particular. Por este motivo, en el Apéndice A, recogeremos todas y cada una de las condiciones de crecimiento que iremos encontrando a lo largo del Capítulo 3. Sin embargo, una vez terminada la recopilación, nos encontraremos con que hay una serie de condiciones que no sólo dependen de los términos de $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$, sino que también incluyen unas constantes que no tendremos controladas. Así pues, terminaremos el apéndice haciendo una estimación de estas constantes, para poder obtener un conjunto de condiciones que sean realmente útiles. Uno de estos cálculos, no obstante, nos obligará a recurrir a un reciente artículo de W. Sliwa [13], en el que el autor, también basándose en la construcción presentada en [3], da una versión cuantificada de un lema que es la clave para calcular la constante que nos faltaba. Además, W. Sliwa consigue resumir todas las hipótesis de crecimiento en una sola condición, llegando así a un contraejemplo particular. Este resultado, que aquí sólo enunciaremos, será el punto final de este trabajo.

Barcelona, junio de 2011
Carlos Domingo

Capítulo 1

Introducción al Problema del Subespacio Invariante

El problema del subespacio invariante plantea la siguiente cuestión: Si E denota un espacio de Banach, ¿es cierto que para todo operador lineal y acotado $T \in \mathcal{L}(E)$, siempre existe algún subespacio $F \subseteq E$ cerrado que es $T-$invariante y no-trivial? (es decir, $T(F) \subseteq F$, $F \neq E$ y $F \neq \{0\}$).

Primero de todo veamos los casos para los que conocemos la respuesta al problema. Por ejemplo, si E es complejo y de dimensión finita, entonces siempre tenemos subespacios invariantes. En efecto, supongamos $\dim(E) = n$ y denotemos por $\text{vap}(T) = \{\lambda_1, ..., \lambda_m\} \subseteq \mathbb{C}$ al conjunto de valores propios de T, que sabemos que es no vacío y finito (de hecho, $1 \leq m \leq n$). Además, se tiene la descomposición de E en subespacios propios

$$E = \ker(T - \lambda_1 Id) \oplus ... \oplus \ker(T - \lambda_m Id),$$

con cada uno de los sumandos directos distinto del subespacio nulo. De esta manera, si $1 < m \leq n$, para cada $k \in \{1, ..., m\}$, el subespacio $\ker(T - \lambda_k Id)$ es invariante por T, no nulo, distinto del total y cerrado, por ser de dimensión finita. El caso $m = 1$ corresponde al operador $T = \lambda_1 Id$, que deja invariante cualquier subespacio. Asimismo, en el caso real y de dimensión finita mayor que dos, también podemos asegurar siempre la existencia de subespacios invariantes (véase el Apartado 2.1). Continuemos con esta primera aproximación al problema. Para ello, demos antes una definición:

Definición 1.1. *Dado un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ y un elemento $x \in E$, se dice que x es un* punto cíclico *si*

$$\mathcal{O}_T(x) := \overline{\langle x, Tx, T^2x, ... \rangle} = E.$$

Claramente, si existe algun punto $x \in E$ diferente del cero que no sea cíclico, entonces $\mathcal{O}_T(x)$ es un subespacio invariante, cerrado y no trivial. De hecho, se puede reescribir el Problema del Subespacio Invariante en terminos de puntos cíclicos, usando el siguiente hecho:

Proposición 1.2. *Un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ no tiene subespacios invariantes no triviales (cerrados) si y sólo si todo elemento no nulo de E es cíclico.*

Demostración. Como hemos comentado, si no hay subespacios invariantes no triviales, necesariamente todo elemento no nulo es cíclico. Recíprocamente, si T tiene un subespacio invariante no trivial F, tomando un elemento $x \in F$ no nulo, se tiene que $\mathcal{O}_T(x) \subseteq F \subsetneq E$ y por lo tanto, x no es cíclico. □

Además, $\mathcal{O}_T(x)$ es separable (es decir, contiene un subconjunto denso y numerable), pues

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} (q_k + ir_k) T^k x, n \in \mathbb{N}, q_k, r_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

es un subconjunto numerable y denso en $\mathcal{O}_T(x)$. De este modo, si el espacio E no es separable, no puede haber puntos cíclicos y por lo tanto, $\mathcal{O}_T(x)$ será un subespacio invariante no trivial para cada $x \neq 0$. Resumiendo, si pretendemos encontrar un operador sin subespacios invariantes no triviales, necesariamente tendrá que ser en un espacio Banach separable de dimensión infinita. Además, dicho operador deberá cumplir que todo punto no nulo sea cíclico. Más aún, veamos que el operador y todos los operadores que conmuten con él, deberan ser inyectivos y con imagen densa en E. Para argumentar esto, demos primero una definición:

Definición 1.3. *Dado $T \in \mathcal{L}(E)$, un subespacio $F \subseteq E$ se llama T-*hiperinvariante* si es invariante para todo operador que conmuta con T.*

Ahora, es facil probar que el núcleo y la imagen de un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ son siempre subespacios T-hiperinvariantes. En efecto, si S conmuta con T y $x \in \ker(T)$, entonces

$$T(S(x)) = S(T(x)) = S(0) = 0,$$

con lo que $S(x) \in \ker(T)$. Además, como para cada $x \in E$ se tiene $S(T(x)) = T(S(x))$, deducimos que

$$S(\mathrm{Im}(T)) \subseteq \mathrm{Im}(T).$$

De este modo, si T no tiene subespacios invariantes no triviales, todo operador que conmute con él deberá ser inyectivo (pues de no ser así, su núcleo seria T-invariante y no trivial), y por el mismo motivo, deberá tener imagen densa en E.

Más resultados, ya no tan triviales, se han ido obteniendo a lo largo de la historia. En 1935, J. von Neumann probó que todo operador compacto en espacios de Hilbert tiene subespacios invariantes no triviales, hecho que fue generalizado a espacios de Banach en 1954 por N. Aronszajn y K.T. Smith [2]. En 1973, V.I. Lomonosov [9] extiende aún más este resultado, probando que si T es un operador que conmuta con otro operador S no escalar, que a su vez conmuta con un operador compacto K, entonces T tiene subespacios invariantes no triviales. Más adelante, en los años 80, P. Enflo [6] y C. Read [11, 12] dieron construcciones de operadores que carecían de subespacios invariantes no triviales, con lo que se llegó por primera vez a una respuesta negativa al problema. A pesar de haber resuelto el caso más general, todos los contraejemplos hasta la fecha son sobre espacios de Banach no reflexivos. De este modo, aún quedan preguntas interesantes por responder: ¿tiene todo operador en un espacio reflexivo subespacios invariantes?, ¿y si lo restringimos aún más, pidiendo que el espacio sea de Hilbert[1]? En este trabajo, dedicaremos un capítulo entero a la construcción detallada del contraejemplo más elemental, en el espacio ℓ^1. No obstante, para acabar esta introducción, daremos una prueba debida a M. Hilden [10] del resultado de N. Aronszajn y K.T. Smith para operadores compactos.

[1] El Corolario 2.8 del Teorema Pequeño de Riesz afirma que todo espacio de Hilbert es reflexivo.

1.1. Solución para Operadores Compactos

Antes de todo, recordemos que un operador entre espacios de Banach $T : E \longrightarrow F$ se llama *compacto* si la imagen de la bola unidad

$$B_E = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$$

por T es un conjunto relativamente compacto en F, es decir, si $\overline{T(B_E)} \subseteq F$ es compacto. Para esta clase de operadores, tenemos la ventaja de poder describir su espectro de una forma bastante detallada. Por un lado, la Alternativa de Fredholm afirma que

$$\mathrm{vap}(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}.$$

Por otro lado, sabemos que $\sigma(T)$ es o bien finito, o bien una sucesión con el cero como único punto de acumulación (estos resultados pueden encontrarse, por ejemplo, en el capítulo 4 de [4]). Recordemos también el siguiente teorema clásico de la teoría espectral:

Teorema 1.4 (Teorema de Gelfand)**.** *Sea E un espacio de Banach. Para todo operador $T \in \mathcal{L}(E)$, se cumple*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}},$$

donde $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} \leq \|T\|$ es el radio espectral *de T.*

La prueba de este resultado se puede encontrar en [1, Teorema 6.12, p243].

Teorema 1.5. *Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Todo operador $T : E \longrightarrow E$ compacto no nulo tiene un subespacio hiperinvariante no trivial.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que E es un espacio de Banach complejo y que $\|T\| = 1$. Además, por la Alternativa de Fredholm, si hubiese algún valor del espectro distinto de cero, sería también valor propio y por lo tanto podríamos construir un subespacio T-hiperinvariante [2]. Podemos suponer así que $\sigma(T) = \{0\}$ y, aplicando el Teorema 1.4, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Consideremos ahora el conmutador de T,

$$\mathcal{A} = \{S \in \mathcal{L}(E) : ST = TS\}.$$

Podemos construir para cada $x \in E$ el subespacio $\mathcal{A}x = \{Sx : S \in \mathcal{A}\}$, que es T-hiperinvariante. Supongamos que siempre fuera trivial [3] (en caso contrario habríamos acabado), es decir

$$\overline{\mathcal{A}x} = E \text{ para todo } x \neq 0. \tag{1.1}$$

[2]Si $\lambda \in \mathrm{vap}(T)$, el subespacio de vectores propios de valor propio λ es $\ker(T - \lambda Id)$, que hemos probado anteriormente que es $(T - \lambda Id)$-hiperinvariante, pero esto equivale a ser T-hiperinvariante.

[3]Como $Id \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}x \neq 0$ para toda $x \neq 0$, luego suponer que $\mathcal{A}x$ siempre es trivial equivale a (1.1)

Dado que $T \neq 0$, podemos tomar $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| > 1$ y $\|Tx_0\| > 1$. Definimos ahora la bola abierta de centro x_0 y radio 1,

$$B_0 = \{x \in E : \|x - x_0\| < 1\},$$

que cumple $0 \notin \overline{B_0}$ por construcción, y $0 \notin \overline{T(B_0)}$. En efecto, supongamos que existiera una sucesión $\{x_n\}_n \subseteq B_0$ tal que $Tx_n \overset{n}{\to} 0$. Se tiene,

$$\begin{aligned} \|Tx_0\| \leq& \|Tx_0 - Tx_n\| + \|Tx_n\| \\ \leq& \|T\|\|x_0 - x_n\| + \|Tx_n\| \\ <& 1 + \|Tx_n\|, \end{aligned}$$

que pasando al límite cuando la n tiende a infinito, implica $\|Tx_0\| \leq 1$ y se tiene una contradicción. Ahora, por (1.1), para cada $x \neq 0$, $\mathcal{A}x \cap B_0 \neq \varnothing$, por lo que existe un operador $S \in \mathcal{A}$ tal que $Sx \in B_0$. De este modo, podemos recubrir $E \setminus \{0\}$, y en particular, $\overline{T(B_0)}$, por los abiertos de la forma

$$U_S = \{x \in E : \|Sx - x_0\| < 1\}.$$

Usando ahora la compacidad de $\overline{T(B_0)}$, podemos tomar un subrecubrimiento finito. Sean $\{S_1, ..., S_n\} \subseteq \mathcal{A}$ tales que

$$\overline{T(B_0)} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{S_k}.$$

Como $Tx_0 \in T(B_0)$, existirá un índice $1 \leq j_1 \leq n$ de manera que $Tx_0 \in U_{S_{j_1}}$, y por lo tanto, $x_1 = S_{j_1}Tx_0 \in B_0$. Así, $Tx_1 \in T(B_0)$, por lo que existe $1 \leq j_2 \leq n$ tal que $x_2 = S_{j_2}Tx_1 \in B_0$. Inductivamente, podemos construir una sucesión de índices $\{j_k\}_k \subseteq \{1, ..., n\}$ tales que la sucesión $\{x_k\}_k$ definida por recursión

$$x_{k+1} = S_{j_{k+1}}Tx_k,$$

está contenida en la bola B_0. Usando ahora que los operadores S_j conmutan con T, se tiene

$$\begin{aligned} \|x_k\| =& \|S_{j_k} \cdots S_{j_1}T^k x_0\| \\ \leq& \|S_{j_k}\| \cdots \|S_{j_1}\|\|T^k\|\|x_0\| \\ \leq& (\max_{1\leq j\leq n} \|S_j\|)^k \|T^k\|\|x_0\| \\ =& \left\|(\max_{1\leq j\leq n} \|S_j\|T)^k\right\|\|x_0\|, \end{aligned}$$

que tiende a 0 cuando $k \to \infty$ puesto que $\lim_k \|T^k\|^{\frac{1}{k}} = 0$. Como $0 \notin \overline{B_0}$, llegamos a una contradicción, por lo que no se puede dar (1.1) y existirá algún $x \in E$ para el que $\overline{\mathcal{A}x}$ es un subespacio T-hiperinvariante no trivial.

□

Observamos que en la demostración hemos considerado los subespacios hiperinvariantes $\overline{\mathcal{A}x}$ y hemos llegado a que para algún $x \in E \setminus \{0\}$, este espacio será no trivial. Pero, ¿ha sido casualidad?, es decir, ¿podría haber pasado que todo operador compacto tuviese subespacios hiperinvariantes no triviales y que, en cambio, no necesariamente alguno fuera de la forma $\overline{\mathcal{A}x}$? Veamos que no mediante un resultado análogo a la Proposición 1.2 que teníamos para subespacios invariantes.

Proposición 1.6. *Un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ no tiene subespacios hiperinvariantes no triviales (cerrados) si y sólo si $\overline{\mathcal{A}x} = E$ para todo $x \in E \setminus \{0\}$.*

Demostración. Claramente, si T carece de subespacios hiperinvariantes no triviales, necesariamente, $\overline{\mathcal{A}x} = E$ para todo $x \in E \setminus \{0\}$. Recíprocamente, supongamos que $\overline{\mathcal{A}x} = E$ para todo $x \in E \setminus \{0\}$ y que T tiene un subespacio hiperinvariante $F \subseteq E$ no trivial. Sea $x \in F \setminus \{0\}$. Como F es hiperinvariante, tenemos que

$$\mathcal{A}x = \{Sx : ST = TS\} \subseteq F,$$

y por ser F cerrado,

$$E = \overline{\mathcal{A}x} \subseteq F,$$

con lo que llegamos a una contradicción con la no trivialidad de F. $\square$

Así, podríamos decir que el conjunto de subespacios

$$\mathcal{H}_T = \{\overline{\mathcal{A}x} : x \in E\}$$

forma una «base» de subespacios T-hiperinvariantes cerrados, en el sentido que todo subespacio $F \subseteq E$ que sea T-hiperinvariante se puede escribir como

$$F = \bigcup_{x \in F} \overline{\mathcal{A}x}.$$

De hecho, para los subespacios T-invariantes cerrados, tenemos un resultado análogo con el conjunto

$$\mathcal{I}_T = \{\mathcal{O}_T(x) : x \in E\},$$

puesto que todo subespacio $F \subseteq E$ que sea T-invariante se puede escribir como

$$F = \bigcup_{x \in F} \mathcal{O}_T(x).$$

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo, daremos los resultados necesarios para el desarrollo del trabajo. Por regla general y a menos que sea importante por alguna otra razón, excluiremos todas aquellas demostraciones y definiciones que estén comprendidas en el temario del curso de Análisis Funcional impartido en la Universidad de Barcelona.

2.1. Complejificación de un Operador

Definición 2.1. *Sea E un espacio vectorial real. Diremos que un espacio vectorial complejo $\tilde{E}$ es* complejificación *de E si:*

(a) Existe una aplicación $\mathbb{R}$- lineal e inyectiva $j_E : E \longrightarrow \tilde{E}$.

(b) $\tilde{E} = j_E(E) \oplus i j_E(E)$.

Observamos que podemos construir fácilmente una complejificación de un espacio vectorial real E tomando $\tilde{E} = E_{\mathbb{C}} := E \oplus iE$. En efecto, la aplicación $j_E : E \longrightarrow E_{\mathbb{C}}$ definida por $j_E(x) = x + i0$ para todo $x \in E$ cumple la propiedad (a), mientras que la propiedad (b) se tiene por construcción. Además, la complejificación de un espacio vectorial real es única salvo isomorfismo. A $E_{\mathbb{C}}$ la llamaremos *complejificación estándar* de E.

Para dotar ahora a una complejificación (de momento, puramente algebraica) de una norma, nos interesará que se cumplan propiedades de los números complejos como $|t| = |t+0i|$, si $t \in \mathbb{R}$, y $|z| = |\bar{z}|$, si $z \in \mathbb{C}$. Esto nos conduce a la siguiente definición:

Definición 2.2. *Dado un espacio normado real $(E, \|\cdot\|_E)$, y un espacio normado complejo $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$, con $\tilde{E}$ complejificación de E, diremos que la norma $\|\cdot\|_{\tilde{E}}$ es* razonable *si*

(i) $\|x\|_E = \|j_E(x)\|_{\tilde{E}}$ para todo $x \in E$.

(ii) $\|j_E(x) + i j_E(y)\|_{\tilde{E}} = \|j_E(x) - i j_E(y)\|_{\tilde{E}}$ para todo $x, y \in E$.

En este caso, diremos que $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$ es una complejificación razonable *del espacio normado real $(E, \|\cdot\|_E)$.*

Es un cálculo probar que las normas razonables cumplen también la siguiente propiedad:

$$\|j_E(x) + ij_E(y)\|_{\tilde{E}} \geq \text{máx}\{\|x\|_E, \|y\|_E\} \qquad \forall x, y \in E. \tag{2.1}$$

Proposición 2.3. *Una complejificación razonable $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$ de un espacio de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$, es también Banach.*

Demostración. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\tilde{E}$, con $z_n = x_n + iy_n$ para ciertos $x_n, y_n \in E$ (abusando de notación, pues tendríamos que escribir $z_n = j_E(x_n) + ij_E(y_n)$). Por la propiedad (2.1), las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son de Cauchy en E, y por lo tanto convergen a ciertos elementos x_0 e y_0 de E, respectivamente. Ahora, si $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\|z_n - z_0\|_{\tilde{E}} = \|x_n - x_0 + i(y_n - y_0)\|_{\tilde{E}} \leq \|x_n - x_0\|_E + \|y_n - y_0\|_E \xrightarrow{n} 0,$$

con lo que $\{z_n\}$ converge a $z_0 \in \tilde{E}$. □

Finalmente, daremos el teorema que necesitaremos para lo que nos ocupa:

Teorema 2.4. *Sean E y F dos espacios normados reales y sean $E_{\mathbb{C}}$ y $F_{\mathbb{C}}$ sus respectivas complejificaciones estándar. Entonces*

$$\|x + iy\| := \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x \cos\theta + y \sin\theta\|$$

es una norma razonable en las complejificaciones. Además, si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces el operador $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow F_{\mathbb{C}}$ definido por

$$T_{\mathbb{C}}(x + iy) = T(x) + iT(y)$$

cumple $T_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$ con norma $\|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|$.

Demostración. La definición dada es trivialmente una norma en la complejificación. Veamos que es razonable:

(i)

$$\|x + i0\| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x \cos\theta\| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |\cos\theta| \|x\| = \|x\|.$$

(ii)

$$\begin{aligned}\|x + iy\| = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x \cos\theta + y \sin\theta\| &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x \cos(-\theta) + y \sin(-\theta)\| \\ &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x \cos\theta - y \sin\theta\| = \|x - iy\|.\end{aligned}$$

Ahora, por un lado tenemos $\|T_{\mathbb{C}}\| \geq \|T\|$. En efecto,

$$\|T_{\mathbb{C}}\| = \sup_{x+iy \neq 0} \frac{\|T_{\mathbb{C}}(x + iy)\|}{\|x + iy\|} \geq \sup_{x+i0 \neq 0} \frac{\|T_{\mathbb{C}}(x + i0)\|}{\|x + i0\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T\|$$

Por otro lado, sea $x + iy \in E_{\mathbb{C}}$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Se cumple que

$$\begin{aligned}\|(Tx)\cos\theta + (Ty)\sin\theta\| &= \|T(x \cos\theta + y \sin\theta)\| \\ &\leq \|T\| \cdot \|x \cos\theta + y \sin\theta\| \\ &\leq \|T\| \cdot \|x + iy\|.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|T_{\mathbb{C}}\| \leq \|T\|$ y se tiene la igualdad. □

Con estas herramientas presentadas, veamos qué pasa con los subespacios invariantes. En general, todo operador $T \in \mathcal{L}(E)$ con E espacio de Banach complejo de dimensión finita tiene subespacios invariantes. ¿Se puede extender este resultado al caso real? La respuesta es que sí, siempre y cuando la dimensión del espacio real sea mayor que dos. Si el operador en cuestión es múltiplo de la identidad, cualquier subespacio es invariante. Si no lo es, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.5. *Sea E un espacio de Banach real de dimensión finita. Para un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ no múltiplo de la identidad, se tiene:*

(i) Si la dimensión de E es impar, entonces T tiene un subespacio hiperinvariante no trivial.

(ii) Si la dimensión de E es par y mayor que dos, entonces T tiene un subespacio invariante no trivial, pero no necesariamente hiperinvariante.

(iii) Si la dimensión de E es exactamente 2, entonces T puede no tener subespacios invariantes no triviales.

Demostración. (i) Si la dimensión de E es impar, el polinomio característico de T tendrá grado también impar y en consecuencia, una raíz $\lambda \in \mathbb{R}$. Para este valor propio, el subespacio $\ker(\lambda Id - T)$ es no trivial, pues T no es múltiplo de la identidad, y es hiperinvariante, tal y como hemos visto en la introducción.

(ii) Si la dimensión de E es par, consideremos $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \longrightarrow E_{\mathbb{C}}$ como en el Teorema 2.4. $T_{\mathbb{C}}$ tendrá un valor propio complejo λ. Sea $z = x + iy$ un vector propio de valor propio λ y $F = \langle x, y \rangle \subseteq E$. Como por hipótesis la dimensión de E es mayor que dos, se tiene que F no es un subespacio trivial. Además $T(F) \subseteq F$, en efecto:

$$T_{\mathbb{C}}(x + iy) = \lambda(x + iy) = ... = \mathrm{Re}(\lambda)x - \mathrm{Im}(\lambda)y + i(\mathrm{Im}(\lambda)x + \mathrm{Re}(\lambda)y) = T(x) + iT(y),$$

con lo que $T(x), T(y) \in F$ y se tiene $T(F) \subseteq F$.

(iii) En $\mathbb{R}^2$, una rotación de ángulo ϕ con $0 < \phi < \pi$ es lineal y sus únicos subespacios invariantes son 0 y $\mathbb{R}^2$, ambos triviales.

□

De este modo, concluimos que todo operador $T \in \mathcal{L}(E)$, con E espacio de Banach real de dimensión finita mayor que dos, posee subespacios invariantes no triviales.

2.2. Reflexividad

Definición 2.6. *Un espacio de Banach E se llama* reflexivo *si la aplicación*

$$\begin{aligned} F : &E \longrightarrow E^{**} \\ &x \longmapsto F(x)(v) = v(x), \qquad \forall v \in E^* \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios de Banach.

Teorema 2.7 (Teorema Pequeño de Riesz). *Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y H^* su dual. Para todo funcional $v \in H^*$ existe un único $y \in H$ tal que*

$$v(x) = \langle x, y\rangle, \qquad \forall x \in H.$$

Además, la aplicación

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow H^* \\ y &\longmapsto \langle\cdot, y\rangle \end{aligned}$$

es una isometria, antilineal y biyectiva.

La demostración de este teorema se puede encontrar en [4, Teorema 2.8.1, p75]. Además, podemos deducir fácilmente el siguiente resultado:

Corolario 2.8. *Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

Demostración. Denotemos por φ_x al funcional de H^* de la forma $\langle\cdot, x\rangle$ para cada $x \in H$. Por el Teorema Pequeño de Riesz 2.7, la aplicación φ que asigna

$$x \longmapsto \varphi_x$$

es antilineal y biyectiva. Además, es un cálculo comprobar que la forma definida en $H^* \times H^*$ por

$$(\varphi_x, \varphi_y) \longmapsto \langle\varphi_x, \varphi_y\rangle := \langle y, x\rangle$$

determina un producto escalar en H^* que le da una estructura de espacio de Hilbert. Así pues, podemos definir como antes por el Teorema Pequeño de Riesz, una aplicación antilineal y biyectiva φ':

$$v \longmapsto \varphi'_v := \langle\cdot, v\rangle.$$

Ahora, la composición $\Phi := \varphi' \circ \varphi$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, pues es biyectiva y la composición de dos aplicaciones antilineales es lineal, que es lo que queríamos demostrar. En efecto: Si $x \in H$, para todo funcional $v = \varphi_y \in H^*$

$$\Phi(x)(v) = \varphi'_{\varphi_x}(\varphi_y) = \langle\varphi_y, \varphi_x\rangle = \langle x, y\rangle = \varphi_y(x) = v(x),$$

que es la aplicación canónica de la Definición 2.6 de espacio reflexivo.

□

2.3. Completación de un Espacio Normado

Teorema 2.9 (Teorema de Completación). *Sea E un espacio normado no completo. Entonces E es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de un espacio de Banach $\hat{E}$.*

Demostración. Consideramos el espacio de todas las sucesiones de Cauchy en E, y lo denotamos por Σ. Definimos ahora una relación de equivalencia en Σ de la siguiente manera:

$$\{x_n\}_n \sim \{y_n\}_n \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0.$$

La reflexividad y la simetría las cumple trivialmente. Además, si

$$\{x_n\}_n \sim \{y_n\}_n \text{ y } \{y_n\}_n \sim \{z_n\}_n,$$

entonces,

$$\|x_n - z_n\| = \|x_n - y_n + y_n - z_n\| \leq \|x_n - y_n\| + \|y_n - z_n\| \xrightarrow{n} 0,$$

pues por hipótesis los dos sumandos tienden a cero. Con esto, probamos la transitividad y, en consecuencia, que el espacio vectorial cociente $\hat{E} := \Sigma/\sim$ está bien definido. Notaremos por $\widehat{\{x_n\}_n}$ a la clase de $\{x_n\}_n$.

Observamos ahora que dada $\{x_n\}_n \in \Sigma$, la sucesión de normas $\{\|x_n\|\}_n \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy, pues

$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m} 0,$$

por ser de $\{x_n\}_n$ de Cauchy en E. De este modo, como $\mathbb{R}$ sí que es completo, obtenemos la existencia de $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|$. Así, definimos:

$$\|\widehat{\{x_n\}_n}\| := \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Además, esta definición no depende del representante. En efecto, si $\{x_n\}_n \sim \{y_n\}_n$, tenemos

$$|\|x_n\| - \|y_n\|| \leq \|x_n - y_n\| \xrightarrow{n} 0,$$

luego,

$$\|\widehat{\{x_n\}_n}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \|\widehat{\{y_n\}_n}\|.$$

Ahora, queda probar que esta definición es efectivamente una norma en $\hat{E}$ y que, con ella, este espacio es completo.

1. $\|\widehat{\{x_n\}_n}\| \geq 0 \ \forall \widehat{\{x_n\}_n} \in \hat{E}$ y $\|\widehat{\{x_n\}_n}\| = 0 \iff \widehat{\{x_n\}_n} = \widehat{\{0\}_n}$.

La primera parte se deduce del hecho que nuestra candidata a norma está definida como límite de valores no negativos, y que sea cero, es justamente la definición de $\{x_n\}_n \sim \{0\}_n$, o equivalentemente, $\widehat{\{x_n\}_n} = \widehat{\{0\}_n}$.

2. $\|\alpha\widehat{\{x_n\}_n}\| = |\alpha|\|\widehat{\{x_n\}_n}\| \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Para ver esto, simplemente usaremos la linealidad de los límites y de las clases, así como la propiedad análoga para la norma de E.

$$\|\alpha\widehat{\{x_n\}_n}\| = \|\widehat{\{\alpha x_n\}_n}\| = \lim_{n\to\infty} \|\alpha x_n\| = \lim_{n\to\infty} |\alpha|\|x_n\| = |\alpha| \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = |\alpha|\|\widehat{\{x_n\}_n}\|.$$

3. $\|\widehat{\{x_n\}_n} + \widehat{\{y_n\}_n}\| \leq \|\widehat{\{x_n\}_n}\| + \|\widehat{\{y_n\}_n}\|$.

$$\begin{aligned}\|\widehat{\{x_n\}_n} + \widehat{\{y_n\}_n}\| &= \|\widehat{\{x_n + y_n\}_n}\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\| + \|y_n\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|x_n\| + \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \|\widehat{\{x_n\}_n}\| + \|\widehat{\{y_n\}_n}\|.\end{aligned}$$

Veamos ahora que $\hat{E}$ es un espacio de Banach. Sea $\{\hat{x}_k\}_k = \{\widehat{\{x_n^{(k)}\}_n}\}_k$ una sucesión de Cauchy en $\hat{E}$. Para cada k, como $\{x_n^{(k)}\}_n$ es de Cauchy en E, podemos escoger n_k de manera que

$$\|x_m^{(k)} - x_{n_k}^{(k)}\| < k^{-1}, \text{ si } m > n_k. \tag{2.2}$$

Probemos que $\{\hat{x}_k\}_k$ converge a la clase de la sucesión de Cauchy en E

$$\{x_{n_1}^{(1)}, x_{n_2}^{(2)}, ..., x_{n_k}^{(k)}, ...\}. \tag{2.3}$$

Para ello, definimos

$$\bar{x}_{n_k}^{(k)} := \{x_{n_k}^{(k)}, \widehat{x_{n_k}^{(k)}, ..., x_{n_k}^{(k)}}, ...\}.$$

Usando (2.2), para cada k tenemos:

$$\|\hat{x}_k - \bar{x}_{n_k}^{(k)}\| = \|\{\widehat{x_m^{(k)} - x_{n_k}^{(k)}}\}_m\| = \lim_{m\to\infty} \|x_m^{(k)} - x_{n_k}^{(k)}\| \leq k^{-1}. \tag{2.4}$$

Con esto, probemos que (2.3) es efectivamente una sucesión de Cauchy en E. Consideremos la sucesión de término general constante $\{x_{n_k}^{(k)} - x_{n_m}^{(m)}\}_p$, cuya clase hemos denotado por $\bar{x}_{n_k}^{(k)} - \bar{x}_{n_m}^{(m)}$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\|x_{n_k}^{(k)} - x_{n_m}^{(m)}\| &= \lim_{p\to\infty} \|x_{n_k}^{(k)} - x_{n_m}^{(m)}\| = \|\bar{x}_{n_k}^{(k)} - \bar{x}_{n_m}^{(m)}\| \\
&\leq \|\bar{x}_{n_k}^{(k)} - \hat{x}_k\| + \|\hat{x}_k - \hat{x}_m\| + \|\hat{x}_m - \bar{x}_{n_m}^{(m)}\| \\
&\leq \|\hat{x}_k - \hat{x}_m\| + k^{-1} + m^{-1}, \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

que tiende a cero cuando k y m tienden a infinito, pues $\{\hat{x}_k\}_k$ es de Cauchy por hipótesis. De este modo hemos demostrado que nuestro candidato a límite, que denotaremos por $\hat{x}$, es clase de una sucesión de Cauchy en E, es decir, es un elemento de $\hat{E}$. Ahora, otra vez usando (2.4),

$$\|\hat{x} - \hat{x}_k\| \leq \|\hat{x} - \bar{x}_{n_k}^{(k)}\| + \|\bar{x}_{n_k}^{(k)} - \hat{x}_k\| \leq \|\hat{x} - \bar{x}_{n_k}^{(k)}\| + k^{-1}. \tag{2.6}$$

Finalmente, por (2.5),

$$\begin{aligned}
\|\hat{x} - \bar{x}_{n_k}^{(k)}\| &= \|\{\widehat{x_{n_p}^{(p)} - x_{n_k}^{(k)}}\}_p\| = \lim_{p\to\infty} \|\{x_{n_p}^{(p)} - x_{n_k}^{(k)}\}\| \\
&\leq \lim_{p\to\infty} \|\hat{x}_p - \hat{x}_k\| + k^{-1},
\end{aligned}$$

y sustituyendo la expresión en (2.6), obtenemos que $\{\hat{x}_k\}_k$ converge a $\hat{x}$.

$$\lim_{k\to\infty} \|\hat{x} - \hat{x}_k\| \leq \lim_{k\to\infty} \left[\lim_{p\to\infty} \|\hat{x}_p - \hat{x}_k\| + 2k^{-1} \right] = 0.$$

Para terminar la prueba, observamos que la aplicación lineal

$$\begin{aligned}
\Phi : &E \longrightarrow \hat{E} \\
&x \longmapsto \{x, \widehat{x, ..., x}, ...\}
\end{aligned}$$

es inyectiva, con lo que induce un isomorfismo $E \backsimeq \Phi(E)$, e isométrica, pues

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|\Phi(x)\|.$$

Además, $\Phi(E) \subseteq \hat{E}$ es un subespacio denso. Para probarlo, veamos que cualquier $\widehat{\{x_n\}_n} \in \hat{E}$ se puede aproximar por elementos de $\Phi(E)$ de la siguiente forma:

$$\widehat{\{x_n\}_n} = \lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \lim_{k\to\infty} \{x_k, \widehat{x_k, ..., x_k}, ...\}.$$

En efecto,

$$\|\widehat{\{x_k\}_n} - \widehat{\{x_n\}_n}\| = \|\{\widehat{x_k - x_n}\}_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_k - x_n\| \xrightarrow{k} 0,$$

ya que $\{x_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en E. □

2.4. División de Polinomios por Potencias Crecientes

En el Capítulo 3, a menudo haremos argumentos que involucrarán grados de polinomios. En particular, en el Lema 3.6, trataremos con polinomios que no tengan términos de grado «pequeño» y, para ello, usaremos una división que justamente controla esta propiedad en el resto. Esta operación se llama *división por potencias crecientes*, y puesto que no es la división euclídea habitual, incluimos el resultado teórico en el que se basa:

Teorema 2.10. *Sea $n \geq 0$, y sean*

$$A = a_0 + a_1 z + ... + a_p z^p,$$
$$B = b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m,$$

dos polinomios con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, con $b_0 \neq 0$. Entonces existe un único par (Q, R) de polinomios de manera que

$$A = BQ + z^{n+1}R$$

y $\deg Q \leq n$.

Demostración. Probaremos primero la existencia por inducción sobre $n \geq 0$.

Caso $n = 0$. Como $b_0 \neq 0$, podemos tomar $Q = \frac{a_0}{b_0}$, con lo que $A - BQ$ no tiene término independiente. Así, existe un polinomio R tal que $A - BQ = zR$ y se cumple el enunciado.

Supongamos ahora cierto el teorema hasta n y probémoslo para $n + 1$. Por hipótesis de inducción, dividiendo A entre B tenemos $A = BQ + z^{n+1}R$, con $\deg Q \leq n$. Del mismo modo, $R = \lambda B + zS$ con λ un escalar, efectuando la división de R entre B para $n = 0$. Sustituyendo ahora R en la primera igualdad, obtenemos

$$A = B(Q + \lambda z^{n+1}) + z^{n+2}S,$$

con $\deg(Q + \lambda z^{n+1}) \leq n + 1$.

Para ver la unicidad, supongamos que (P, Q) y (P', Q') son dos pares de polinomios que satisfacen el teorema. Restando, se tiene que

$$B(Q - Q') + z^{n+1}(R - R') = 0.$$

De aquí sacamos que z^{n+1} divide a $B(Q - Q')$, y como $b_0 \neq 0$, se deduce que z^{n+1} divide a $Q - Q'$. Pero $\deg(Q - Q') \leq n$, con lo que necesariamente $Q - Q' = 0$, y en consecuencia, $R - R' = 0$. □

2.5. Una base de Schauder para ℓ^1.

Definición 2.11. *Sea E un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $\{e_k\}_k \subseteq E$ es una* base de Schauder *de E si, para todo elemento $x \in E$, existe una única sucesión $\{\alpha_k\}_k \subseteq \mathbb{K}$ tal que*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

Para más información sobre bases de Schauder, véase [8].

Consideremos el espacio de sucesiones

$$\ell^1 = \left\{ a = \{a_k\}_k \subseteq \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty \right\}$$

y la sucesión de elementos $\{e_k\}_k \subseteq \ell^1$ tales que, para cada $k \geq 1$,

$$e_k = (\overbrace{0, ..., 0}^{k-1}, 1, 0, ...).$$

Proposición 2.12. *Los elementos $\{e_k\}_k \subseteq \ell^1$ forman una base de Schauder del espacio ℓ^1, también llamada* base canónica *del espacio ℓ^1.*

Demostración. Sea $a = \{a_k\}_k \in \ell^1$. Para cada $k \geq 1$, definimos $\alpha_k = a_k$. Veamos que, con esta sucesión de escalares, se cumple

$$a = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left\| a - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_1 &= \|(0, ..., 0, a_{n+1}, a_{n+2}, ...)\|_1 \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|, \end{aligned}$$

que tiende a cero cuando n tiende a infinito, por ser la cola de una serie convergente. Además, hay unicidad en la sucesión $\{\alpha_k\}_k$. En efecto, supongamos que existe $k_0 \geq 1$ tal que $\alpha_{k_0} \neq a_{k_0}$. Si $n \geq k_0$,

$$\begin{aligned} \left\| a - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_1 &= \|(a_1 - \alpha_1, ..., a_{k_0} - \alpha_{k_0}, ..., a_n - \alpha_n, a_{n+1}, ...)\|_1 \\ &\geq |a_{k_0} - \alpha_{k_0}| > 0, \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{n \to \infty} \left\| a - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_1 > 0,$$

y por lo tanto

$$a \neq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k.$$

□

En el Capítulo 3, construiremos un espacio E isométricamente isomorfo a ℓ^1, así como una sucesión de elementos $\{f_k\}_k \subseteq E$ que se identificará con $\{e_k\}_k \subseteq \ell^1$. De este modo, tendremos que $\{f_k\}_k$ es una base de Schauder de E, y por lo tanto, todo elemento $g \in E$ se escribirá de forma única como

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k.$$

Esto se tiene gracias al siguiente resultado:

Proposición 2.13. *Sean E y F dos espacios de Banach. Sea $\{e_k\}_k \subseteq E$ una base de Schauder de E y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorfismo. Entonces, la sucesión de elementos $\{f_k\}_k \subseteq F$ definida por $f_k = Te_k$ es una base de Schauder de F.*

Demostración. Sea $y \in F$ y sea $x \in E$ el único elemento de E tal que $y = Tx$. Como $\{e_k\}_k$ es base de Schauder de E, tenemos

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k$$

de forma única. Aplicando T a esta expresión y usando su continuidad, nos queda

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k T e_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k.$$

Además, la unicidad de x y de su expresión en la base $\{e_k\}_k$ nos da la unicidad para la expresión de y. De este modo, probamos que $\{f_k\}_k$ es una base de Schauder de F. □

Capítulo 3

Construcción del Contraejemplo

En este capítulo presentaremos un contraejemplo para el Problema del Subespacio Invariante general. Se trata de un operador en el espacio de sucesiones ℓ^1 que carece de subespacios invariantes no triviales. La construcción de este operador es una simplificación por parte de A.M. Davie [no publicada] de un contraejemplo anterior presentado por C. Read [11, 12]. Para desarrollar este capítulo, seguiremos básicamente [3, Capítulo XIV].

Antes de empezar con la construcción propiamente dicha, haremos una serie de observaciones que nos proporcionarán las bases sobre las cuales encontraremos el contraejemplo. Primero de todo, recordemos que decir que un operador no tiene subespacios invariantes no triviales equivale a que todo punto distinto del cero sea cíclico (véase Proposición 1.2). Otro resultado que necesitaremos es el siguiente:

Lema 3.1. *Todo operador con un punto cíclico puede representarse como la multiplicación por z en la completación del espacio de polinomios $P[z]$ respecto de una cierta norma.*

Demostración. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$ y $x_0 \in E$ un punto cíclico:

$$\mathcal{O}_T(x_0) = \overline{\langle x_0, Tx_0, T^2x_0, ...\rangle} = E.$$

Puesto que E es de dimensión infinita, se tiene que $\{T^k x_0\}_{k\geq 0}$ son linealmente independientes. De este modo, podemos interpretar los iterados como potencias de una indeterminada z y asociar a cada suma finita $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k T^k x_0$ el polinomio $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$.

$$\langle x_0, Tx_0, T^2x_0, ...\rangle \longleftrightarrow \langle 1, z, z^2, ...\rangle = P[z]$$

Pongamos ahora una norma en el espacio de polinomios $P[z]$ coherente con esta identificación,

$$\|p\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right\| := \left\|\sum_{k=0}^{n} a_k T^k x_0\right\|_E$$

y consideremos la completación $\widehat{P[z]}$ del espacio normado resultante (véase Apartado 2.3), que es un espacio de Banach isométricamente isomorfo a E, pues

$$E = \overline{\langle x_0, Tx_0, T^2x_0, ...\rangle} \backsimeq \overline{\langle 1, z, z^2, ...\rangle} = \widehat{P[z]}.$$

Además,

$$T\left(\sum_{k=0}^{n} a_k T^k x_0\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^{k+1} x_0 \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k z^{k+1} = z\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right),$$

con lo que T se convierte en la multiplicación por z en el espacio de polinomios $P[z]$, y por continuidad, en todo $\widehat{P[z]}$. □

Ejemplo 3.2. Consideremos $E = \ell^1$, y $T \in \mathcal{L}(E)$ el *shift* a la derecha,

$$\{a_0, a_1, ...\} \xmapsto{T} \{0, a_0, a_1, ...\}.$$

Tenemos que $e_0 = \{1, 0, 0, ...\} \in \ell^1$ es cíclico por T. En efecto, sea $a = \{a_k\}_k \in \ell^1$ un elemento arbitrario y $\{s_n\}_n$ la sucesión definida por

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k = \{a_0, ..., a_n, 0, 0, ...\}, \qquad n \geq 0.$$

Se cumple que $\{s_n\}_n \subseteq \langle e_0, Te_0, T^2e_0, ...\rangle = \langle e_0, e_1, e_2, ...\rangle = c_{00}$ y aproxima a a, pues

$$\|s_n - a\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \xrightarrow{n} 0$$

por ser la cola de la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| = \|a\|_1 < \infty$.
En este caso, la correspondencia que tenemos $c_{00} \longleftrightarrow P[z]$ es

$$\{a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...\} \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

y la norma que consideramos en $P[z]$,

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

Claramente el *shift* se corresponde con la multiplicación por z sobre $P[z]$ y por continuidad, sobre la completación de $P[z]$ respecto de la norma definida.

Observamos que este último lema nos permite, sin pérdida de generalidad, tratar de encontrar el operador T sin subespacios invariantes como la multiplicación por z en el espacio de polinomios $P[z]$ con una norma adecuada.

Definición 3.3. *Definimos el operador T como la multiplicación por z en el espacio de polinomios $P[z]$, es decir, para cada $p = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k \in P[z]$,*

$$T\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{k+1}.$$

Además, podemos simplificar la notación: si $x_0 \in E$ es un punto cíclico y $p = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in P[z]$, entonces $\sum_{k=0}^{n} a_k T^k x_0 = p(T)x_0 \in E$ se identifica con p en la completación de $P[z]$. Más aún, como T es la multipilicación por z en $\widehat{P[z]}$, si $l \in P[z]$, $l(T)$ se identifica con la multiplicación por $l(z)$. De este modo, si pensamos en l como el operador «multiplicar por $l(z)$» en el espacio $\widehat{P[z]}$, denotaremos

$$\|l\|_{op} = \|l(T)\|_{\mathcal{L}(E)}$$

Sinteticemos todo esto en una tabla y usemos a partir de ahora esta nueva notación, con $E = \widehat{P[z]}$.

$(E, \|\cdot\|_E)$	$(\widehat{P[z]}, \|\cdot\|)$	$(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)})$	$(\mathcal{L}(\widehat{P[z]}), \|\cdot\|_{op})$
x_0	1	T	$\cdot z$
$p(T)x_0$	p	$l(T)$	$\cdot l(z)$

Por construcción, el polinomio 1 es cíclico en E para la múltiplicación por z. Ahora, afirmar que todo punto $x \in E$ es cíclico significa que

$$F_x = \overline{\langle x, zx, z^2x, ...\rangle} = E,$$

hecho que tenemos asegurado si se cumple que $1 \in F_x$ (por ser éste cíclico). Equivalentemente, necesitamos que para todo $\varepsilon > 0$, exista un polinomio l de manera que

$$\|lx - 1\| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Es necesario recordar que para obtener un operador sin subespacios invariantes hace falta que (3.1) se cumpla para todo elemento $x \in E$ distinto del 0, y no sólo para los polinomios. No obstante, probarlo para los polinomios será un primer paso importante. Supongamos por un momento que todo polinomio es cíclico, y sea $x \in E$ un elemento que se aproxima por la sucesión de polinomios $\{p_n\}_n$. Como hemos supuesto que se cumple (3.1) para los polinomios, tenemos que para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $n \geq 0$, existe un polinomio l_n de manera que

$$\|l_n p_n - 1\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, pensando l_n como el operador «multiplicar por l_n», supongamos que se cumple

$$M = \sup_n \|l_n\|_{op} < \infty.$$

Sea $n \geq 0$ de manera que $\|x - p_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \|l_n x - 1\| &\leq \|l_n x - l_n p_n\| + \|l_n p_n - 1\| \\ &\leq \|l_n\|_{op} \cdot \|x - p_n\| + \|l_n p_n - 1\| \\ &\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

por lo que se satisface la desigualdad (3.1) también para x.

Con todo esto, podemos ya trazar una estrategia para la construcción de un operador sin subespacios invariantes no triviales. Seguiremos los dos pasos siguientes:

(a) Construir una norma en el espacio de polinomios de manera que para cada polinomio p y cada $\varepsilon > 0$, exista un polinomio l de manera que

$$\|lp - 1\| < \varepsilon, \tag{3.2}$$

es decir, que todo polinomio sea cíclico para la multiplicación por z.

(b) Asegurar que para todo elemento $x \in E$ no nulo y para todo $\varepsilon > 0$, exista una sucesión de polinomios $\{p_n\}_n$ convergente a x y tal que la sucesión de polinomios $\{l_n\}_n$ asociada según (3.2) tenga las normas de operador acotadas.

Observación 3.4. Los polinomios l cumpliendo (3.2) no son únicos. Supongamos que l_1 acerca p a un cierto x_1, que l_2 acerca x_1 a un cierto x_2, y así sucesivamente hasta l_n que acerca x_{n-1} a 1, es decir, se tiene:

$$\begin{aligned}
\|l_1 p - x_1\| &< \varepsilon_1, \\
\|l_2 x_1 - x_2\| &< \varepsilon_2, \\
&\vdots \\
\|l_n x_{n-1} - 1\| &< \varepsilon_n.
\end{aligned}$$

Escogiendo los $\varepsilon_i > 0$ adecuadamente, tenemos que el producto $l_n \cdots l_1$ satisface (3.2) para un $\varepsilon > 0$ dado. En efecto, si $M = \max_{1 \le k \le n} \|l_k\|_{op}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|l_n \cdots l_1 p - 1\| &\le \|l_n \cdots l_1 p - l_n \cdots l_2 x_1\| + \|l_n \cdots l_2 x_1 - l_n \cdots l_3 x_2\| + \cdots + \|l_n x_{n-1} - 1\| \\
&\le \|l_n \cdots l_2\|_{op} \|l_1 p - x_1\| + \|l_n \cdots l_3\|_{op} \|l_2 x_1 - x_2\| + \cdots + \|l_n x_{n-1} - 1\| \\
&\le M^{n-1}\varepsilon_1 + M^{n-2}\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n \\
&\le \varepsilon,
\end{aligned}$$

tomando $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon M^{n-i}}{n}$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Pasemos ahora a la construcción del contraejemplo. Para ello, enunciaremos y demostraremos una serie de lemas, que luego nos permitirán dar el resultado final. Como antes, denotaremos por $P[z]$ al espacio de polinomios con coeficientes complejos, y para cada natural n, $P_n[z]$ será el espacio de polinomios de grado menor o igual que n. Ahora, dado un polinomio $p \in P[z]$, escribiremos $p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, donde evidentemente el conjunto $\{k \ge 0 : a_k \ne 0\}$ es finito. Además, representaremos por

$$|p| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

a la norma en ℓ^1 de la sucesión de coeficientes del polinomio. Más aún, para cada $n \ge 0$,

$$P_n(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

denotará el polinomio de $P_n[z]$ que resulta de cortar p hasta grado menor o igual que n. Naturalmente, $P_n(p) = p$ si y sólo si $\deg p \le n$. Finalmente, definimos

$$\mathrm{val}(p) = \min\{k \ge 0 : a_k \ne 0\}.$$

Ejemplo 3.5. Sea $p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = 5z^5 + 3z^4 + z^3 - z^2$. Tenemos que la norma

$$|p| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = 5 + 3 + 1 + 1 = 10.$$

Además, $\deg(p) = 5$, $\mathrm{val}(p) = 2$ y, por ejemplo, para $n = 3$,

$$P_3(p) = z^3 - z^2.$$

Lema 3.6. *Sean n y j dos números naturales con $0 \leq j \leq n$, y sean $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $M > 0$ constantes reales. Entonces, existe una constante $K > 0$ tal que, para cada natural $m \leq j$, y para cada polinomio $g \in P_n[z]$ satisfaciendo $|g| \leq M$ y $|P_m(g)| \geq \delta$, existe $q \in P_j[z]$ con $|q| \leq K$ y cumpliendo*

$$|P_j(gq) - z^m| < \varepsilon.$$

Demostración. Dada m con $0 \leq m \leq j \leq n$, definimos

$$\Omega_m = \{g \in P_n[z] : |g| \leq M \text{ y } |P_m(g)| \geq \delta\},$$

que es un subconjunto compacto de $P_n[z]$ (espacio de dimensión finita). Ahora, para cada $g \in \Omega_m$, pongamos

$$g = z^s \bar{g},$$

con $\bar{g}$ polinomio con término independiente distinto de cero y $0 \leq s \leq n$. Consideramos la división de polinomios por potencias crecientes hasta grado $j - s$ de z^{m-s} entre $\bar{g}$ (véase Teorema 2.10)[1]:

$$z^{m-s} = \bar{g}q + \bar{r},$$

con $\deg q \leq j - s \leq j$ (es decir, $q \in P_j[z]$) y $\mathrm{val}(\bar{r}) > j - s$. Multiplicando por z^s, denotando $r = z^s \bar{r}$ y aislando, obtenemos:

$$gq = z^m - r.$$

Además, como $\mathrm{val}(r) = \mathrm{val}(r') + s > j$, se verifica que

$$P_j(gq) = z^m.$$

Así, existe un entorno abierto $U_g \subseteq P_n[z]$ de g tal que, si $g' \in U_g$, entonces

$$|P_j(g'q) - z^m| < \varepsilon.$$

Usando ahora la compacidad de $\Omega_m \subseteq \bigcup_{g \in \Omega_m} U_g$, podemos tomar un subrecubrimiento finito $U_1, ..., U_{K_m}$, asociado a ciertos polinomios $g_1, ..., g_{K_m}$. De este modo, dado un polinomio $g \in \Omega_m$, existe una $k \in \{1, ..., K_m\}$ tal que $g \in U_k$, y tomando el polinomio $q_k \in P_j[z]$ obtenido a partir de g_k, nos queda

$$|P_j(gq_k) - z^m| < \varepsilon.$$

Además, si definimos

$$K = \max_{1 \leq m \leq j} \max_{1 \leq k \leq K_m} |q_k|,$$

terminamos la prueba. $\square$

[1] De hecho, $0 \leq s \leq m \leq j$, ya que por hipótesis $|P_m(g)| > 0$, y por lo tanto tiene sentido considerar el grado $j - s$ y el monomio z^{m-s}.

Pasemos ahora a construir una base del espacio de polinomios $P[z]$. Sean $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ dos sucesiones de números naturales, con $a_0 = b_0 = 1$ y cumpliendo

$$1 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n < \cdots .$$

A lo largo del texto, además, necesitaremos imponer que estas sucesiones «crezcan suficientemente rápido». Para garantizarlo, bastará tener una serie de condiciones de crecimiento que iremos recopilando en el Apéndice A.

Ahora, sea $\{v_n\}_{n\geq -1}$ la sucesión de números naturales definida por

$$v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in \{-1, 0\}, \\ a_1 + b_1 & \text{si } n = 1, \\ (n-1)(a_n + b_n) & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Con esto, se define una base $\{f_k\}_{k\geq 0}$ de $P[z]$. Tomamos $f_0 = 1$, y para cada $k \geq 1$, procedemos de la siguiente manera:

– Si $0 < k < a_1$,
$$f_k = 2^{(\frac{1}{2}a_1 - k)} z^k. \tag{3.3}$$

– Si $k = a_1$,
$$f_k = z^k - 1. \tag{3.4}$$

Ahora fijamos un índice $n \geq 2$ y vamos variando otro auxiliar $r \in \{1, ..., n-1\}$. Para cada par (n, r), definimos:

– Si $(r-1)a_n + v_{n-r} < k < ra_n$,

$$f_k = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n - k}{b_{n-1}}} z^k. \tag{3.5}$$

– Si $ra_n \leq k \leq ra_n + v_{n-r-1}$,

$$f_k = a_{n-r}(z^k - z^{k-a_n}). \tag{3.6}$$

– Si $(n-1)a_n + (r-1)b_n < k < r(a_n + b_n)$,

$$f_k = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n - k}{na_n}} z^k. \tag{3.7}$$

– Si $r(a_n + b_n) \leq k \leq (n-1)a_n + rb_n$,

$$f_k = z^k - b_n z^{k-b_n}. \tag{3.8}$$

Finalmente, definimos f_k con la fórmula (3.8) y $n = 1$ si $k = v_1 = a_1 + b_1$, y con la fórmula (3.7) y $n = r = 1$ si $a_1 < k < v_1$. Comprobemos que esta definición es exhaustiva. Para ello, veamos el esquema de la construcción en la siguiente tabla:

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n\in\mathbb{N}$
$0<k<a_1$ (3.3) $k=a_1$ (3.4)	$v_1<k<a_2$ (3.5) con $r=1$ $k=a_2$ (3.6) con $r=1$ $a_2<k<a_2+b_2$ (3.7) con $r=1$ $k=a_2+b_2=v_2$ (3.8) con $r=1$	$v_2<k<a_3$ (3.5) con $r=1$ $a_3\leq k\leq a_3+v_1$ (3.6) con $r=1$ $a_3+v_1<k<2a_3$ (3.5) con $r=2$ $k=2a_3$ (3.6) con $r=2$ $2a_3<k<a_3+b_3$ (3.7) con $r=1$ $a_3+b_3\leq k\leq 2a_3+b_3$ (3.8) con $r=1$ $2a_3+b_3<k<2(a_3+b_3)$ (3.7) con $r=2$ $k=2(a_3+b_3)=v_3$ (3.8) con $r=2$	$v_{n-1}<k<a_n$ (3.5) con $r=1$ $a_n\leq k\leq a_n+v_{n-2}$ (3.6) con $r=1$ $a_n+v_{n-2}<k<2a_n$ (3.5) con $r=2$ $2a_n\leq k\leq 2a_n+v_{n-3}$ (3.6) con $r=2$ $\vdots$ $(n-2)a_n+v_1<k<(n-1)a_n$ (3.5) con $r=n-1$ $k=(n-1)a_n$ (3.6) con $r=n-1$ $(n-1)a_n<k<a_n+b_n$ (3.7) con $r=1$ $a_n+b_n\leq k\leq (n-1)a_n+b_n$ (3.8) con $r=1$ $(n-1)a_n+b_n<k<2(a_n+b_n)$ (3.7) con $r=2$ $2(a_n+b_n)\leq k\leq (n-1)a_n+2b_n$ (3.8) con $r=2$ $\vdots$ $(n-1)a_n+(n-2)b_n<k<v_n$ (3.7) con $r=n-1$ $k=v_n$ (3.8) con $r=n-1$
$a_1<k<v_1$ (3.7) con $n=r=1$ $k=v_1$ (3.8) con $n=1$			

Observamos que con la primera columna, correspondiente a $n=1$, estamos definiendo f_k para $0<k\leq a_1$. Con el resto de columnas, cada una de ellas correspondiente a un cierto $n>1$, definimos f_k para $v_{n-1}<k\leq v_n$. Puesto que $v_n\longrightarrow\infty$ cuando n tiende a infinito, esto nos cubriría todos los enteros k en $(0,a_1]\cup(v_1,\infty)$. Además, para los posibles enteros k con $a_1<k\leq v_1$, definimos f_k de manera separada. Así pues, si imponemos que los extremos de los intervalos que aparecen en la tabla estén en el orden correcto, tendremos una definición unívoca de f_k para cada $k\geq 0$. Para los intervalos que se corresponden con (3.6) y (3.8) no hay problema. Para el que se corresponde con (3.5), hace falta pedir que para toda $n\geq 2$, y $1\leq r\leq n-1$, se tenga

$$(r-1)a_n+v_{n-r}<ra_n,$$

o, lo que es lo mismo, $v_{n-r}<a_n$. Como $\{v_n\}_n$ es creciente, basta tener la condición

$$v_{n-1}<a_n,\qquad n\geq 2. \tag{3.9}$$

Para el intervalo correspondiente a (3.7), hace falta que para toda $n\geq 2$, y $1\leq r\leq n-1$, se tenga

$$(n-1)a_n+(r-1)b_n<r(a_n+b_n),$$

o, equivalentemente, $(n-1-r)a_n < b_n$. Así, basta imponer la condición

$$(n-2)a_n < b_n, \qquad n \geq 2. \tag{3.10}$$

Cabe recalcar que ambas condiciones se satisacen siempre para los casos $n=0$ y $n=1$, por construcción de $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ y $\{v_n\}_n$. De este modo, si las sucesiones de partida cumplen las condiciones (3.9) y (3.10), tendremos definidos correctamente los polinomios f_k para cada $k \geq 0$, y como $\deg f_k = k$, acabamos de construir una base del espacio de polinomios $P[z]$. Antes de continuar, y para acabar de fijar ideas, veremos un ejemplo concreto de construcción de la base $\{f_k\}_k$.

Ejemplo 3.7. Sean $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ las sucesiones definidas de la siguiente forma:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 3^n(n-1)!^2 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$
$$b_n = na_n + 1 \qquad \text{para } n \geq 0.$$

Observamos que para toda $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = 3 \cdot 3^n (n!)^2 = 3n^2 3^n (n-1)!^2 = 3n^2 a_n.$$

Pasemos ahora a comprobar que se satisfacen todas las condiciones que deben cumplir las sucesiones de partida.

(i) $1 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n < a_{n+1} < \cdots$.

En efecto,
– $1 < a_1 = 3$.
– $a_n < na_n + 1 = b_n$ para cada $n \geq 1$.
– $b_n = na_n + 1 < 2na_n < 3n^2 a_n = a_{n+1}$ para cada $n \geq 1$.

(ii) $v_{n-1} < a_n$ para cada $n \geq 2$ (Condición (3.9)).

En efecto, por un lado, para $n = 2$, necesitamos que $a_1 + b_1 < a_2$. Pero $a_1 + b_1 = 7 < 9 = a_2$. Por otro lado, si $n \geq 3$, denotando $m = n - 1$ tenemos

$$v_m = (m-1)(a_m + b_m) < ma_m + mb_m = ma_m + m^2 a_m + m < 3m^2 a_m = a_{m+1}.$$

(iii) $(n-2)a_n < b_n$ para cada $n \geq 2$ (Condición (3.10)).

En efecto, $(n-2)a_n < na_n + 1 = b_n$.

Construyamos ahora la base $\{f_k\}_k$ de $P[z]$ asociada a $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$. Para ello, seguiremos la tabla de construcción vista anteriormente y definiremos cada polinomio con la fórmula que le corresponda.

k	f_k	Fórmula
$k=0$	$f_0 = 1$	Definición
$0 < k < a_1 = 3$	$f_1 = 2^{1/2}z$ $f_2 = 2^{-1/2}z^2$	(3.3)
$k=3$	$f_3 = z^3 - 1$	(3.4)
$3 < k < v_1 = 7$	$f_4 = 2^{-2/3}z^4$ $f_5 = 2^{-1}z^5$ $f_6 = 2^{-4/3}z^6$	(3.7) con $n = r = 1$
$k=7$	$f_7 = z^7 - 4z^3$	(3.8) con $n = 1$
$7 < k < a_2 = 9$	$f_8 = 2^{-7/8}z^8$	(3.5) con $r = 1$, $n = 2$
$k=9$	$f_9 = 3(z^9 - 1)$	(3.6) con $r = 1$, $n = 2$
$9 < k < v_2 = 28$	$f_{10} = 2^{-1/36}z^{10}$ $\vdots$	(3.7) con $r = 1$, $n = 2$
$k=28$	$f_{28} = z^{28} - 19z^9$	(3.8) con $r = 1$, $n = 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Con la construcción de la base un poco más clara, pasemos ahora a definir una norma en $P[z]$:

Definición 3.8. *Sea $p = \sum_{k\geq 0} \alpha_k f_k$ la expresión de un polinomio $p \in P[z]$ en la base $\{f_k\}_k$. Definimos la norma de p por*

$$\left\| \sum_{k\geq 0} \alpha_k f_k \right\| = \sum_{k\geq 0} |\alpha_k|.$$

Con la norma fijada, definimos también:

Definición 3.9. *Sea E la completación de $P[z]$ respecto de la norma $\|\cdot\|$.*

El espacio E es Banach e isométrico a ℓ^1, con $\{f_k\}_k$ identificada con la base de Schauder $\{e_k\}_k$ de ℓ^1 introducida en el Apartado 2.5. Nuestro objetivo ahora es probar que el operador T de la Definición 3.3 es continuo respecto de la norma $\|\cdot\|$ y, por lo tanto, se puede extender a todo E. Hecho esto, probaremos que T da lugar a un operador continuo en un espacio de Banach que carece de subespacios invariantes no triviales.

Antes de todo esto, establezcamos una serie de consecuencias de la definición de la base $\{f_k\}_k$. Dada $n \geq 2$, supongamos que $1 \leq r \leq n-1$ y $ra_n \leq k \leq ra_n + v_{n-r-1}$. Entonces, para cada $0 \leq i \leq r-1$, los valores $k - ia_n$ verificarán[2]

$$(r-i)a_n \leq k - ia_n \leq (r-i)a_n + v_{n-(r-i)-1},$$

y por la fórmula (3.6) aplicada con $k' = k - ia_n$ y $r' = r - i$, tenemos

$$\begin{aligned} z^k - z^{k-a_n} &= \frac{1}{a_{n-r}} f_k, \\ z^{k-a_n} - z^{k-2a_n} &= \frac{1}{a_{n-r+1}} f_{k-a_n}, \\ &\vdots \\ z^{k-(r-1)a_n} - z^{k-ra_n} &= \frac{1}{a_{n-1}} f_{k-(r-1)a_n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, sumando las r igualdades:

$$z^k - z^{k-ra_n} = \frac{1}{a_{n-r}} f_k + \frac{1}{a_{n-r+1}} f_{k-a_n} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} f_{k-(r-1)a_n}.$$

De este modo, con la norma de la Definición 3.8, si $ra_n \leq k \leq ra_n + v_{n-r-1}$, se tiene que

$$\|z^k - z^{k-ra_n}\| = \frac{1}{a_{n-r}} + \frac{1}{a_{n-r+1}} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \leq \frac{2}{a_{n-r}}. \tag{3.11}$$

Justifiquemos esta desigualdad. Si $n = 2$, entonces $r = 1$ y (3.11) quedaría como

$$\frac{1}{a_1} \leq \frac{2}{a_1}.$$

Supongamos $n > 2$. Veamos que

$$S = \frac{1}{a_{n-r+1}} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{a_{n-r}}.$$

Como la sucesión $\{a_n\}_n$ es creciente, podemos acotar la suma S por $r-1$ veces la fracción de menor denominador, con lo que se tiene

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{r-1}{a_{n-r+1}} \\ &< \frac{r-1}{(n-r-1)(a_{n-r} + b_{n-r})} && \text{[usando (3.9)]} \\ &< \frac{r-1}{(n-r-1)(a_{n-r} + (n-r-2)a_{n-r})} && \text{[usando (3.10)]} \\ &= \frac{1}{a_{n-r}} \left(\frac{r-1}{(n-r-1)^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{a_{n-r}} \left(\frac{n-2}{(n-2)^2} \right) \leq \frac{1}{a_{n-r}} && \text{[usando } 1 \leq r \leq n-1 \text{ y } n > 2\text{].} \end{aligned}$$

[2]Restando ia_n a la desigualdad $ra_n \leq k \leq ra_n + v_{n-r-1}$ y usando que $\{v_n\}_n$ es creciente.

Análogamente, si $n \geq 2$ y $r(a_n + b_n) \leq k \leq (n-1)a_n + rb_n$, entonces para cada $0 \leq i \leq r-1$, los valores $k - ib_n$ verificarán[3]

$$(r-i)(a_n + b_n) \leq k - ib_n \leq (n-1)a_n + (r-i)b_n,$$

y por la fórmula (3.8) con $k' = k - ib_n$ y $r' = r - i$, obtenemos

$$\begin{aligned} f_k &= z^k - b_n z^{k-b_n}, \\ b_n f_{k-b_n} &= b_n z^{k-b_n} - b_n^2 z^{k-2b_n}, \\ &\vdots \\ b_n^{r-1} f_{k-(r-1)b_n} &= b_n^{r-1} z^{k-(r-1)b_n} - b_n^r z^{k-rb_n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, sumando las r igualdades y tomando norma nos queda

$$\|z^k - b_n^r z^{k-rb_n}\| = 1 + b_n + \cdots + b_n^{r-1} \leq 2b_n^{r-1}. \tag{3.12}$$

Ahora, probar la desigualdad de (3.12) equivale a demostrar que

$$1 + \frac{1}{b_n} + \cdots + \frac{1}{b_n^{r-1}} \leq 2,$$

pero el término de la izquierda se puede acotar por la serie $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} = 2$, pues

$$b_n \geq b_2 > a_2 > a_1 + b_1 > 2.$$

Lema 3.10. *Si las sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ crecen suficientemente rápido, para cada $k \geq 0$,*

$$\|Tf_k\| \leq 2.$$

Además, se tienen las siguientes estimaciones:

$$\|Tf_{ra_n - 1}\| \leq 1/a_n, \tag{3.13}$$

$$\|Tf_{ra_n + v_{n-r-1}}\| \leq 1/a_{n-r}, \tag{3.14}$$

$$\|Tf_{r(a_n+b_n)-1}\| \leq 1/b_n. \tag{3.15}$$

Demostración. Probaremos la primera parte del lema separando casos, según si f_k ha sido construido mediante (3.5), (3.6), (3.7) o (3.8). En el transcurso de la prueba, iremos obteniendo las estimaciones correspondientes a la segunda parte del lema. Recordemos que el operador T que estamos considerando es la multiplicación por z.

Caso (3.5): $(r-1)a_n + v_{n-r} < k < ra_n$. Se tiene

$$Tf_k = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n - k}{b_{n-1}}} z^{k+1}.$$

[3] Restando ib_n a la desigualdad $r(a_n + b_n) \leq k \leq (n-1)a_n + rb_n$ y usando que $\{a_n\}_n \subseteq \mathbb{N}$.

– Si $k < ra_n - 1$, entonces f_{k+1} también se definirá por (3.5), con lo que

$$Tf_k = 2^{1/b_{n-1}} f_{k+1},$$

y por lo tanto,

$$\|Tf_k\| < 2.$$

– Si $k = ra_n - 1$, entonces

$$Tf_k = 2^{\frac{1-(1/2)a_n}{b_{n-1}}} z^{ra_n}.$$

Además, usando (3.11) con $k' = ra_n$, tenemos que[4]

$$\|z^{ra_n}\| \leq \|z^{ra_n} - 1\| + 1 \leq \frac{2}{a_{n-r}} + 1. \tag{3.16}$$

De este modo,

$$\|Tf_k\| = \|Tf_{ra_n-1}\| \leq 2^{\frac{1-(1/2)a_n}{b_{n-1}}} \left(1 + \frac{2}{a_{n-r}}\right) \leq \frac{1}{a_n}$$

si a_n es suficientemente grande, puesto que para todo $y, z > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{\frac{1-(1/2)x}{y}} \left(1 + \frac{2}{z}\right)}{1/x} = 0.$$

Así, para el caso en que f_k se define por (3.5), tenemos siempre que $\|Tf_k\| \leq 2$. Además, hemos obtenido la estimación (3.13).

Caso (3.6): $ra_n \leq k \leq ra_n + v_{n-r-1}$. Se tiene

$$Tf_k = a_{n-r}(z^{k+1} - z^{k+1-a_n}).$$

– Si $k < ra_n + v_{n-r-1}$, entonces f_{k+1} se define también según (3.6), y por lo tanto,

$$Tf_k = f_{k+1}.$$

De este modo,

$$\|Tf_k\| = 1.$$

– Si $k = ra_n + v_{n-r-1}$, entonces f_{k+1} estará en el intervalo de definición que sigue a (3.6). Se pueden dar dos casos:

(i) Si $r < n - 1$, entonces f_{k+1} se definirá según (3.5) con $r' = r + 1$, con lo que

$$f_{k+1} = 2^{\frac{(1/2)a_n - v_{n-r-1} - 1}{b_{n-1}}} z^{k+1}.$$

Así,

$$\|z^{k+1}\| = 2^{\frac{1+v_{n-r-1}-(1/2)a_n}{b_{n-1}}}.$$

[4] Se tiene $k' \in [ra_n, ra_n + v_{n-r+1}]$, que es el intervalo donde la fórmula (3.11) es válida.

(ii) Si $r = n-1$, entonces f_{k+1} se definirá según (3.7) con $r' = 1$, con lo que

$$f_{k+1} = 2^{\frac{(1/2)b_n-(n-1)a_n-1}{na_n}} z^{k+1},$$

y por lo tanto,

$$\|z^{k+1}\| = 2^{\frac{1+(n-1)a_n-(1/2)b_n}{na_n}}.$$

Veamos ahora cuanto vale $\|z^{v_{n-r-1}+1}\|$. Sea $n' = n-r$, $r' = 1$ y $k' = v_{n-r-1}+1$. Se cumple, si suponemos que la sucesión $\{a_n\}_n$ crece suficientemente rápido, que

$$v_{n-r-1} < v_{n-r-1}+1 < a_{n-r},$$

y por lo tanto

$$(r'-1)a_{n'} + v_{n'-r'} < k' < r'a_{n'}.$$

De este modo, $f_{k'}$ se definirá según la fórmula (3.5) y obtendremos

$$f_{v_{n-r-1}+1} = 2^{\frac{(1/2)a_{n-r}-v_{n-r-1}-1}{b_{n-r-1}}} z^{v_{n-r-1}+1}.$$

De aquí, deducimos que

$$\|z^{v_{n-r-1}+1}\| = 2^{\frac{1+v_{n-r-1}-(1/2)a_{n-r}}{b_{n-r-1}}}. \tag{3.17}$$

Finalmente, estudiemos el valor de $\|z^{k+1-a_n}\| = \|z^{(r-1)a_n+v_{n-r-1}+1}\|$. Si $r=1$, observamos que tenemos exactamente la ecuación (3.17). Si $1 < r \leq n-1$, podemos definir $r' = r-1$ y $k' = (r-1)a_n + v_{n-r-1}+1$. Se cumple

$$(r-1)a_n \leq (r-1)a_n + v_{n-r-1} + 1 \leq (r-1)a_n + v_{n-r},$$

es decir,

$$r'a_n \leq k' \leq r'a_n + v_{n-r'-1}.$$

Así pues, podemos usar la fórmula (3.11) para acotar $\|z^{(r-1)a_n+v_{n-r-1}+1} - z^{v_{n-r-1}+1}\|$.

$$\begin{aligned}
\|z^{k+1-a_n}\| =& \|z^{(r-1)a_n+v_{n-r-1}+1}\| \\
\leq& \|z^{(r-1)a_n+v_{n-r-1}+1} - z^{v_{n-r-1}+1}\| + \|z^{v_{n-r-1}+1}\| \\
\leq& \frac{2}{a_{n-r+1}} + 2^{\frac{1+v_{n-r-1}-(1/2)a_{n-r}}{b_{n-r-1}}}.
\end{aligned}$$

Con todo esto, ya podemos acotar la norma de Tf_k.

$$\begin{aligned}
\|Tf_k\| = \|Tf_{ra_n+v_{n-r-1}}\| =& a_{n-r}\|z^{k+1} - z^{k+1-a_n}\| \\
\leq& a_{n-r}(\|z^{k+1}\| + \|z^{k+1-a_n}\|) \\
\leq& a_{n-r}\left(\|z^{k+1}\| + \frac{2}{a_{n-r+1}} + 2^{\frac{1+v_{n-r-1}-(1/2)a_{n-r}}{b_{n-r-1}}}\right).
\end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que el valor de $\|z^{k+1}\|$ depende del valor de r. Separemos casos:

(i) Si $r < n-1$, entonces

$$\|Tf_{ra_n+v_{n-r-1}}\| \leq a_{n-r}\left(2^{\frac{1+v_{n-r-1}-(1/2)a_n}{b_{n-1}}} + \frac{2}{a_{n-r+1}} + 2^{\frac{1+v_{n-r-1}-(1/2)a_{n-r}}{b_{n-r-1}}}\right).$$

Además, si $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ crecen suficientemente rápido, tenemos

$$\|Tf_{ra_n+v_{n-r-1}}\| \leq 1/a_{n-r},$$

puesto que, si $0 < s < t$, entonces

$$w^2\left(2^{\frac{1+t-(1/2)z}{y}} + \frac{2}{x} + 2^{\frac{1+t-(1/2)w}{s}}\right) \leq 1$$

tomando valores de $w < x < y < z$ suficientemente grandes.

(ii) Si $r = n-1$, entonces

$$\|Tf_{ra_n+v_{n-r-1}}\| \leq a_1\left(2^{\frac{1+(n-1)a_n-(1/2)b_n}{na_n}} + \frac{2}{a_2} + 2^{(1-(1/2)a_1)}\right).$$

Como antes, si $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ crecen suficientemente rápido, podemos asegurar que

$$\|Tf_{ra_n+v_{n-r-1}}\| \leq 1/a_1 = 1/a_{n-r}.$$

Así, para el caso en que f_k se define por (3.6), tenemos siempre que $\|Tf_k\| \leq 2$. Además, hemos obtenido la estimación (3.14).

Caso (3.7): $(n-1)a_n + (r-1)b_n < k < r(a_n+b_n)$. Se tiene

$$Tf_k = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n-k}{na_n}} z^{k+1}.$$

– Si $k < r(a_n+b_n)-1$, entonces f_{k+1} también se definirá por (3.7), con lo que

$$Tf_k = 2^{1/na_n} f_{k+1},$$

y por lo tanto,

$$\|Tf_k\| < 2.$$

– Si $k = r(a_n+b_n)-1$, entonces

$$Tf_k = 2^{\frac{1-ra_n-(1/2)b_n}{na_n}} z^{r(a_n+b_n)}.$$

Además, usando (3.12) con[5] $k' = r(a_n+b_n)$, y la desigualdad (3.16) obtenida anteriormente para $\|z^{ra_n}\|$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|z^{r(a_n+b_n)}\| &\leq \|z^{r(a_n+b_n)} - b_n^r z^{ra_n}\| + b_n^r\|z^{ra_n}\| \\ &\leq 2b_n^{r-1} + b_n^r\left(\frac{2}{a_{n-r}}+1\right).\end{aligned}$$

[5]Se tiene $k' \in [r(a_n+b_n), (n-1)a_n + rb_n]$, que es el intervalo donde la fórmula (3.12) es válida.

De este modo,

$$\|Tf_k\| = \|Tf_{r(a_n+b_n)-1}\| \leq 2^{\frac{1-ra_n-(1/2)b_n}{na_n}}\left(2b_n^{r-1} + b_n^r\left(\frac{2}{a_{n-r}}+1\right)\right) \leq \frac{1}{b_n}$$

si b_n es suficientemente grande, puesto que para todo $r, n, y, z > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} 2^{\frac{1-ry-(1/2)x}{ny}}\left(2x^r + x^{r+1}\left(\frac{2}{z}+1\right)\right) = 0.$$

Así, para el caso en que f_k se define por (3.7), tenemos siempre que $\|Tf_k\| \leq 2$. Además, hemos obtenido la estimación (3.15).

Caso (3.8): $r(a_n + b_n) \leq k \leq (n-1)a_n + rb_n$. Se tiene

$$Tf_k = z^{k+1} - b_n z^{k+1-b_n}.$$

– Si $k < (n-1)a_n + rb_n$, entonces f_{k+1} se define también según (3.8), y por lo tanto,

$$Tf_k = f_{k+1},$$

por lo que $\|Tf_k\| = 1$.

– Si $k = (n-1)a_n + rb_n$, entonces f_{k+1} estará en el intervalo de definición que sigue a (3.8). Se pueden dar dos casos:

(i) Si $r < n-1$, entonces f_{k+1} se definirá según (3.7) con $r' = r+1$ y la misma n, con lo que

$$f_{k+1} = 2^{\frac{(1/2)b_n-(n-1)a_n-1}{na_n}} z^{k+1}.$$

Así,

$$\|z^{k+1}\| = 2^{\frac{(n-1)a_n+1-(1/2)b_n}{na_n}}.$$

(ii) Si $r = n-1$, entonces f_{k+1} se definirá según (3.5) con $r' = 1$ y $n' = n+1$, con lo que

$$f_{k+1} = 2^{\frac{(1/2)a_{n+1}-(n-1)(a_n+b_n)}{b_n}} z^{k+1},$$

y por lo tanto,

$$\|z^{k+1}\| = 2^{\frac{(n-1)(a_n+b_n)-(1/2)a_{n+1}}{b_n}}.$$

Veamos ahora cuanto vale $\|z^{k+1-b_n}\|$. Claramente, $k+1-b_n = (n-1)a_n + (r-1)b_n + 1$ estará o bien en el mismo intervalo que k, o bien en alguno anterior. Si estuviese en el mismo intervalo que k, entonces cumpliría

$$r(a_n+b_n) \leq (n-1)a_n + (r-1)b_n + 1,$$

es decir,

$$ra_n \leq (n-1)a_n - b_n + 1. \tag{3.18}$$

Ahora bien, de la condición (3.10) sobre las sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$, tenemos que

$$(n-2)a_n - b_n < 0,$$

y si estamos suponiendo un crecimiento suficientemente rápido, podemos suponer que

$$(n-2)a_n - b_n + 1 < 0.$$

Sin embargo, esto se contradice con el caso extremo $r = 1$ de (3.18), y por lo tanto, no se cumplirá para ningún valor de r. Ahora, veamos que $k + 1 - b_n$ está siempre en el intervalo inmediatamente anterior al de k, es decir, que f_{k+1-b_n} se define según (3.7) con $r' = r$, ya que

$$(n-1)a_n + (r-1)b_n < (n-1)a_n + (r-1)b_n + 1 \leq r(a_n + b_n)$$

se verifica para toda $1 \leq r \leq n-1$. De este modo,

$$f_{k+1-b_n} = 2^{\frac{(1/2)b_n-(n-1)a_n-1}{na_n}} z^{k+1-b_n},$$

y por lo tanto,

$$\|z^{k+1-b_n}\| = 2^{\frac{(n-1)a_n+1-(1/2)b_n}{na_n}}.$$

Finalmente,

$$\|Tf_k\| = \|z^{k+1} - b_n z^{k+1-b_n}\| \leq \|z^{k+1}\| + b_n 2^{\frac{(n-1)a_n+1-(1/2)b_n}{na_n}}.$$

Separemos casos según el valor de $\|z^{k+1}\|$.

(i) Si $r < n-1$, entonces

$$\begin{aligned}\|Tf_k\| \leq & 2^{\frac{(n-1)a_n+1-(1/2)b_n}{na_n}} + b_n 2^{\frac{(n-1)a_n+1-(1/2)b_n}{na_n}} \\ = & (1+b_n) 2^{\frac{(n-1)a_n+1-(1/2)b_n}{na_n}}.\end{aligned}$$

Si suponemos que b_n es suficientemente grande, tenemos $\|Tf_k\| \leq 2$.

(ii) Si $r = n-1$, entonces

$$\|Tf_k\| \leq 2^{\frac{(n-1)(a_n+b_n)-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} + b_n 2^{\frac{(n-1)a_n+1-(1/2)b_n}{na_n}},$$

que también podemos acotar por 2 si suponemos $b_n < a_{n+1}$ suficientemente grandes.

Así, para todo $k \geq 0$, hemos probado que $\|Tf_k\| \leq 2$. Con esto concluimos la demostración del Lema 3.10. □

Recordemos que habíamos definido E como la completación del espacio de polinomios $P[z]$ respecto de la norma $\|\cdot\|$, y T representaba la multiplicación por z. Con el Lema 3.10, hemos probado que podemos extender T a un operador continuo en el espacio de Banach E:

Definición 3.11. *Mantenemos la notación de T para la única extensión continua de este operador al espacio completado E.*

El operador T, que de momento sabemos que cumple

$$T \in \mathcal{L}(E) \text{ con } \|T\| \leq 2, \tag{3.19}$$

será nuestro candidato a operador sin subespacios invariantes no triviales. Antes de continuar, demos una definición y otro lema técnico que necesitaremos más adelante.

Definición 3.12. *Sea $m > 1$, definimos*

$$\begin{aligned} O_m =& \{k \geq 0 : \exists n > m,\ (n-m)a_n \leq k \leq (n-m)a_n + v_{m-1}\} \\ =& \bigcup_{n>m} [(n-m)a_n, (n-m)a_n + v_{m-1}] \cap \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A partir de ahora, además, nos hará falta suponer

$$v_{n-1} + 4b_{n-1} < a_n, \qquad n \geq 2, \tag{3.20}$$

así como

$$2(n-2)a_n < b_n, \qquad n \geq 2, \tag{3.21}$$

que representan condiciones más fuertes que (3.9) y (3.10) respectivamente.

Lema 3.13. *Si las sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ crecen suficientemente rápido, entonces, para toda $m > 2$, $k > (m-1)a_m$ y $b_m + a_m \leq s \leq b_m + (m-1)a_m$, tenemos:*

– *Si $k \notin O_m$,*
$$\|T^s f_k\| \leq 4.$$

– *Si $k \in O_m$, expresándola de la forma $k = (n-m)a_n + j$ para una cierta $n > m$ y $0 \leq j \leq v_{m-1}$,*
$$\|T^s f_k + a_m z^{j+s}\| \leq 1.$$

Demostración. De la misma forma que en la demostración del Lema 3.10, separaremos casos según los intervalos de definición de los f_k. Recordemos que, por construcción, los intervalos de definición son disjuntos dos a dos, de manera que el único caso en que $k \in O_m$ es para (3.6),

$$ra_n \leq k \leq ra_n + v_{n-r-1},$$

con $r = n - m$. El resto de casos se corresponden a $k \notin O_m$.

Caso (3.5): $(r-1)a_n + v_{n-r} < k < ra_n$. Se tiene

$$f_k = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n - k}{b_{n-1}}} z^k.$$

Como $k < ra_n \leq (n-1)a_n$ y estamos suponiendo $k > (m-1)a_m$, tenemos que $n > m$. Ahora,

– Si $k + s < ra_n$, entonces f_{k+s} se define también por (3.5) y nos queda

$$\begin{aligned} T^s f_k =& 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n - k}{b_{n-1}}} z^{k+s} \\ =& 2^{\frac{s}{b_{n-1}}} f_{k+s}. \end{aligned}$$

Usando la condición (3.21), $s \leq b_m + (m-1)a_m < 2b_m$, y por lo tanto

$$\|T^s f_k\| = 2^{\frac{s}{b_{n-1}}} \leq 2^{\frac{s}{b_m}} \leq 4,$$

– Si $k + s \geq ra_n$. Por un lado, f_{ra_n-1} se define según (3.5), y tenemos

$$\begin{aligned} T^{k+s-ra_n}(Tf_{ra_n-1}) =& T^{k+s-ra_n}\left(2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n-ra_n+1}{b_{n-1}}} z^{ra_n}\right) \\ =& T^{k+s-ra_n}\left(2^{\frac{1-(1/2)a_n}{b_{n-1}}} z^{ra_n}\right) \\ =& 2^{\frac{1-(1/2)a_n}{b_{n-1}}} z^{k+s}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$T^s f_k = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n-k}{b_{n-1}}} z^{k+s}.$$

Combinando las dos expresiones, nos queda

$$T^s f_k = 2^{\frac{ra_n-1-k}{b_{n-1}}} T^{k+s-ra_n} T f_{ra_n-1}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|T^s f_k\| \leq& 2^{\frac{ra_n-1-k}{b_{n-1}}} 2^{k+s-ra_n} \frac{1}{a_n} && \text{[usando (3.19) y (3.13)]} \\ \leq& 2^{\frac{s}{b_{n-1}}} 2^{k+s-ra_n} a_n^{-1} && \text{[usando } ra_n - 1 - k \leq s - 1 \leq s\text{]} \\ \leq& 4 \cdot 2^s a_n^{-1} && \text{[usando } 2^{\frac{s}{b_{n-1}}} \leq 4 \text{ como antes y } k < ra_n\text{]} \\ \leq& \frac{4 \cdot 2^{2b_m}}{a_n}, && \text{[usando } s \leq 2b_m\text{]} \end{aligned}$$

que cumple $\|T^s f_k\| \leq 4$ si tomamos a_n suficientemente grande.

Caso (3.6): $ra_n \leq k \leq ra_n + v_{n-r-1}$. Se tiene

$$T^s f_k = a_{n-r}(z^{k+s} - z^{k+s-a_n}).$$

Ahora, veamos que $k \leq (n-1)a_n$. Sabemos que $k \leq ra_n + v_{n-r-1}$, con lo que:

– Si $r = n - 1$,

$$k \leq (n-1)a_n + v_0 = (n-1)a_n.$$

– Si $1 \leq r < n - 1$, usando que las sucesiones son crecientes y la condición (3.20),

$$k \leq (n-2)a_n + v_{n-2} \leq (n-2)a_n + a_{n-1} \leq (n-1)a_n.$$

De este modo probamos que $k \leq (n-1)a_n$, y como por hipótesis teníamos que $k > (m-1)a_m$, deducimos que $n > m$. Distingamos ahora 3 casos, según el valor de r.

(i) Si $r = n - m$ (es decir, $k \in O_m$). Escribimos $k = ra_n + j$, con $0 \leq j \leq v_{m-1}$. Se tiene, usando la hipótesis sobre s y las condiciones (3.20) y (3.21),

$$v_{m-1} < b_m \leq s - a_m < j + s \leq v_{m-1} + (m-1)a_m + b_m < a_m + (m-1)a_m + b_m < 2b_m < a_n.$$

Ahora, sumando ra_n a la desigualdad anterior, nos queda

$$ra_n + v_{m-1} < k + s < (r+1)a_n,$$

y usando $r = n - m$, si denotamos $r' = r + 1$, obtenemos[6]

$$(r'-1)a_n + v_{n-r'} < k + s < r'a_n.$$

Así, f_{k+s} se definirá según (3.5) con $r' = r + 1$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|z^{k+s}\| &= 2^{\frac{j+s-(1/2)a_n}{b_{n-1}}} \\ &\leq 2^{\frac{2b_m-(1/2)a_n}{b_{n-1}}} < 1/a_n, \end{aligned} \tag{3.22}$$

si a_n es suficientemente grande. Finalmente,

$$\begin{aligned} \|T^s f_k + a_m z^{j+s}\| =& a_m \|z^{k+s} - z^{k+s-a_n} + z^{j+s}\| \\ \leq& \begin{cases} a_m\|z^{k+s}\| & \text{si } r = n - m = 1, \\ a_m(\|z^{k+s}\| + \|z^{k+s-a_n} - z^{j+s}\|) & \text{si } r = n - m > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

puesto que si $r = 1$, se tiene $k + s - a_n = j + s$ y hay cancelación de términos. En el caso $r > 1$, podemos definir $r' = r - 1$, $k' = k + s - a_n$, y se cumple

$$r'a_n \leq k' \leq r'a_n + v_{n-r'-1} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq j + s \leq v_m,$$

puesto que $j + s \leq 2b_m < v_m$. Así, podemos usar la estimación (3.11) con estos valores y obtenemos

$$\|z^{k+s-a_n} - z^{j+s}\| \leq 2/a_{m+1}.$$

De este modo, usando esto y (3.22), resulta

$$\begin{aligned} \|T^s f_k + a_m z^{j+s}\| \leq& a_m(\|z^{k+s}\| + \|z^{k+s-a_n} - z^{j+s}\|) \\ \leq& a_m\left(\frac{1}{a_n} + \frac{2}{a_{m+1}}\right) \leq 1, \end{aligned}$$

tal y como queríamos probar.

(ii) Si $r > n - m$. En este caso, $v_{n-r} \leq v_{m-1} < a_m < b_m$, usando (3.20). Además, como $a_m + b_m \leq s$, resulta que $v_{n-r} < b_m < s$. De este modo, con la hipótesis sobre s y las condiciones (3.20) y (3.21), obtenemos

$$\begin{aligned} ra_n + v_{n-r} < k + s <& ra_n + v_{n-r-1} + b_m + (m-1)a_m \\ <& ra_n + v_{m-1} + b_m + (m-1)a_m \\ <& ra_n + 2b_m \\ <& (r+1)a_n. \end{aligned}$$

[6] Como por hipótesis $m > 2$, tenemos que $r = n - m < n - 1$, y por lo tanto $r' = r + 1$ estará bien definida entre 1 y $n - 1$.

De esta desigualdad, resultan otras dos. Primero, usando que $v_{n-r-1} < v_{n-r}$, deducimos

$$ra_n + v_{n-r-1} < k + s < (r+1)a_n, \tag{3.23}$$

mientras que restándole a_n, resulta

$$(r-1)a_n + v_{n-r} < k + s - a_n < ra_n. \tag{3.24}$$

La desigualdad (3.23) nos dice que, si $r < n-1$, el polinomio f_{k+s} se definirá según (3.5) con $k' = k+s$ y $r' = r+1$. Si $r = n-1$, en cambio, la desigualdad queda

$$(n-1)a_n < k + s < na_n = a_n + (n-1)a_n < a_n + b_n,$$

con lo que f_{k+s} se definirá según (3.7) con $k' = k+s$ y $r' = 1$. La desigualdad (3.24), por otro lado, nos dice que f_{k+s-a_n} se define según (3.5) con $k' = k+s-a_n$ y $r' = r$. Ahora, podemos escribir $k = ra_n + j$, con $0 \le j \le v_{n-r-1}$, y separar dos casos:

– Si $r < n-1$, entonces

$$f_{k+s} = 2^{\frac{(r+\frac{1}{2})a_n - k - s}{b_{n-1}}} z^{k+s} = 2^{\frac{(1/2)a_n - j - s}{b_{n-1}}} z^{k+s},$$

$$f_{k+s-a_n} = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n - k - s + a_n}{b_{n-1}}} z^{k+s-a_n} = 2^{\frac{(1/2)a_n - j - s}{b_{n-1}}} z^{k+s-a_n}.$$

De este modo,

$$\begin{aligned}\|z^{k+s}\| =& \|z^{k+s-a_n}\| \\ =& 2^{\frac{j+s-(1/2)a_n}{b_{n-1}}} \\ \le& 2^{\frac{2b_m-(1/2)a_n}{b_{n-1}}},\end{aligned}$$

ya que

$$j + s \le v_{n-r-1} + (m-1)a_m + b_m \le v_{m-1} + (m-1)a_m + b_m < 2b_m.$$

Por lo tanto,

$$\|T^s f_k\| \le 2a_{n-r} 2^{\frac{2b_m-(1/2)a_n}{b_{n-1}}} \le 4,$$

si a_n es suficientemente grande.

– Si $r = n-1$, entonces

$$f_{k+s} = 2^{\frac{(1/2)b_n - k - s}{na_n}} z^{k+s} = 2^{\frac{(1/2)b_n - (n-1)a_n - j - s}{na_n}} z^{k+s},$$

$$f_{k+s-a_n} = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})a_n - k - s + a_n}{b_{n-1}}} z^{k+s-a_n} = 2^{\frac{(1/2)a_n - j - s}{b_{n-1}}} z^{k+s-a_n}.$$

De este modo, como en el caso $r < n-1$,

$$\|z^{k+s-a_n}\| \le 2^{\frac{2b_m-(1/2)a_n}{b_{n-1}}}.$$

En cuanto a $\|z^{k+s}\|$, tenemos

$$\begin{aligned}\|z^{k+s}\| =& 2^{\frac{(n-1)a_n+j+s-(1/2)b_n}{na_n}} \\ \leq& 2^{\frac{(n-1)a_n+2b_m-(1/2)b_n}{na_n}},\end{aligned}$$

usando $j+s<2b_m$. Así,

$$\begin{aligned}\|T^s f_k\| &\leq a_{n-r}(\|z^{k+s}\|+\|z^{k+s-a_n}\|) \\ &\leq a_{n-r}\left(2^{\frac{(n-1)a_n+2b_m-(1/2)b_n}{na_n}}+2^{\frac{2b_m-(1/2)a_n}{b_{n-1}}}\right)\leq 4,\end{aligned}$$

si $a_n<b_n$ son suficientemente grandes.

(iii) Si $r<n-m$. Volvemos a escribir $k=ra_n+j$, con $0\leq j\leq v_{n-r-1}$. Separamos casos:

– Si $j+s\leq v_{n-r-1}$, entonces f_{k+s} se define también con (3.6) y nos queda

$$T^s f_k = f_{k+s},$$

por lo que $\|T^s f_k\|=1\leq 4$.

– Si $j+s>v_{n-r-1}$, usamos que $f_{ra_n+v_{n-r-1}}$ se define según (3.6) y por lo tanto,

$$\begin{aligned}T^{j+s-v_{n-r-1}-1}(Tf_{ra_n+v_{n-r-1}}) =& T^{j+s-v_{n-r-1}-1}(a_{n-r}(z^{ra_n+v_{n-r-1}+1}-z^{(r-1)a_n+v_{n-r-1}+1})) \\ =& a_{n-r}(z^{ra_n+j+s}-z^{(r-1)a_n+j+s}) \\ =& a_{n-r}(z^{k+s}-z^{k+s-a_n}) \\ =& T^s f_k.\end{aligned}$$

Finalmente, usando la estimación (3.14) y la propiedad (3.19),

$$\begin{aligned}\|T^s f_k\| =& \|T^{j+s-v_{n-r-1}-1}(Tf_{ra_n+v_{n-r-1}})\| \\ \leq& 2^{j+s-v_{n-r-1}-1}/a_{n-r} \\ <& 2^s/a_{n-r} && [\text{usando } j\leq v_{n-r-1}] \\ \leq& 2^{2b_m}/a_{n-r} && [\text{usando } s\leq 2b_m] \\ \leq& 4,\end{aligned}$$

si tomamos a_{n-r} suficientemente grande.

Caso (3.7): $(n-1)a_n+(r-1)b_n<k<r(a_n+b_n)$. Se tiene

$$T^s f_k = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n-k}{na_n}} z^{k+s}.$$

Usando la condición (3.20), deducimos

$$k<r(a_n+b_n)\leq (n-1)(a_n+b_n)=v_n<a_{n+1}\leq na_{n+1}.$$

Pero como por hipótesis $k > (m-1)a_m$, tenemos que $n+1 > m$, o equivalentemente, $n \geq m$. Esta vez, tendremos que considerar los casos $n = m$ y $n > m$ separadamente.

– Si $n = m$, como $b_n < s$, entonces

$$(n-1)a_n + rb_n < k + s.$$

Distinguiremos cuatro subcasos, tal y como se muestra en la siguiente tabla:

Caso	$k+s$	r
(i)	$(n-1)a_n + rb_n < k+s < (r+1)(a_n+b_n)$	$r < n-1$
(ii)	$(r+1)(a_n+b_n) \leq k+s \leq (n-1)a_n + (r+1)b_n$	$r < n-1$
(iii)	$(n-1)a_n + (r+1)b_n < k+s \leq (n-1)(a_n+b_n)$	$r < n-2$
(iv)	$(n-1)(a_n+b_n) < k+s$	$r \leq n-1$

(i) $(n-1)a_n + rb_n < k+s < (r+1)(a_n+b_n)$, con $r < n-1$. Tenemos que f_{k+s} se define según (3.7) con $r' = r+1$, y por lo tanto,

$$f_{k+s} = 2^{\frac{(r+\frac{1}{2})b_n - k - s}{na_n}} z^{k+s}.$$

Así,

$$\|z^{k+s}\| = 2^{\frac{k+s-(r+\frac{1}{2})b_n}{na_n}},$$

y nos queda

$$\|T^s f_k\| = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n - k}{na_n}} 2^{\frac{k+s-(r+\frac{1}{2})b_n}{na_n}} = 2^{\frac{s-b_n}{na_n}}.$$

Finalmente, usando que $s \leq b_n + (n-1)a_n$, tenemos

$$s - b_n \leq (n-1)a_n \leq 2na_n,$$

y por lo tanto,

$$\|T^s f_k\| \leq 4.$$

(ii) $(r+1)(a_n+b_n) \leq k+s \leq (n-1)a_n + (r+1)b_n$, con $r < n-1$. Definiendo $k' = k+s$ y $r' = r+1$, nos encontramos en las condiciones de la estimación (3.12), que nos da

$$\|z^{k+s} - b_n^{r+1} z^{k+s-(r+1)b_n}\| \leq 2b_n^r.$$

Así,

$$\begin{aligned}\|z^{k+s}\| &\leq \|z^{k+s} - b_n^{r+1} z^{k+s-(r+1)b_n}\| + b_n^{r+1}\|z^{k+s-(r+1)b_n}\| \\ &\leq 2b_n^r + b_n^{r+1}\|z^{k+s-(r+1)b_n}\|.\end{aligned}$$

Ahora, como por hipótesis $k+s-(r+1)b_n \leq (n-1)a_n$, tenemos que[7]

$$\|z^{k+s-(r+1)b_n}\| \leq 2^{(n-1)a_n}\|z^{(n-1)a_n}\|.$$

[7] Si $a \leq b$, entonces $\|z^a\| = \|T^{b-a} z^b\| \leq 2^{b-a}\|z^b\| \leq 2^b\|z^b\|$.

Además, usando la estimación (3.11) con $k' = (n-1)a_n$ y $r' = n-1$, obtenemos

$$\|z^{(n-1)a_n}\| \leq 2/a_1.$$

De este modo,

$$\begin{aligned}
\|z^{k+s}\| \leq & 2b_n^r + b_n^{r+1} \cdot 2^{(n-1)a_n} \|z^{(n-1)a_n}\| \\
\leq & 2b_n^r + b_n^{r+1} \cdot \frac{2^{(n-1)a_n+1}}{a_1} \\
\leq & b_n^{r+2},
\end{aligned}$$

si b_n es suficientemente grande. Ahora, como $(r+1)(a_n+b_n) \leq k+s$ y tenemos que $s \leq (n-1)a_n + b_n$, nos queda

$$\begin{aligned}
k \geq & (r+1)(a_n+b_n) - s \\
\geq & (r+1)(a_n+b_n) - (n-1)a_n - b_n \\
= & rb_n + (r-n+2)a_n \\
\geq & rb_n - na_n.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|T^s f_k\| = & 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n - k}{na_n}} \|z^{k+s}\| \\
\leq & 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n - rb_n + na_n}{na_n}} b_n^{r+2} \\
= & 2^{\frac{na_n - (1/2)b_n}{na_n}} b_n^{r+2} \\
\leq & 4,
\end{aligned}$$

si b_n es suficientemente grande.

(iii) $(n-1)a_n + (r+1)b_n < k+s \leq (n-1)(a_n+b_n)$, con $r < n-2$. Como $k < r(a_n+b_n)$ y sabemos que $s < 2b_n$, tenemos

$$k+s < r(a_n+b_n) + 2b_n < (r+2)(a_n+b_n).$$

Juntándolo con la cota inferior de $k+s$, nos queda

$$(n-1)a_n + (r+1)b_n < k+s < (r+2)(a_n+b_n),$$

por lo que definimos f_{k+s} según (3.7) con $r' = r+2$, y por lo tanto

$$f_{k+s} = 2^{\frac{(r+\frac{3}{2})b_n - k - s}{na_n}} z^{k+s}.$$

Así, usando que $s \leq (n-1)a_n + b_n$,

$$\begin{aligned}
\|z^{k+s}\| = & 2^{\frac{k+s-(r+\frac{3}{2})b_n}{na_n}} \\
\leq & 2^{\frac{k+(n-1)a_n-(r+\frac{1}{2})b_n}{na_n}},
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|T^s f_k\| &= 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n-k}{na_n}} \|z^{k+s}\| \\ &\leq 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n-k}{na_n}} 2^{\frac{k+(n-1)a_n-(r+\frac{1}{2})b_n}{na_n}} \\ &= 2^{\frac{(n-1)a_n-b_n}{na_n}} \\ &\leq 4,\end{aligned}$$

si b_n es suficientemente grande.

(iv) $k+s > (n-1)(a_n+b_n) = v_n$. Usando la cota superior de k, la desigualdad $s < 2b_n$ y la condición (3.20),

$$k+s < (n-1)(a_n+b_n) + 2b_n = v_n + 2b_n < a_{n+1}. \tag{3.25}$$

De este modo, obtenemos que $k+s$ queda comprendida entre los siguientes valores:

$$v_n < k+s < a_{n+1}.$$

Así, f_{k+s} se define según (3.5) con $n' = n+1$ y $r' = 1$, por lo que queda

$$f_{k+s} = 2^{\frac{(1/2)a_{n+1}-k-s}{b_n}} z^{k+s}.$$

Con esto,

$$\begin{aligned}\|z^{k+s}\| &= 2^{\frac{k+s-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} \\ &\leq 2^{\frac{v_n+2b_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}},\end{aligned}$$

ya que en (3.25) hemos visto que $k+s < v_n + 2b_n$. Finalmente,

$$\begin{aligned}\|T^s f_k\| &\leq 2^{\frac{((n-1)-\frac{1}{2})b_n-k}{na_n}} 2^{\frac{v_n+2b_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} \\ &\leq 2^{\frac{(n-\frac{3}{2})b_n-v_n}{na_n}+\frac{v_n+2b_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}},\end{aligned}$$

que cumple $\|T^s f_k\| \leq 4$ si a_{n+1} es suficientemente grande.

– Si $n > m$. Separamos dos casos:

(i) Si $k+s < r(a_n+b_n)$, entonces f_{k+s} se define también por (3.7) y tenemos

$$z^{k+s} = 2^{\frac{k+s-(r-\frac{1}{2})b_n}{na_n}} f_{k+s}.$$

Con esto,

$$T^s f_k = 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n-k}{na_n}} z^{k+s} = 2^{\frac{s}{na_n}} f_{k+s},$$

y por lo tanto, usando que $s \leq 2b_m$,

$$\|T^s f_k\| = 2^{\frac{s}{na_n}} \leq 2^{\frac{2b_m}{na_n}}.$$

Finalmente, como $m < n$, podemos tomar a_n suficientemente grande de forma que

$$\|T^s f_k\| \leq 4.$$

(ii) Si $k+s \geq r(a_n+b_n)$, entonces usamos que $f_{r(a_n+b_n)-1}$ se define según (3.7), y por lo tanto,

$$\begin{aligned} T^{k+s-r(a_n+b_n)}(Tf_{r(a_n+b_n)-1}) =& T^{k+s-r(a_n+b_n)}\left(2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n-r(a_n+b_n)+1}{na_n}} z^{r(a_n+b_n)}\right) \\ =& 2^{\frac{1-(1/2)b_n-ra_n}{na_n}} z^{k+s}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} T^s f_k =& 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n-k}{na_n}} z^{k+s} \\ =& 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n-k}{na_n}} 2^{\frac{(1/2)b_n+ra_n-1}{na_n}} T^{k+s-r(a_n+b_n)}(Tf_{r(a_n+b_n)-1}) \\ =& 2^{\frac{r(a_n+b_n)-k-1}{na_n}} T^{k+s-r(a_n+b_n)}(Tf_{r(a_n+b_n)-1}). \end{aligned}$$

De este modo, podemos acotar $\|T^s f_k\|$ usando (3.19) y la estimación (3.15) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \|T^s f_k\| \leq& 2^{\frac{r(a_n+b_n)-k-1}{na_n}} 2^{k+s-r(a_n+b_n)} \frac{1}{b_n} \\ \leq& 2^{r(a_n+b_n)-k-1} 2^{k+s-r(a_n+b_n)} b_n^{-1} \\ <& 2^s b_n^{-1} \\ \leq& 2^{2b_m} b_n^{-1}. \end{aligned}$$

Como $m < n$, podemos tomar b_n suficientemente grande y conseguir así que $\|T^s f_k\| \leq 4$.

Caso (3.8): $r(a_n+b_n) \leq k \leq (n-1)a_n + rb_n$. Se tiene

$$T^s f_k = z^{k+s} - b_n z^{k+s-b_n}.$$

Usando la condición (3.20), tenemos

$$k \leq (n-1)a_n + rb_n \leq (n-1)(a_n+b_n) = v_n < a_{n+1} < na_{n+1},$$

y por lo tanto, como $k > (m-1)a_m$, deducimos que $n+1 > m$, o equivalentemente, $n \geq m$. Separamos casos:

– Si $n = m$, entonces la hipótesis sobre s queda

$$a_n + b_n \leq s \leq (n-1)a_n + b_n,$$

y teniendo en cuenta el intervalo en que se encuentra k,

$$(r+1)(a_n+b_n) \leq k+s \leq 2(n-1)a_n + (r+1)b_n. \tag{3.26}$$

(i) Si $k+s \leq (n-1)a_n + (r+1)b_n$, como sabemos que $(r+1)(a_n+b_n) \leq k+s$, necesariamente $r \leq n-2$, con lo que podemos definir $r' = r+1$ y tenemos exactamente

$$r'(a_n+b_n) \leq k+s \leq (n-1)a_n + r'b_n.$$

Así, deducimos que f_{k+s} se define según (3.8), y por lo tanto,

$$f_{k+s} = z^{k+s} - b_n z^{k+s-b_n} = T^s f_k.$$

De este modo

$$\|T^s f_k\| = 1 \leq 4.$$

(ii) Supongamos $(n-1)a_n + (r+1)b_n < k+s < (r+2)(a_n+b_n)$. Observamos que esto cubre el intervalo de (3.26) que falta por considerar, puesto que

$$2(n-1)a_n + (r+1)b_n < (r+2)(a_n+b_n).$$

En efecto,

$$2(n-1)a_n + (r+1)b_n < (r+2)(a_n+b_n) \iff (2n-4-r)a_n < b_n,$$

y esto lo tenemos por la condición (3.21). Separemos ahora casos:

– Si $r < n-2$, tomando $r' = r+2$ nos queda

$$(n-1)a_n + (r'-1)b_n < k+s < r'(a_n+b_n).$$

Así, construimos f_{k+s} según (3.7) con $r' \leq n-1$:

$$f_{k+s} = 2^{\frac{(r+\frac{3}{2})b_n - k - s}{na_n}} z^{k+s}.$$

Por lo tanto, usando que $k+s \leq 2(n-1)a_n + (r+1)b_n$, tenemos

$$\begin{aligned}\|z^{k+s}\| =& 2^{\frac{k+s-(r+\frac{3}{2})b_n}{na_n}} \\ \leq& 2^{\frac{2(n-1)a_n-(1/2)b_n}{na_n}}.\end{aligned}$$

– Si $r \geq n-2$, usando la condición (3.20) y

$$(n-1)a_n + (r+1)b_n < k+s < (r+2)(a_n+b_n),$$

nos queda

$$\begin{aligned}(n-1)(a_n+b_n) = v_n < k+s <& (n+1)(a_n+b_n) \\ =& v_n + 2(a_n+b_n) \\ <& v_n + 4b_n < a_{n+1}.\end{aligned}$$

De este modo, definimos f_{k+s} según (3.5) con $r' = 1$ y $n' = n+1$, con lo que

$$f_{k+s} = 2^{\frac{(1/2)a_{n+1}-k-s}{b_n}} z^{k+s}.$$

Así, usando la cota de $k+s$ otra vez,

$$\begin{aligned}\|z^{k+s}\| = 2^{\frac{k+s-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} \leq& 2^{\frac{2(n-1)a_n+(r+1)b_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} \\ \leq& 2^{\frac{2(n-1)a_n+nb_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}}\end{aligned}$$

Veamos ahora qué sucede con $\|z^{k+s-b_n}\|$. Teníamos

$$\begin{gathered}(n-1)a_n + (r+1)b_n < k+s < 2(n-1)a_n + (r+1)b_n \\ \iff \\ (n-1)a_n + rb_n < k+s-b_n < 2(n-1)a_n + rb_n.\end{gathered}$$

Veamos que se tiene $2(n-1)a_n + rb_n < (r+1)(a_n+b_n)$. En efecto,

$$2(n-1)a_n + rb_n < (r+1)(a_n+b_n) \iff (2n-3-r)a_n < b_n,$$

y esto se cumple por la condición (3.21). Así, podemos proceder análogamente a como hemos hecho para $\|z^{k+s}\|$:

– Si $r < n-1$, definimos f_{k+s-b_n} según (3.7) con $r' = r+1$ y nos queda

$$f_{k+s-b_n} = 2^{\frac{(r+\frac{1}{2})b_n - k - s + b_n}{na_n}} z^{k+s-b_n}.$$

Por lo tanto, usando que $k+s \le 2(n-1)a_n + (r+1)b_n$, tenemos

$$\begin{aligned}\|z^{k+s-b_n}\| &= 2^{\frac{k+s-(r+\frac{3}{2})b_n}{na_n}}\\ &\le 2^{\frac{2(n-1)a_n - (1/2)b_n}{na_n}}.\end{aligned}$$

– Si $r = n-1$, usando la condición (3.20) y

$$(n-1)a_n + rb_n < k+s-b_n < (r+1)(a_n+b_n),$$

nos queda

$$(n-1)(a_n+b_n) = v_n < k+s-b_n < n(a_n+b_n) < a_{n+1}.$$

De este modo, definimos f_{k+s-b_n} según (3.5) con $r' = 1$ y $n' = n+1$, con lo que

$$f_{k+s-b_n} = 2^{\frac{(1/2)a_{n+1} - k - s + b_n}{b_n}} z^{k+s-b_n}.$$

Así, usando la cota de $k+s$ otra vez,

$$\|z^{k+s-b_n}\| = 2^{\frac{k+s-b_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} \le 2^{\frac{2(n-1)a_n + (n-1)b_n - (1/2)a_{n+1}}{b_n}}.$$

Finalmente, resumiendo lo que hemos visto,

	Cota de $\|z^{k+s}\|$	Cota de $\|z^{k+s-b_n}\|$
$r < n-2$	$2^{\frac{2(n-1)a_n-(1/2)b_n}{na_n}}$	$2^{\frac{2(n-1)a_n-(1/2)b_n}{na_n}}$
$r = n-2$	$2^{\frac{2(n-1)a_n+nb_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}}$	$2^{\frac{2(n-1)a_n-(1/2)b_n}{na_n}}$
$r = n-1$	$2^{\frac{2(n-1)a_n+nb_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}}$	$2^{\frac{2(n-1)a_n+(n-1)b_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}}$

y por lo tanto, para tener la acotación

$$\|T^s f_k\| \le \|z^{k+s}\| + b_n\|z^{k+s-b_n}\| \le 4,$$

nos quedan las tres siguientes codiciones:

$$\begin{aligned}(1+b_n)2^{\frac{2(n-1)a_n-(1/2)b_n}{na_n}} &\le 4,\\ 2^{\frac{2(n-1)a_n+nb_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} + b_n 2^{\frac{2(n-1)a_n-(1/2)b_n}{na_n}} &\le 4,\\ 2^{\frac{2(n-1)a_n+nb_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} + b_n 2^{\frac{2(n-1)a_n+(n-1)b_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} &\le 4,\end{aligned}$$

que se satisfacen si b_n y a_{n+1} son suficientemente grandes.

– Si $n > m$, separamos casos según el valor de $k + s$:

(i) Si $k + s \leq (n-1)a_n + rb_n$, entonces f_{k+s} también se define por (3.8) y queda

$$f_{k+s} = z^{k+s} - b_n z^{k+s-b_n} = T^s f_k.$$

Así,

$$\|T^s f_k\| = 1 \leq 4.$$

(ii) Si $k + s > (n-1)a_n + rb_n$, entonces afirmamos que

$$k + s - b_n < r(a_n + b_n),$$

y en particular,

$$k + s < r(a_n + b_n) + b_n < (r+1)(a_n + b_n).$$

En efecto, usando que $n \geq m + 1$ y las cotas de k y s, tenemos que

$$\begin{aligned} k + s - b_n &\leq (n-1)a_n + (r-1)b_n + b_m + (m-1)a_m \\ &\leq (n-1)a_n + (r-1)b_n + b_{n-1} + (n-2)a_{n-1}. \end{aligned}$$

Ahora, probar que esto es menor que $r(a_n + b_n)$ equivale a probar que

$$(n-1)a_n + b_{n-1} + (n-2)a_{n-1} < ra_n + b_n,$$

y esto se cumple ya que, por (3.20) tenemos $(n-2)a_{n-1} < v_{n-1} < a_n$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} (n-1)a_n + b_{n-1} + (n-2)a_{n-1} <& na_n + b_{n-1} \\ <& b_n + b_{n-1} && [\text{usando } na_n < b_n \text{ por } (3.21)] \\ <& b_n + a_n && [\text{usando } b_{n-1} < a_n] \\ \leq& ra_n + b_n. \end{aligned}$$

De este modo, juntando esto con la desigualdad $k + s > (n-1)a_n + rb_n$ que estamos considerando, tenemos

$$(n-1)a_n + rb_n < k + s < (r+1)(a_n + b_n) \tag{3.27}$$

y también

$$(n-1)a_n + (r-1)b_n < k + s - b_n < r(a_n + b_n).$$

Así pues, f_{k+s-b_n} se define según (3.7) con la misma r y nos queda

$$\begin{aligned} f_{k+s-b_n} &= 2^{\frac{(r-\frac{1}{2})b_n - k - s + b_n}{na_n}} z^{k+s-b_n} \\ &= 2^{\frac{(r+\frac{1}{2})b_n - k - s}{na_n}} z^{k+s-b_n}. \end{aligned}$$

Ahora, usando que $k + s \leq (n-1)a_n + rb_n + b_m + (m-1)a_m$ y que, gracias a (3.21), tenemos $(m-1)a_m < b_m$, podemos deducir que

$$\begin{aligned} \|z^{k+s-b_n}\| =& 2^{\frac{k+s-(r+\frac{1}{2})b_n}{na_n}} \\ <& 2^{\frac{(n-1)a_n + 2b_m - (1/2)b_n}{na_n}}. \end{aligned}$$

Para $\|z^{k+s}\|$, en cambio, tenemos que distinguir casos según el valor de r:
– Si $r < n-1$, por (3.27), definimos f_{k+s} según (3.7) con $r' = r+1$:

$$f_{k+s} = 2^{\frac{(r+\frac{1}{2})b_n - k - s}{na_n}} z^{k+s},$$

y nos queda

$$\|z^{k+s}\| = \|z^{z+s-b_n}\| \leq 2^{\frac{(n-1)a_n + 2b_m - (1/2)b_n}{na_n}}.$$

– Si $r = n-1$, sustituyendo en (3.27) y usando la condición (3.20), tenemos

$$\begin{aligned}(n-1)(a_n+b_n) = v_n < k+s <& n(a_n+b_n)\\ =& v_n + (a_n+b_n)\\ <& v_n + 2b_n < a_{n+1}.\end{aligned}$$

De este modo, definimos f_{k+s} según (3.5) con $r' = 1$ y $n' = n+1$, con lo que

$$f_{k+s} = 2^{\frac{(1/2)a_{n+1} - k - s}{b_n}} z^{k+s}.$$

Así, usando que la cota para $k+s$ con $r = n-1$ es

$$k + s \leq v_n + b_{n-1} + (n-2)a_{n-1},$$

deducimos

$$\|z^{k+s}\| = 2^{\frac{k+s-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} \leq 2^{\frac{v_n + b_{n-1} + (n-2)a_{n-1} - (1/2)a_{n+1}}{b_n}}.$$

Resumiendo, hemos obtenido que si $r < n-1$, entonces

$$\|T^s f_k\| \leq \|z^{k+s}\| + b_n\|z^{k+s-b_n}\| \leq (1+b_n)2^{\frac{(n-1)a_n + 2b_m - (1/2)b_n}{na_n}},$$

y si $r = n-1$, entonces

$$\|T^s f_k\| \leq \|z^{k+s}\| + b_n\|z^{k+s-b_n}\| \leq 2^{\frac{v_n + b_{n-1} + (n-2)a_{n-1} - (1/2)a_{n+1}}{b_n}} + b_n 2^{\frac{(n-1)a_n + 2b_m - (1/2)b_n}{na_n}}.$$

En ambos casos, si b_n y a_{n+1} son suficientemente grandes, se satisface la desigualdad

$$\|T^s f_k\| \leq 4,$$

y con esto concluimos la demostración del Lema 3.13.

□

Tras este lema técnico, pasemos a dar una definición:

Definición 3.14. *Sea $m > 2$. Definimos una aplicación lineal*

$$Q_m : P[z] \longrightarrow P_{(m-1)a_m}[z]$$

de manera que:

$$Q_m f_k = \begin{cases} f_k & \text{si } 0 \leq k \leq (m-1)a_m, \\ 0 & \text{si } k > (m-1)a_m \text{ y } k \notin O_m, \\ -a_m z^j & \text{si } k \in O_m, \text{ donde } k = (n-m)a_n + j \text{ con } 0 \leq j \leq v_{m-1}, n > m. \end{cases}$$

Observamos que si $k \in O_m$, entonces

$$k \geq a_{m+1} > (m-1)a_m,$$

por lo que Q_m está bien definida.

Lema 3.15. *La aplicación lineal Q_m es continua*[8] *en $P[z]$. Además, existe una constante C_m que depende de $a_1, b_1, ..., a_{m-1}, b_{m-1}, a_m$ tal que, para todo $g \in P[z]$,*

$$|Q_m g| \leq C_m \|g\|, \tag{3.28}$$

y para toda $0 \leq j \leq (m-1)a_m$,

$$|f_j| \leq C_m \;\; y \;\; \|z^j\| \leq C_m. \tag{3.29}$$

Demostración. Recordemos que, por la condición (3.9), se cumple

$$v_{m-1} < (m-1)a_m.$$

Ahora, fijándonos en la construcción de la base $\{f_k\}_k$, tenemos:

(i) Para $0 \leq j \leq v_{m-1}$, $\{f_j\}_j$ se construye según (3.5), (3.6), (3.7) y (3.8) con $n \in \{1, ..., m-1\}$ y $r \in \{1, ..., n-1\}$, por lo que sólo intervienen

$$a_1, a_2, ..., a_{m-1} \text{ y } b_1, b_2, ..., b_{m-1}.$$

(ii) Para $v_{m-1} < j \leq (m-1)a_m$, en cambio, usamos (3.5) con $n = m$ y $r \in \{1, ..., n-1\}$ y (3.6) con $n = m$ y $r \in \{1, ..., n-2\}$, por lo que se construye $\{f_j\}_j$ usando

$$a_2, a_3, ..., a_m \text{ y } b_{m-1}.$$

De este modo, existe una constante $C_{m,1} = C_{m,1}(a_1, b_1, ..., a_{m-1}, b_{m-1}, a_m)$ de manera que

$$a_m \leq C_{m,1}$$

y, para $0 \leq k \leq (m-1)a_m$, si escribimos $f_k = \sum_{i=0}^k \lambda_i z^i$,

$$|f_k| = \sum_{i=0}^{k} |\lambda_i| \leq C_{m,1}.$$

Además, por lo que hemos visto en (i) y (ii), y sabiendo que z^j se escribe como combinación lineal de $f_1, ..., f_j$, podemos encontrar una constante $C_{m,2} = C_{m,2}(a_1, b_1, ..., a_{m-1}, b_{m-1}, a_m)$ de manera que, para $0 \leq j \leq (m-1)a_m$,

$$\|z^j\| \leq C_{m,2}.$$

[8]La continuidad que queremos probar en este lema se refiere a la aplicación Q_m considerando, tanto en el espacio de salida $P[z]$ como en el de llegada $P_{(m-1)a_m}[z]$, la norma $\|\cdot\|$. Además, de (3.28) se deduce la continuidad de Q_m considerando $P_{(m-1)a_m}[z]$ con la norma $|\cdot|$.

Sea $C_m = \max\{C_{m,1}, C_{m,2}\}$. Con esta constante, ya tenemos probado (3.29). Ahora, si tomamos un elemento de la base $f_k \in P[z]$, dependiendo del valor de k, hay tres opciones:

$$Q_m f_k = \begin{cases} f_k & \text{con } 0 \leq k \leq (m-1)a_m, \\ 0 & \text{o bien,} \\ -a_m z^j & \text{con } 0 \leq j \leq v_{m-1}. \end{cases}$$

En cualquiera de los casos, se tiene

$$\|Q_m f_k\| \leq a_m C_{m,2} \leq a_m C_m.$$

En general, si $g = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k \in P[z]$,[9]

$$\|Q_m g\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \|Q_m f_k\| \leq a_m C_m \|g\|,$$

lo que prueba la continuidad de Q_m en $P[z]$. Además,

$$|Q_m f_k| \leq \max_{k \leq (m-1)a_m} \{|f_k|, a_m\} \leq C_{m,1} \leq C_m,$$

y por lo tanto,

$$|Q_m g| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| |Q_m f_k| \leq C_m \|g\|,$$

probando así (3.28). □

Observación 3.16. Por continuidad, podemos extender Q_m a todo el espacio completado E, obteniendo así un operador lineal y acotado de $\mathcal{L}(E, P_{(m-1)a_m}[z])$. Mantendremos la notación de Q_m para esta aplicación.

Corolario 3.17 (del Lema 3.13)**.** *Si $m > 2$ y $b_m + a_m \leq s \leq b_m + (m-1)a_m$, entonces, para todo $g \in E$, se cumple*

$$\|T^s g - T^s Q_m g\| \leq 4\|g\|. \tag{3.30}$$

Demostración. Supongamos primero $g = f_k$.

- Si $k \leq (m-1)a_m$, entonces $Q_m f_k = f_k$ y la parte izquierda de (3.30) se anula.
- Si $k > (m-1)a_m$ y $k \notin O_m$, entonces $Q_m f_k = 0$ y, por el Lema 3.13,

$$\|T^s f_k\| \leq 4 = 4\|f_k\|.$$

- Si $k > (m-1)a_m$ y $k \in O_m$, entonces $Q_m f_k = -a_m z^j$ y

$$T^s Q_m f_k = -a_m z^{j+s}.$$

Así, usando otra vez el Lema 3.13, la parte izquierda de (3.30) queda acotada por $4\|f_k\|$:

$$\|T^s f_k + a_m z^{j+s}\| \leq 1 \leq 4\|f_k\|.$$

[9] Recordemos que, pese a la notación en forma de serie, el conjunto $\{k \geq 0 : \alpha_k \neq 0\}$ es finito.

Supongamos ahora que $g = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k \in P[z]$, donde $\{k \geq 0 : \alpha_k \neq 0\}$ es finito. Se tiene

$$\begin{aligned}
\|T^s g - T^s Q_m g\| &= \left\| T^s \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k \right) - T^s Q_m \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k \right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (T^s f_k - T^s Q_m f_k) \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \|T^s f_k - T^s Q_m f_k\| \\
&\leq 4\|g\|.
\end{aligned}$$

Finalmente, sea $g \in E$, donde $g = \lim_{k\to\infty} g_k$ con $g_k \in P[z]$ para todo $k \geq 0$. Entonces, usando la continuidad de T, de Q_m y de la norma, nos queda

$$\begin{aligned}
\|T^s g - T^s Q_m g\| &= \left\| T^s \lim_{k\to\infty} g_k - T^s Q_m \lim_{k\to\infty} g_k \right\| \\
&= \left\| \lim_{k\to\infty} (T^s g_k - T^s Q_m g_k) \right\| \\
&= \lim_{k\to\infty} \|T^s g_k - T^s Q_m g_k\| \\
&\leq \lim_{k\to\infty} 4\|g_k\| = 4\|g\|,
\end{aligned}$$

con lo que terminamos la prueba del corolario. $\square$

Lema 3.18. *Sea $g \in E$ con $\|g\| = 1$. Supongamos que para cierta $m > 2$ y cierta r, con $1 \leq r \leq m-2$, se cumple*

$$|P_{ra_m}(Q_m g)| \geq 1/a_m.$$

Entonces, existe un polinomio φ de manera que

$$\|\varphi(T)g - 1\| \leq 3/a_{m-r-1}.$$

Demostración. Sea $h = Q_m g$. Por (3.28), y usando que $\|g\| = 1$, tenemos

$$|h| \leq C_m.$$

Ahora, aplicando el Lema 3.6 con $n' = (m-1)a_m$, $j' = (m-2)a_m \leq n'$, $\varepsilon' = 1/(a_m C_m)$, $\delta' = 1/a_m$, $M' = C_m$, $m' = ra_m \leq j'$ y $g' = h$, como tenemos que

$$h = Q_m g \in P_{(m-1)a_m}[z]$$

y se cumple

$$|h| \leq C_m, \qquad |P_{ra_m}(h)| \geq 1/a_m,$$

entonces, existe una constante $K > 0$ y un polinomio $q \in P_{(m-2)a_m}[z]$ tales que $|q| \leq K$ y

$$|P_{(m-2)a_m}(qh) - z^{ra_m}| < 1/(a_m C_m).$$

Sea $\psi = z^{a_m} q \in P_{(m-1)a_m}[z]$. Dado que multiplicar un polinomio por una potencia de z no altera el valor de su norma $|\cdot|$, tenemos[10]

$$\begin{aligned}|P_{(m-2)a_m}(qh) - z^{ra_m}| =& |z^{a_m}(P_{(m-2)a_m}(qh) - z^{ra_m})| \\ =& |P_{(m-1)a_m}(\psi h) - z^{(r+1)a_m}|,\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$|P_{(m-1)a_m}(\psi h) - z^{(r+1)a_m}| < 1/(a_m C_m).$$

Ahora, como $r \leq m-2$, tenemos que $P_{(m-1)a_m}(\psi h) - z^{(r+1)a_m} \in P_{(m-1)a_m}$, y por lo tanto, podemos expresarlo como combinación lineal de $1, z, ..., z^{(m-1)a_m}$. De este modo, usando (3.29), nos queda

$$\begin{aligned}\|P_{(m-1)a_m}(\psi h) - z^{(r+1)a_m}\| =& \left\| \sum_{j=0}^{(m-1)a_m} \alpha_j z^j \right\| \\ \leq& \sum_{j=0}^{(m-1)a_m} |\alpha_j| \|z^j\| \\ \leq& |P_{(m-1)a_m}(\psi h) - z^{(r+1)a_m}| \cdot C_m,\end{aligned}$$

por lo que llegamos a

$$\|P_{(m-1)a_m}(\psi h) - z^{(r+1)a_m}\| < 1/a_m. \tag{3.31}$$

Sea

$$\varphi = \frac{1}{b_m} z^{b_m} \psi = \frac{1}{b_m} z^{a_m + b_m} q.$$

Por (3.8), si

$$r(a_m + b_m) \leq k \leq (m-1)a_m + rb_m,$$

tenemos

$$\left\| \frac{1}{b_m} z^k - z^{k-b_m} \right\| = \left\| \frac{1}{b_m} f_k \right\| = \frac{1}{b_m}.$$

Poniendo $k' = k - b_m$ y tomando $r = 1$, tenemos que, para

$$a_m \leq k' \leq (m-1)a_m,$$

se cumple

$$\left\| z^{k'} - \frac{1}{b_m} z^{k'+b_m} \right\| = \frac{1}{b_m}. \tag{3.32}$$

Por comodidad, denotemos ahora

$$\begin{aligned}A =& \|P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi h) - P_{(m-1)a_m}(\psi h)\| \\ =& \|P_{(m-1)a_m+b_m}((1/b_m) z^{b_m} \psi h) - P_{(m-1)a_m}(\psi h)\| \\ =& \|(1/b_m) z^{b_m} P_{(m-1)a_m}(\psi h) - P_{(m-1)a_m}(\psi h)\| \\ =& \left\| P_{(m-1)a_m}(\psi h) \left(\frac{1}{b_m} z^{b_m} - 1 \right) \right\|.\end{aligned}$$

[10]Usamos también que, dados r, s naturales y un polinomio p, se tiene $z^s P_n(p) = P_{n+s}(z^s p)$.

Escribamos la expresión del polinomio $P_{(m-1)a_m}(\psi h)$ en la base estándar. Como por la definición de ψ tenemos

$$\operatorname{val}(\psi h) \geq \operatorname{val}(\psi) \geq a_m,$$

nos queda

$$\psi h = \sum_{k \geq a_m} \gamma_k z^k,$$

y así,

$$P_{(m-1)a_m}(\psi h) = \sum_{k=a_m}^{(m-1)a_m} \gamma_k z^k.$$

De este modo, usando (3.32) y las cotas $|h| \leq C_m$, $|q| \leq K$, resulta

$$\begin{aligned}
A \leq & \sum_{k=a_m}^{(m-1)a_m} \left(|\gamma_k| \left\| \frac{1}{b_m} z^{b_m+k} - z^k \right\| \right) \leq \frac{1}{b_m} \sum_{k \geq a_m} |\gamma_k| \\
= & \frac{1}{b_m} |\psi h| \leq \frac{1}{b_m} |\psi| \cdot |h| \\
\leq & \frac{C_m}{b_m} |\psi| = \frac{C_m}{b_m} |q| \\
\leq & \frac{C_m K}{b_m}.
\end{aligned}$$

Con esto, y suponiendo que b_m es suficientemente grande, obtenemos

$$A \leq 1/a_m. \tag{3.33}$$

Además,

$$\deg(\varphi h) = \deg(z^{b_m} \psi) \cdot \deg(h) \leq b_m + 2(m-1)a_m < 2(a_m + b_m),$$

por la condición (3.21). De este modo, tenemos la expresión

$$\varphi h - P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi h) = \sum_{k=(m-1)a_m+b_m+1}^{b_m+2(m-1)a_m} \alpha_k z^k,$$

y como $(m-1)a_m + b_m < k \leq b_m + 2(m-1)a_m < 2(a_m + b_m)$, tenemos por (3.7) con $r = 2$:

$$\|z^k\| = 2^{\frac{k-(3/2)b_m}{ma_m}} \leq 2^{\frac{2(m-1)a_m-(1/2)b_m}{ma_m}}.$$

Así, usando también que $|\varphi| = |q|/b_m \leq K/b_m$ y $|h| \leq C_m$,

$$\begin{aligned}
\|\varphi h - P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi h)\| \leq & \sum_{k=(m-1)a_m+b_m+1}^{b_m+2(m-1)a_m} |\alpha_k| \cdot \|z^k\| \\
\leq & |\varphi h| \cdot 2^{\frac{2(m-1)a_m-(1/2)b_m}{ma_m}} \\
\leq & \frac{C_m K}{b_m} \cdot 2^{\frac{2(m-1)a_m-(1/2)b_m}{ma_m}}.
\end{aligned}$$

Si b_m es suficientemente grande, se cumple

$$\|\varphi h - P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi h)\| < 1/a_m. \tag{3.34}$$

Ahora, como

$$\varphi = \frac{1}{b_m} z^{a_m+b_m} q,$$

con $\deg(q) \leq (m-2)a_m$, podemos escribir

$$\varphi = \sum_{s=a_m+b_m}^{(m-1)a_m+b_m} \lambda_s z^s,$$

y como $|q| \leq K$, tenemos $|\varphi| \leq K/b_m$. También, para cada $a_m + b_m \leq s \leq (m-1)a_m + b_m$,

$$T^s Q_m g = z^s h,$$

y podemos usar (3.30), obteniendo

$$\begin{aligned} \|\lambda_s z^s g - \lambda_s z^s h\| =& |\lambda_s| \|z^s g - z^s h\| \\ =& |\lambda_s| \|T^s g - T^s Q_m g\| \\ \leq& 4|\lambda_s| \|g\| = 4|\lambda_s|. \end{aligned}$$

Con esto,

$$\begin{aligned} \|\varphi(T)g - \varphi h\| =& \left\| \sum_{s=a_m+b_m}^{(m-1)a_m+b_m} \lambda_s z^s g - \sum_{s=a_m+b_m}^{(m-1)a_m+b_m} \lambda_s z^s h \right\| \\ \leq& \sum_{s=a_m+b_m}^{(m-1)a_m+b_m} \|\lambda_s z^s g - \lambda_s z^s h\| \\ \leq& 4 \sum_{s=a_m+b_m}^{(m-1)a_m+b_m} |\lambda_s| \\ =& 4|\varphi| \leq 4K/b_m. \end{aligned}$$

Así, si b_m es suficientemente grande, tenemos

$$\|\varphi(T)g - \varphi h\| < 1/a_m. \tag{3.35}$$

Por otro lado, como $r \leq m-2$, podemos usar (3.11) con $r' = r+1 \leq m-1$ y $k = (r+1)a_m$, obteniendo así

$$\|z^{(r+1)a_m} - 1\| \leq 2/a_{m-r-1}. \tag{3.36}$$

Finalmente, juntando las acotaciones (3.35), (3.34), (3.33), (3.31) y (3.36) que hemos encontrado, nos queda

$$\begin{aligned} \|\varphi(T)g - 1\| \leq& \|\varphi(T)g - \varphi h\| + \|\varphi h - P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi h)\| + \\ &+ \|P_{(m-1)a_m+b_m}(\varphi h) - P_{(m-1)a_m}(\psi h)\| + \\ &+ \|P_{(m-1)a_m}(\psi h) - z^{(r+1)a_m}\| + \|z^{(r+1)a_m} - 1\| \\ <& \frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_m} + \frac{1}{a_m} + \frac{2}{a_{m-r-1}}. \end{aligned}$$

Además, se cumple que

$$\frac{4}{a_m} + \frac{2}{a_{m-r-1}} < \frac{3}{a_{m-r-1}},$$

ya que, por la condición de crecimiento (3.9), se tiene

$$4a_{m-2} \leq 2(a_{m-2} + b_{m-2}) \leq 2v_{m-2} < 2a_{m-1} < v_{m-1} < a_m,$$

y por lo tanto,

$$\frac{4}{a_m} < \frac{1}{a_{m-2}} \leq \frac{1}{a_{m-r-1}}.$$

De este modo, concluimos la demostración del Lema 3.18. □

Teorema 3.19. *El operador T de la Definición 3.11 carece de subespacios invariantes no triviales.*

Demostración. Tal y como hemos visto al comienzo de este capítulo, para demostrar que T no tiene subespacios invariantes no triviales (o, equivalentemente, que todo elemento no nulo de E es $T-$cíclico), basta probar que, para todo $g \in E \setminus \{0\}$, se cumple (3.1). Normalizando, queremos ver que para todo $\varepsilon > 0$ y todo $g \in E$ con $\|g\| = 1$, existe un polinomio φ de manera que

$$\|\varphi(T)g - 1\| < \varepsilon.$$

Así, sea $\varepsilon > 0$ y $g \in E$ con $\|g\| = 1$. Sea $k > 1$ tal que $1/a_k < \varepsilon/3$. Por el Lema 3.18, basta encontrar $r \geq 1$ y m cumpliendo

$$m \geq r + k + 1,$$

de manera que

$$|P_{ra_m}(Q_m g)| \geq 1/a_m.$$

En efecto, se cumple que $m > 2$, $1 \leq r \leq m - 2$ y, aplicando el lema,

$$\|\varphi(T)g - 1\| \leq 3/a_{m-r-1} \leq 3/a_k < \varepsilon.$$

Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que para todo $r \geq 1$ y todo $m \geq r+k+1$, se tiene

$$|P_{ra_m}(Q_m g)| < 1/a_m, \tag{3.37}$$

y llegaremos a contradicción.

Para cada m, razonando como en el Lema 3.15, podemos encontrar una constante $D_m > 0$, que depende de $a_1, b_1, ..., a_m, b_m$, de manera que, si $0 \leq j \leq v_m$, entonces[11]

$$\|z^j\| \leq D_m.$$

Tal y como hemos visto en el Apartado 2.5, podemos poner

$$g = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j f_j,$$

[11]La única diferencia con el Lema 3.15 es que, esta vez, el rango de j es mayor, y por lo tanto, la constante D_m depende de un parámetro más (b_m) que la constante C_m del lema.

con $\sum_{j\geq 0}|\alpha_j| = 1$. Además, para cada $n > 1$, podemos escribir

$$\sum_{i=0}^{(n-1)a_n} \alpha_i f_i = \sum_{j=0}^{(n-1)a_n} \beta_{n,j} z^j,$$

y para $n > 2$, por la definición de Q_n, tenemos

$$Q_n\left(\sum_{i>(n-1)a_n} \alpha_i f_i\right) = \sum_{j=0}^{v_{n-1}} \lambda_{n,j} z^j,$$

cumpliendo

$$\lambda_{n,j} = -a_n \sum_{m>n} \alpha_{j+(m-n)a_m}. \tag{3.38}$$

En efecto, como $i > (n-1)a_n$,

$$Q_n f_i = \begin{cases} -a_n z^j & \text{si } i = (m-n)a_m + j \text{ con } j \leq v_{n-1} \text{ para cierta } m > n, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y de este modo, para cada $j \leq v_{n-1}$, el coeficiente $\lambda_{n,j}$ será

$$-a_n \sum_{m>n} \alpha_{(m-n)a_m+j}.$$

Así, usando también que $Q_n f_i = f_i$ para $i \leq (n-1)a_n$, resulta

$$\begin{aligned} Q_n g =& Q_n\left(\sum_{i=0}^{(n-1)a_n} \alpha_i f_i + \sum_{i>(n-1)a_n} \alpha_i f_i\right) \\ =& \sum_{j=0}^{(n-1)a_n} \beta_{n,j} z^j + \sum_{j=0}^{v_{n-1}} \lambda_{n,j} z^j. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ahora, como $v_{m-1} < a_m \leq ra_m$, aplicando P_{ra_m} a la igualdad (3.39) con $n = m$, obtenemos

$$P_{ra_m}(Q_m g) = \sum_{j=0}^{v_{m-1}} (\beta_{m,j} + \lambda_{m,j}) z^j + \sum_{j=v_{m-1}+1}^{ra_m} \beta_{m,j} z^j,$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} |P_{ra_m}(Q_m g)| &= \sum_{j=0}^{v_{m-1}} |\beta_{m,j} + \lambda_{m,j}| + \sum_{j=v_{m-1}+1}^{ra_m} |\beta_{m,j}| \\ &\geq \sum_{j=v_{m-1}+1}^{ra_m} |\beta_{m,j}|. \end{aligned}$$

Así, usando (3.37), obtenemos que si $r \geq 1$ y $m - r - 1 \geq k$, entonces

$$\sum_{j=v_{m-1}+1}^{ra_m} |\beta_{m,j}| < 1/a_m. \tag{3.40}$$

Si $ra_m + v_{m-r-2} < j \leq ra_m + v_{m-r-1}$, estamos en el rango de aplicación de (3.6) para la definición de f_j, luego

$$\alpha_j f_j = \alpha_j a_{m-r}(z^j - z^{j-a_n}),$$

y por lo tanto

$$\beta_{m,j} = \alpha_j a_{m-r}.$$

Reemplazando ahora r por $r+1$ en (3.40), obtenemos que, si $r \geq 0$ y $m - r - 2 \geq k$,

$$\sum_{j=v_{m-1}+1}^{(r+1)a_m} |\beta_{m,j}| < 1/a_m.$$

Además, como $v_{m-1} < a_m$, se cumple que

$$v_{m-1} < ra_m + v_{m-r-2},$$

y puesto que $v_{m-r-1} \leq v_{m-1} < a_m$, también tenemos

$$ra_m + v_{m-r-1} < (r+1)a_m.$$

Así, podemos considerar la siguiente suma parcial, que continuará siendo menor que $1/a_m$:

$$\sum_{j=ra_m+v_{m-r-2}+1}^{ra_m+v_{m-r-1}} |\beta_{m,j}| < 1/a_m.$$

Sustituyendo la expresión de $\beta_{m,j}$ en este intervalo, nos queda que, si $r \geq 0$ y $m - r - 2 \geq k$,

$$\sum_{j=ra_m+v_{m-r-2}+1}^{ra_m+v_{m-r-1}} |\alpha_j| < \frac{1}{a_{m-r}} \cdot \frac{1}{a_m}. \tag{3.41}$$

Pongamos ahora en la expresión anterior $r = m - n$, con una cierta $m > n$. Nos queda, para $n \geq k + 2$,

$$\sum_{j=(m-n)a_m+v_{n-2}+1}^{(m-n)a_m+v_{n-1}} |\alpha_j| = \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} |\alpha_{j+(m-n)a_m}| < \frac{1}{a_n a_m}.$$

Con esto y (3.38), obtenemos que, si $n \geq k + 2$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} |\lambda_{n,j}| &= \sum_{m>n} a_n \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} |\alpha_{j+(m-n)a_m}| \\ &< \sum_{m>n} 1/a_m \\ &< 2/a_{n+1}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Para justificar la última desigualdad, basta probar que

$$S = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{a_{n+r}} < \frac{1}{a_{n+1}}.$$

En efecto, como por la condición (3.21) tenemos que $ma_m < a_{m+1}$, entonces, para cada $r \geq 2$, se cumple

$$a_{n+r} > (n+r-1)a_{n+r-1} > \cdots > (n+r-1)\cdots(n+1)a_{n+1} > (n+1)^{r-1}a_{n+1}.$$

Así,

$$S < \frac{1}{a_{n+1}} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{r-1}} = \frac{1}{na_{n+1}} < \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Pongamos ahora, en (3.37), $m = n$ y $r = 1$. Obtenemos que, si $n \geq k+2$, entonces

$$|P_{a_n}(Q_n g)| < \frac{1}{a_n}.$$

Además, usando (3.39), como $v_{n-1} < a_n$,

$$\begin{aligned} |P_{a_n}(Q_n g)| &= \sum_{j=0}^{v_{n-1}} |\beta_{n,j} + \lambda_{n,j}| + \sum_{j=v_{n-1}+1}^{a_n} |\beta_{n,j}| \\ &\geq \sum_{j=0}^{v_{n-1}} |\beta_{n,j} + \lambda_{n,j}|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple

$$\sum_{j=0}^{v_{n-1}} |\beta_{n,j} + \lambda_{n,j}| < \frac{1}{a_n}. \tag{3.43}$$

Con esto último y (3.42), tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} |\beta_{n,j}| &= \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} |\beta_{n,j} + \lambda_{n,j} - \lambda_{n,j}| \\ &\leq \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} |\beta_{n,j} + \lambda_{n,j}| + \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} |\lambda_{n,j}| \\ &< \frac{1}{a_n} + \frac{2}{a_{n+1}} < \frac{2}{a_n}, \end{aligned}$$

puesto que, por la condición (3.10), tenemos trivialmente $2a_n < a_{n+1}$.

Ahora, observamos que para $v_{n-1} < j \leq (n-1)a_n$, estamos en el rango de aplicación de las fórmulas (3.5) y (3.6) para la definición de los f_j. Además, no aparece ningún término z^i para $v_{n-2} < i \leq v_{n-1}$. En efecto:

- El término z^i no se puede conseguir como un z^j, puesto que los rangos de j y de i son disjuntos.
- El término z^i tampoco puede ser de la forma z^{j-a_n}, puesto que, si $i = j - a_n$, tendríamos

$$v_{n-2} + a_n < j \leq v_{n-1} + a_n < 2a_n,$$

  y por lo tanto, f_j se definiría según la fórmula (3.5) con $r = 2$, donde no aparece el término z^{j-a_n}.

De este modo[12], para $v_{n-2} < i \leq v_{n-1}$, los términos z^i son exactamente los de la forma z^j que aparecen en la definición de el f_j correspondiente. Así, en la siguiente expresión, se cancelan todos los términos de grado mayor que v_{n-2}, y resulta

$$\sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} \alpha_j f_j - \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} \beta_{n,j} z^j = p_{v_{n-2}} \in P_{v_{n-2}}[z].$$

Consideremos la expresión de $p_{v_{n-2}}$ en la base $\{f_0, ..., f_{v_{n-2}}\}$ de $P_{v_{n-2}}[z]$:

$$p_{v_{n-2}} = \sum_{j=0}^{v_{n-2}} \delta_j f_j.$$

Ahora, usando la cota D_{n-1} y la desigualdad $\sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} |\beta_{n,j}| < 2/a_n$, nos queda

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} \beta_{n,j} z^j \right\| &\leq \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} |\beta_{n,j}| \|z^j\| \\ &\leq D_{n-1} \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} |\beta_{n,j}| \\ &< \frac{2D_{n-1}}{a_n}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} \beta_{n,j} z^j \right\| &= \left\| \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} \alpha_j f_j - \sum_{j=0}^{v_{n-2}} \delta_j f_j \right\| \\ &= \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} |\alpha_j| + \sum_{j=0}^{v_{n-2}} |\delta_j| \\ &\geq \sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} |\alpha_j|. \end{aligned}$$

[12]Tal y como se define la base, un término z^i sólo puede aparecer en f_j con $j = i$, $j = i + a_n$ o $j = i + b_n$, pero hemos probado que, para $j > i$, esto no pasa. Así, para $v_{n-2} < i \leq v_{n-1}$ y $0 \leq j \leq (n-1)a_n$, el término z^i sólo aparece en $f_j = f_i$.

De este modo, juntándolo todo, llegamos a que

$$\sum_{j=v_{n-2}+1}^{v_{n-1}} |\alpha_j| < \frac{2D_{n-1}}{a_n} < \frac{1}{\sqrt{a_n}},$$

si suponemos a_n suficientemente grande. Ahora, como estas acotaciones valían para $n \geq k+2$, poniendo $m = n-1$ podemos escribir que, si $m \geq k+1$, se cumple

$$\sum_{j=v_{m-1}+1}^{v_m} |\alpha_j| < \frac{1}{\sqrt{a_{m+1}}}. \tag{3.44}$$

Tenemos también, por un lado

$$v_{m-1} < a_m \leq (m-n)a_m,$$

y por otro, usando (3.9) y (3.21),

$$v_{n-1} + (m-n)a_m < v_{m-1} + ma_m < a_m + b_m < v_m.$$

Con esto, la desigualdad (3.44) y la expresión (3.38), obtenemos, para $n \geq k+1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{v_{n-1}} |\lambda_{n,j}| \leq& a_n \sum_{m>n} \sum_{j=0}^{v_{n-1}} |\alpha_{j+(m-n)a_m}| \\
=& a_n \sum_{m>n} \sum_{j=(m-n)a_m}^{v_{n-1}+(m-n)a_m} |\alpha_j| \\
\leq& a_n \sum_{m>n} \sum_{j=v_{m-1}+1}^{v_m} |\alpha_j| \\
<& a_n \sum_{m>n} 1/\sqrt{a_{m+1}} \\
<& \frac{1}{a_{n+1}},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

si $\{a_n\}_n$ crece suficientemente rápido. Más concretamente, basta con que se cumpla la condición

$$(n+2)^2 a_n a_{n+1} < n\sqrt{a_{n+2}}. \tag{3.46}$$

En efecto, recordemos que teníamos las condiciones (3.20) y (3.21):

$$(2m-4)a_m < b_m \text{ y } v_m + 4b_m < a_{m+1}.$$

Sumando $v_m + 3b_m = (m-1)a_m + (m+2)b_m$ a la primera y usando la segunda, obtenemos

$$(3m-5)a_m + (m+2)b_m < a_{m+1},$$

que, volviendo a usar (3.20), implica

$$(2m^2 + 3m - 13)a_m < a_{m+1},$$

y como $m^2 < 2m^2 + 3m - 13$ si $m > 2$, nos queda

$$m^2 a_m < a_{m+1}.$$

Con esto, para $r \geq 2$,

$$a_{n+r} > (n+r-1)^2 a_{n+r-1} > (n+r-2)^2(n+r-1)^2 a_{n+r-2} > \cdots > (n+2)^{2(r-3)} a_{n+2}.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
\sum_{m>n} 1/\sqrt{a_{m+1}} &= \sum_{r=2}^{\infty} 1/\sqrt{a_{n+r}} \\
&< \frac{1}{\sqrt{a_{n+2}}} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^{r-3}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a_{n+2}}} \cdot \frac{(n+2)^3}{n^2+3n+2} \\
&< \frac{1}{\sqrt{a_{n+2}}} \cdot \frac{(n+2)^3}{n^2+2n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a_{n+2}}} \cdot \frac{(n+2)^2}{n},
\end{aligned}$$

que, tal y como queríamos probar, es menor que $1/a_n a_{n+1}$ si, y sólo si

$$(n+2)^2 a_n a_{n+1} < n\sqrt{a_{n+2}}.$$

Combinando ahora (3.43) y (3.45), tenemos, para $n \geq k+2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{v_{n-1}} |\beta_{n,j}| &\leq \sum_{j=0}^{v_{n-1}} |\beta_{n,j} + \lambda_{n,j}| + \sum_{j=0}^{v_{n-1}} |\lambda_{n,j}| \\
&< \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \\
&< \frac{2}{a_n},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\left| P_{v_{n-1}} \left(\sum_{j=0}^{(n-1)a_n} \alpha_j f_j \right) \right| < \frac{2}{a_n}. \tag{3.47}$$

Además, por (3.44), como $(n-1)a_n < v_n$,

$$\sum_{j=v_{n-1}+1}^{(n-1)a_n} |\alpha_j| < \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} < \frac{1}{a_n},$$

volviendo a usar la condición (3.46). Observamos también que, si $v_{n-1} < j \leq (n-1)a_n$, entonces

$$P_{v_{n-1}}(f_j) = \begin{cases} -a_{n-r} z^{j-a_n} & \text{si } j - a_n \leq v_{n-1}, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

con cierta $r \leq n-1$. De este modo, para toda $v_{n-1} < j \leq (n-1)a_n$,

$$|P_{v_{n-1}}(f_j)| \leq a_{n-1}.$$

Juntando las dos últimas desigualdades, obtenemos que

$$\left| P_{v_{n-1}} \left(\sum_{j=v_{n-1}+1}^{(n-1)a_n} \alpha_j f_j \right) \right| < \frac{a_{n-1}}{a_n}. \tag{3.48}$$

Combinando esto con (3.47), nos queda, para $n \geq k+2$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{v_{n-1}} \alpha_j f_j \right| =& \left| P_{v_{n-1}} \left(\sum_{j=0}^{(n-1)a_n} \alpha_j f_j \right) - P_{v_{n-1}} \left(\sum_{j=v_{n-1}+1}^{(n-1)a_n} \alpha_j f_j \right) \right| \\ <& \frac{2+a_{n-1}}{a_n}. \end{aligned}$$

Finalmente, por construcción, sabemos que para cada $1 \leq r \leq n-1$ y cada $v_{r-1} < j \leq v_r$, existen reales $A_j \neq 0$, B_j y C_j tales que

$$f_j = A_j z^j + B_j z^{j-a_r} + C_j z^{j-b_r}.$$

Ahora, utilizando la última desigualdad y que $\|z^j\| \leq D_{n-1}$ para toda $j \leq v_{n-1}$, nos queda

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{v_{n-1}} |\alpha_j| =& \left\| \sum_{j=0}^{v_{n-1}} \alpha_j f_j \right\| \\ =& \left\| \alpha_0 f_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{j=v_{r-1}+1}^{v_r} \alpha_j f_j \right\| \\ =& \left\| \alpha_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{j=v_{r-1}+1}^{v_r} \alpha_j (A_j z^j + B_j z^{j-a_r} + C_j z^{j-b_r}) \right\| \\ \leq& D_{n-1} \left(|\alpha_0| + \sum_{j=1}^{v_{n-1}} |\alpha_j| (|A_j| + |B_j| + |C_j|) \right) \\ =& D_{n-1} \left| \alpha_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{j=v_{r-1}+1}^{v_r} \alpha_j (A_j z^j + B_j z^{j-a_r} + C_j z^{j-b_r}) \right| \\ =& D_{n-1} \left| \sum_{j=0}^{v_{n-1}} \alpha_j f_j \right| \\ \leq& D_{n-1} \cdot \frac{2+a_{n-1}}{a_n}. \end{aligned}$$

De este modo, como D_{n-1} sólo depende de elementos anteriores a a_n en la sucesión $\{a_n\}_n$, si ésta crece suficientemente rápido, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{v_{n-1}} |\alpha_j| = 0,$$

que está en contradicción con la hipótesis $\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| = 1$. Así pues, queda terminada la demostración del teorema. $\square$

Para concluir el apartado, sinteticemos un poco el proceso que hemos seguido. Partimos de un par de sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ de naturales con un crecimiento rápido. A partir de ellas, construimos una base $\{f_k\}_k$ y una norma $\|\cdot\|$ en el espacio de polinomios $P[z]$. A continuación, vimos que el operador «multiplicar por z» se podía extender de manera continua a la completación E de $P[z]$ respecto de la norma $\|\cdot\|$, obteniendo así un operador continuo T definido en el espacio de Banach de dimensión infinita E. Finalmente, hemos probado que T carece de subespacios invariantes no triviales. Además, podemos pensar que $T \in \mathcal{L}(\ell^1)$, ya que tenemos una isometría entre E y el espacio de sucesiones ℓ^1. Así pues, no ha hecho falta recurrir a un espacio muy complicado para encontrar un contraejemplo del Problema del Subespacio Invariante.

Apéndice A

Condiciones Suficientes de Crecimiento para $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$

En este apartado, recopilamos todas las condiciones de crecimiento para las sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ que han ido surgiendo a lo largo de la construcción del contraejemplo. De este modo, si encontramos un par de sucesiones que cumplan todas las condiciones aquí recogidas, podremos construir un operador concreto que carezca de subespacios invariantes no triviales.

Condiciones para la Construcción de la Base $\{f_k\}_k$

Para definir correctamente la base $\{f_k\}_k$ del espacio de polinomios $P[z]$, necesitamos:

Condición A.1 (Corresponde a (3.9)).

$$v_{n-1} < a_n.$$

Condición A.2 (Corresponde a (3.10)).

$$(n-2)a_n < b_n.$$

Condiciones para el Lema 3.10

En el enunciado del Lema 3.10, tenemos la hipótesis de que «$\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ crecen suficientemente rápido». Más concretamente, necesitamos, además de las dos condiciones anteriores,

Condición A.3.

$$a_n 2^{\frac{1-(1/2)a_n}{b_{n-1}}}\left(1+\frac{2}{a_1}\right) \leq 1.$$

Condición A.4 (Primera modificación de (3.9)).

$$v_{n-1}+1 < a_n.$$

Condición A.5.

$$a_n^2\left(2^{\frac{1+v_{n-1}-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} + \frac{2}{a_{n+1}} + 2^{\frac{1+v_{n-1}-(1/2)a_n}{b_{n-1}}}\right) \leq 1.$$

Condición A.6.

$$a_1^2\left(2^{\frac{1+(n-1)a_n-(1/2)b_n}{na_n}}+\frac{2}{a_2}+2^{(1-(1/2)a_1)}\right)\leq 1.$$

Condición A.7.

$$2^{\frac{1-a_n-(1/2)b_n}{na_n}}\left(2b_n^{n-1}+b_n^n\left(\frac{2}{a_1}+1\right)\right)\leq 1.$$

Condición A.8 (Primera modificación de (3.10))**.**

$$(n-2)a_n+1<b_n.$$

Condición A.9.

$$(1+b_n)2^{\frac{(n-1)a_n+1-(1/2)b_n}{na_n}}\leq 2.$$

Condición A.10.

$$2^{\frac{(n-1)(a_n+b_n)-(1/2)a_{n+1}}{b_n}}+b_n2^{\frac{(n-1)a_n+1-(1/2)b_n}{na_n}}\leq 2.$$

Condiciones para el Lema 3.13

En este caso, debemos añadir a todas las condiciones anteriores:

Condición A.11 (Corresponde a (3.20). Segunda modificación de (3.9))**.**

$$v_{n-1}+4b_{n-1}<a_n.$$

Condición A.12 (Corresponde a (3.21). Segunda modificación de (3.10))**.**

$$2(n-2)a_n<b_n.$$

Condición A.13.

$$2^{2b_{n-1}}\leq a_n.$$

Condición A.14.

$$a_n2^{\frac{2b_{n-1}-(1/2)a_n}{b_{n-1}}}<1.$$

Condición A.15.

$$a_{n-1}2^{\frac{2b_{n-1}-(1/2)a_n}{b_{n-1}}}\leq 2.$$

Condición A.16.

$$a_{n-1}\left(2^{\frac{(n-1)a_n+2b_{n-1}-(1/2)b_n}{na_n}}+2^{\frac{2b_{n-1}-(1/2)a_n}{b_{n-1}}}\right)\leq 4.$$

Condición A.17.

$$2^{2b_{n-1}}\leq 4a_n.$$

Condición A.18.

$$2a_1+b_n2^{(n-1)a_n+1}\leq a_1b_n^2.$$

Condición A.19.
$$2^{\frac{na_n-(1/2)b_n}{na_n}} b_n^{n+1} \leq 4.$$

Condición A.20.
$$2^{\frac{(n-1)a_n-b_n}{na_n}} \leq 4.$$

Condición A.21.
$$2^{\frac{(n-\frac{3}{2})b_n-v_n}{na_n}+\frac{v_n+2b_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} \leq 4.$$

Condición A.22.
$$2^{\frac{2b_{n-1}}{na_n}} \leq 4.$$

Condición A.23.
$$2^{2b_{n-1}} \leq 4b_n.$$

Condición A.24.
$$(1+b_n)2^{\frac{2(n-1)a_n-(1/2)b_n}{na_n}} \leq 4.$$

Condición A.25.
$$2^{\frac{2(n-1)a_n+nb_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} + b_n 2^{\frac{2(n-1)a_n-(1/2)b_n}{na_n}} \leq 4.$$

Condición A.26.
$$2^{\frac{2(n-1)a_n+nb_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} + b_n 2^{\frac{2(n-1)a_n+(n-1)b_n-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} \leq 4.$$

Condición A.27.
$$(1+b_n)2^{\frac{(n-1)a_n+2b_{n-1}-(1/2)b_n}{na_n}} \leq 4.$$

Condición A.28.
$$2^{\frac{v_n+b_{n-1}+(n-2)a_{n-1}-(1/2)a_{n+1}}{b_n}} + b_n 2^{\frac{(n-1)a_n+2b_{n-1}-(1/2)b_n}{na_n}} \leq 4.$$

Condiciones para el Lema 3.18

Tanto en este apartado como en el siguiente, aparecerán tres constantes: C_n, K_n y D_n.

– C_n cumple, para toda $0 \leq j \leq (n-1)a_n$,
$$|f_j| \leq C_n \text{ y } \|z^j\| \leq C_n.$$

– D_n cumple, para toda $0 \leq j \leq v_n$,
$$\|z^j\| \leq D_n.$$

– K_n es la constante que nos da el Lema 3.6 con $n' = (n-1)a_n$, $j' = (n-2)a_n$, $\varepsilon' = 1/(a_nC_n)$, $\delta' = 1/a_n$ y $M' = C_n$, es decir, que para cada natural $m \leq (n-2)a_n$, y para cada polinomio $g \in P_{(n-1)a_n}[z]$ satisfaciendo $|g| \leq C_n$ y $|P_m(g)| \geq 1/a_n$, existe $q \in P_{(n-2)a_n}[z]$ con $|q| \leq K_n$ y cumpliendo
$$|P_{(n-2)a_n}(gq) - z^m| < \frac{1}{a_nC_n}.$$

Condición A.29.

$$\frac{a_n C_n K_n}{b_n} < 1.$$

Condición A.30.

$$\frac{a_n C_n K_n}{b_n} \cdot 2^{\frac{2(n-1)a_n-(1/2)b_n}{na_n}} < 1.$$

Condición A.31.

$$\frac{4K_n a_n}{b_n} < 1.$$

Condiciones para el Teorema 3.19

Condición A.32.

$$2D_{n-1}\sqrt{a_n} < a_n.$$

Condición A.33 (Corresponde a (3.46).)**.**

$$(n+2)^2 a_n a_{n+1} < n\sqrt{a_{n+2}}.$$

Condición A.34.

$$nD_{n-1}(2+a_{n-1}) \leq a_n.$$

Estudio de las Condiciones de Crecimiento

Una vez recopiladas todas las condiciones de crecimiento, observamos que el mayor obstáculo para poder trabajar con ellas es estimar el valor de las constantes C_n, D_n y K_n. Por este motivo, a continuación, calcularemos el valor de estas constantes en función de los elementos de las sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$.

– Queremos que, para $0 \leq j \leq (n-1)a_n$,

$$|f_j| \leq C_n \text{ y } \|z^j\| \leq C_n.$$

Por un lado, sabemos que para la construcción de los f_j correspondientes a este intervalo, usamos todas las definiciones (3.5) – (3.8) si $j \leq v_{n-1}$, y sólo (3.5) y (3.6) para $v_{n-1} < j \leq (n-1)a_n$. Si calculamos $|f_j|$ en estos casos, observamos que

$$|f_j| \leq \text{máx}\left\{\max_{1\leq r\leq n} 2^{\frac{(r-\frac{3}{2})a_r}{b_{r-1}}}, \max_{1\leq r\leq n-1} 2^{\frac{(r-\frac{3}{2})b_r}{ra_r}}, 2a_{n-1}, b_{n-1}+1\right\}.$$

Por otro lado, como $\|T\| \leq 2$ y $\|1\| = 1$, se tiene

$$\|z^j\| = \|T^j(1)\| \leq 2^j \leq 2^{(n-1)a_n}.$$

De este modo, como en cualquier caso $|f_j| \leq 2^{(n-1)a_n}$, si definimos

$$C_n = 2^{(n-1)a_n},$$

se cumplen las desigualdades buscadas.

– Para D_n, buscamos

$$\|z^j\| \leq D_n$$

para toda $0 \leq j \leq v_n$. Argumentando como para C_n, basta tomar

$$D_n = 2^{v_n} = 2^{(n-1)(a_n+b_n)}.$$

– Referente a la constante K_n, en el Lema 3.6 no se da una construcción concreta, ya que se toma el supremo sobre un subrecubrimiento finito del cual sólo sabemos su existencia. No obstante, en el artículo [13, Lemma 6], el autor hace una demostración distinta del Lema 3.6 que permite cuantificar K_n. El único detalle que hay que tener en cuenta es que, en su resultado, añade como hipótesis extras

$$0 < \varepsilon < 2^{-1} \text{ , } 2 < M < \varepsilon^{-1} \text{ y } \delta = M\varepsilon,$$

pero esto no representa ningún problema, ya que, en nuestro caso[1], estas condiciones se cumplen. De este modo, podemos aprovechar el resultado obtenido en [13], que afirma lo siguiente:

Lema A.35. *Sean $0 \leq m \leq n$ naturales, y sean $0 < \varepsilon < 2^{-1}$ y $2 < M < \varepsilon^{-1}$ reales. Supongamos que $g \in P_n[z]$ con $|g| \leq M$ y $|P_m(g)| \geq M\varepsilon$. Entonces existe $q \in P_n[z]$ cumpliendo $|q| \leq \varepsilon^{-(2n)!}$ de manera que*

$$|P_n(gq) - z^m| < \varepsilon.$$

Demostración. Pongamos

$$g = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i z^i.$$

Por hipótesis, tenemos

$$\sum_{i=0}^{n} |\alpha_i| \leq M \text{ y } \sum_{i=0}^{m} |\alpha_i| \geq M\varepsilon. \tag{A.1}$$

Si $n = 1$ y $m = 0$, definiendo

$$q = \alpha_0^{-1} - \alpha_0^{-2}\alpha_1 z,$$

tenemos, usando (A.1),

$$|q| = \frac{|\alpha_0| + |\alpha_1|}{|\alpha_0|^2} \leq \frac{M}{M^2\varepsilon^2} \leq \varepsilon^{-2},$$

y además

$$|P_1(gq) - 1| = 0 < \varepsilon,$$

por lo que se cumple lo buscado. Si $n = m = 1$, entonces tomamos

$$q = \begin{cases} \alpha_1^{-1} & \text{si } |\alpha_0| < 2^{-1}\varepsilon^2 M, \\ \alpha_0^{-1} z & \text{si } |\alpha_0| \geq 2^{-1}\varepsilon^2 M. \end{cases}$$

[1] Tenemos $\varepsilon = 1/(a_n C_n)$, $\delta = 1/a_n$ y $M = C_n$.

En el primer caso, necesariamente $|\alpha_1| \geq 2^{-1}\varepsilon^2 M$, ya que, de no ser así,

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| < \varepsilon^2 M < M\varepsilon,$$

y estaríamos en contradicción con (A.1). De este modo, como $2 < M$,

$$|q| = \frac{1}{|\alpha_1|} \leq \frac{2}{\varepsilon^2 M} \leq \varepsilon^{-2}.$$

Además, como $|\alpha_0| \leq |\alpha_1|$, nos queda

$$|P_1(gq) - z| = \frac{|\alpha_0|}{|\alpha_1|} < \frac{\varepsilon^2 M}{2|\alpha_1|} \leq \frac{\varepsilon^2 M}{|\alpha_0| + |\alpha_1|} \leq \frac{\varepsilon^2 M}{M\varepsilon} = \varepsilon.$$

En el segundo caso,

$$|q| = \frac{1}{|\alpha_0|} \leq \frac{2}{\varepsilon^2 M} \leq \varepsilon^{-2},$$

y también

$$|P_1(gq) - z| = 0 < \varepsilon.$$

Supongamos ahora que se cumple el lema para $n = k \geq 1$, y probaremos que también es cierto para $n = k + 1$. Si $m = 0$, definimos recursivamente $q_0 = \alpha_0^{-1}$ y, para $1 \leq i \leq k + 1$,

$$q_i = -\alpha_0^{-1} \sum_{j=1}^{i} \alpha_j q_{i-j}.$$

Con esto, sea

$$q = \sum_{i=0}^{k+1} q_i z^i.$$

Ahora, haciendo el producto de polinomios, tenemos que

$$\begin{aligned} gq &= \left(\sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i z^i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{k+1} q_i z^i \right) \\ &= \sum_{s=0}^{2k+2} \left(\sum_{i=0}^{s} q_i \alpha_{s-i} \right) z^s. \end{aligned}$$

Observamos que el término independiente de este producto es $q_0\alpha_0 = 1$, y que para $1 \leq s \leq k + 1$, el coeficiente de z^s queda

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{s} q_i \alpha_{s-i} &= \sum_{i=0}^{s-1} q_i \alpha_{s-i} + q_s \alpha_0 \\ &= \sum_{i=0}^{s-1} q_i \alpha_{s-i} - \sum_{j=1}^{s} \alpha_j q_{s-j} = 0. \end{aligned}$$

De este modo,

$$|P_{k+1}(gq) - 1| = 0 < \varepsilon.$$

Probemos ahora que

$$\sum_{i=0}^{k+1} |q_i| \leq |\alpha_0|^{-1} \sum_{i=0}^{k+1} \left(\frac{M}{|\alpha_0|} \right)^i. \tag{A.2}$$

Lo haremos por inducción sobre el número de sumandos. Si $k+1=0$, se tiene la igualdad

$$|q_0| = |\alpha_0|^{-1}.$$

Supongámoslo cierto para $k+1 \leq s$ y probémoslo para $s+1$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{s+1} |q_i| \leq & |\alpha_0|^{-1} + \sum_{i=1}^{s+1} |\alpha_0|^{-1} \sum_{j=1}^{i} |\alpha_j||q_{i-j}| \\
= & |\alpha_0|^{-1} + \sum_{j=1}^{s+1} \left(\sum_{i=j}^{s+1} |q_{i-j}| \right) \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_0|} \\
= & |\alpha_0|^{-1} + \sum_{j=1}^{s+1} \left(\sum_{r=0}^{s+1-j} |q_r| \right) \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_0|} \\
\leq & |\alpha_0|^{-1} + \sum_{j=1}^{s+1} \left(|\alpha_0|^{-1} \sum_{r=0}^{s+1-j} \left(\frac{M}{|\alpha_0|} \right)^r \right) \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_0|} \\
\leq & |\alpha_0|^{-1} + |\alpha_0|^{-1} \sum_{r=0}^{s} \left(\sum_{j=1}^{s+1-r} \frac{|\alpha_j|}{|\alpha_0|} \right) \cdot \left(\frac{M}{|\alpha_0|} \right)^r \\
\leq & |\alpha_0|^{-1} + |\alpha_0|^{-1} \sum_{r=0}^{s} \left(\frac{M}{|\alpha_0|} \right)^{r+1} \\
= & |\alpha_0|^{-1} \sum_{r=0}^{s+1} \left(\frac{M}{|\alpha_0|} \right)^r,
\end{aligned}$$

por lo que demostramos (A.2). Además, como $m=0$, tenemos que $|\alpha_0| \geq M\varepsilon$, y por lo tanto

$$\sum_{i=0}^{k+1} |q_i| \leq |\alpha_0|^{-1} \sum_{i=0}^{k+1} \varepsilon^{-i}.$$

Con esto, usando (A.1) y que $M(1-\varepsilon) > 1$, nos queda

$$|q| = \sum_{i=0}^{k+1} |q_i| \leq |\alpha_0|^{-1} \sum_{i=0}^{k+1} \varepsilon^{-i} = \frac{\varepsilon^{-(k+2)} - 1}{M\varepsilon(\varepsilon^{-1} - 1)} \leq \varepsilon^{-(k+2)} \leq \varepsilon^{-(2k+2)!}.$$

Sea ahora $1 \leq m \leq k+1$. Separemos casos:

(i) Si $|\alpha_0| < (\varepsilon/2)^{(2k)!+1}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{k+1} |\alpha_i| \leq M \text{ y } \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \geq M(\varepsilon/2).$$

Por hipótesis de inducción, para $\bar{g} = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i z^{i-1}$, existe un polinomio $q = \sum_{i=0}^{k} q_i z^i$ con

$$|q| \leq (\varepsilon/2)^{-(2k)!} \text{ y } |P_k(q\bar{g}) - z^{m-1}| < (\varepsilon/2).$$

Para este mismo polinomio, $|q| \leq \varepsilon^{-(2k+2)!}$ y

$$\begin{aligned} |P_{k+1}(qg) - z^m| =& |P_{k+1}(q(z\bar{g} + \alpha_0)) - zz^{m-1}| \\ =& |z(P_k(q\bar{g}) - z^{m-1}) + \alpha_0 q| \\ \leq& |P_k(q\bar{g}) - z^{m-1}| + |\alpha_0||q| \\ <& \varepsilon/2 + (\varepsilon/2)^{(2k)!+1}(\varepsilon/2)^{-(2k)!} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) Si $|\alpha_0| \geq (\varepsilon/2)^{(2k)!+1}$. Definimos

$$q_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i < m, \\ \alpha_0^{-1} & \text{si } i = m, \\ -\alpha_0^{-1} \sum_{i=1}^{j} \alpha_i q_{m+j-i} & \text{si } i = m + j \text{ con } 1 \leq j \leq k + 1 - m, \end{cases}$$

y sea

$$q = \sum_{i=0}^{k+1} q_i z^i.$$

Como para el caso $m = 0$, el coeficiente de z^s en el producto gq es

$$\sum_{i=0}^{s} q_i \alpha_{s-i},$$

que se anula para $s < m$, vale $q_m \alpha_0 = 1$ para $s = m$, y, si $m < s \leq k + 1$, queda

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{s} q_i \alpha_{s-i} =& \sum_{i=m}^{s} q_i \alpha_{s-i} \\ =& \sum_{i=m}^{s-1} q_i \alpha_{s-i} + q_s \alpha_0 \\ =& \sum_{i=m}^{s-1} q_i \alpha_{s-i} - \sum_{j=1}^{s-m} \alpha_j q_{s-j} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|P_{k+1}(gq) - z^m| = 0 < \varepsilon.$$

Además, de manera análoga a (A.2), se prueba que

$$\sum_{j=0}^{k+1-m} |q_{m+j}| \leq |\alpha_0|^{-1} \sum_{j=0}^{k+1-m} \left(\frac{M}{|\alpha_0|} \right)^j.$$

De este modo,

$$|q| = \sum_{j=0}^{k+1-m} |q_{m+j}| \leq |\alpha_0|^{-1} \sum_{j=0}^{k+1-m} \left(\frac{M}{|\alpha_0|}\right)^j = \frac{1}{|\alpha_0|} \cdot \frac{(M/|\alpha_0|)^{k+1} - 1}{(M/|\alpha_0|) - 1}.$$

Ahora, por hipótesis $M < \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon < 2^{-1}$ y $|\alpha_0| \geq (\varepsilon/2)^{(2k)!+1}$, luego

$$|\alpha_0| \geq \varepsilon^{2(2k)!+2} \quad \text{y} \quad \frac{M}{|\alpha_0|} \leq \frac{\varepsilon^{-1}}{\varepsilon^{2(2k)!+2}} = \frac{1}{\varepsilon^{2(2k)!+3}}.$$

Además, como la función

$$\frac{r^{k+1} - 1}{r - 1}$$

es creciente en r, si continuamos la desigualdad anterior nos queda

$$\begin{aligned} |q| &\leq \frac{1}{\varepsilon^{2(2k)!+2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon^{2(2k)!+3}}\right)^{k+1} - 1}{\left(\frac{1}{\varepsilon^{2(2k)!+3}}\right) - 1} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon^{2(2k)!+3}}\right)^{k+1} - 1}{\varepsilon^{-1} - \varepsilon^{2(2k)!+2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\varepsilon^{2(2k)!+3}}\right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando que para toda $k \geq 1$

$$(2k+2)(2k)! + (3k+3) < (2k+2)!,$$

llegamos a que

$$|q| \leq \varepsilon^{-(2k+2)!},$$

y completamos la demostración.

$\square$

De esta forma, este lema nos permite tomar

$$K_n = \varepsilon^{-(2n)!} = a_n^{(2n)!} C_n^{(2n)!} = a_n^{(2n)!} 2^{a_n (n-1)(2n)!}.$$

Con estas estimaciones de las constantes C_n, D_n y K_n, se puede reducir el número de condiciones de crecimiento sensiblemente, puesto que muchas de ellas son comparables entre sí. Hecho esto, se podría tratar de encontrar un par de sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ que cumpliesen los requisitos de crecimiento que necesitamos y, así, encontrar un contraejemplo concreto para el Problema del Subespacio Invariante.

Observación A.36. En [13], el autor propone la siguiente solución:

En la definición de la base $\{f_k\}_k$, en lugar de tomar potencias de 2 como coeficientes en las fórmulas (3.5) y (3.7), toma potencias de $\alpha \geq 8$. Con esto, llega a que el operador T tiene norma $\|T\| \leq \alpha$, y prueba el siguiente resultado:

Teorema A.37. *Si tomamos $a_1 \geq \alpha^4$, $b_n \geq \alpha^{(na_n)!}$ y $a_{n+1} \geq \alpha^{(nb_n)!}$ para cada $n \geq 1$, entonces el operador T carece de subespacios invariantes no triviales.*

Bibliografía

[1] Y.A. Abramovich y C.D. Aliprantis, *An Invitation to Operator Theory*, American Mathematical Society, 2002.

[2] N. Aronszajn y K.T. Smith, *Invariant subspaces of completely continuous operators*, Ann. of Math. **60** (1954), 345–350.

[3] B. Beauzamy, *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*, París, North-Holland Mathematical Library, 1987.

[4] J.L. Cerdà, *Introducció a l'Anàlisi Funcional*, Textos Docents de la Universitat de Barcelona, 2004.

[5] C.L. DeVito, *Functional Analysis*, New York Academic Press, 1978.

[6] P. Enflo, *On the invariant subspace problem for Banach spaces*, Acta Math. **158** (1987), 213–313.

[7] A.E. Kacimi-Alaoui, *Introducción al Análisis Funcional*, Reverté, 1994.

[8] J. Lindenstrauss y L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I and II*, Springer Verlag, 1977.

[9] V.I. Lomonosov, *Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator* (en ruso), Funkcional. Anal. i Prilozen. **7** (1973), 55–56.

[10] A.J. Michaels, *Hilden's simple proof of Lomonosov's invariant subspace theorem*, Adv. in Math. **25** (1977), 55–58.

[11] C. Read, *A solution to the invariant subspace problem on the space* ℓ^1, Bull. London Math. Soc. **17** (1985), 305–317.

[12] C. Read, *A short proof concerning the invariant subspace problem*, J. London Math. Soc. **34** (1986), 335–348.

[13] W. Sliwa, *An explicit example concerning the invariant subspace problem for Banach spaces*, Rocky Mountain J. Math. **40** (2010), 627–641.

[14] P. Tradacete, *El problema del subespacio invariante en espacios de Banach*, aceptado en La Gaceta de la RSME.

[15] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer Verlag, 1965.