Universidad de Barcelona

Facultad de Matemáticas

Departamento de Matemática Aplicada y Análisis

Integrales Singulares en el Análisis Armónico

Memoria, presentada para optar el Título del Programa oficial de postgrado: Matemática Avanzada y Profesional.

Dirigida por Javier Soria de Diego

Elona Agora

Septiembre de 2007

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo será el estudio de las integrales singulares desde el punto de vista de variable real.

La transformada de Hilbert,

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y} dy$$

es la integral singular más sencilla. Acotar dicha transformada, es un problema que fue resuelto por *F. Riesz* y *Kolmogorov*, usando métodos de Análisis Complejo. A continuación, *Besicovitch*, *Titchmarsh* y *Marcinkiewicz* resolvieron de nuevo este problema, introduciendo esta vez métodos de variable real. En 1930, *A.P. Zygmund* se preocupó de extender la transformada de Hilbert en $\mathbb{R}^n$. Más adelante, junto con *A. Calderón*, definieron las integrales singulares dadas por convolución,

$$Tf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} K(y) f(x-y) dy,$$

donde K cumple ciertas propiedades. A partir de este momento la extensión de la transformada de Hilbert será un caso especial del problema de la acotación de las integrales singulares. Al mismo tiempo, algunos problemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (véase [C-Z]) requieren un estudio de la acotación de ciertos operadores que tienen propiedades en común con la transformada de Hilbert en el caso n-dimensional.

De los trabajos de *Calderón* y *Zygmund* surgieron resultados muy interesantes que a continuación veremos.

El trabajo consiste en seis capítulos.

En el primer capítulo se recordarán conceptos básicos de los espacios donde vamos a trabajar (espacios de Lebesgue, espacios de Lorentz, clase de Schwarz). Además se demuestra el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz, muy útil para nuestro trabajo.

El segundo capítulo consiste en presentar los resultados más importantes para este trabajo, de Análisis de Fourier.

En el tercer capítulo se estudia la función maximal de Hardy-Littlewood, una herramienta imprescindible en el estudio de las integrales singulares. Se estudian las desigualdades (p, p)-fuertes del dicho operador y la (1,1)-débil.

En el cuarto capítulo se estudia el caso particular de las integrales singulares, la ya mencionada transformada de Hilbert. Se estudian los Teoremas de Kolmogorov y Riesz, de donde se deducen respectivamente, las desigualdades $(1, 1)$-débil y (p, p)-fuerte, con $1 < p < \infty$.

El quinto capítulo se dedica al estudio de las integrales singulares, concentrando resultados obtenidos por todas las herramientas que se han estudiado hasta ahora en este trabajo. Se estudiarán detalladamente las integrales singulares dadas por convolución. El resultado más importante que se demuestra es el Teorema de Calderón-Zygmund, usando la descomposición de Calderón-Zygmund. A continuación se definen y se caracterizan los operadores de Calderón-Zygmund generalizados que no vienen dados por convolución.

A lo largo de este trabajo veremos que las integrales singulares no se pueden definir de L^1 a L^1, por lo que en el último capítulo, esta propiedad se sustituye por la acotación de las integrales singulares de un nuevo espacio, subespacio de L^1, definido como espacio de Hardy, H^1, a L^1. Además, la acotación de L^∞ a L^∞ de las integrales singulares se sustituye por la acotación de ellas, de L^∞ a BMO que es el espacio dual de H^1.

Notación

A lo largo de este trabajo la notación usada será la estándar, $\mathbb{R}$ denotará la recta real, $\mathbb{R}^n$ el espacio vectorial n-dimensional y $\mathbb{C}$ el plano complejo. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ será dx y en la esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ será $d\sigma$.

Todos los espacios de medida se considerarán "sigma"-finitos.

Si $\alpha = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ es un multiíndice y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, se denotará

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

el operador de la $\alpha-$ésima derivada con $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ y $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

Sea $1 \leq p \leq \infty$, entonces p' representará el exponente conjugado de p; es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Para un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ denotará el espacio vectorial de todas las funciones localmente integrables, o sea integrables en todo compacto de Ω. Se denotará $\mathcal{C}(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas definidas sobre Ω. Además $\mathcal{C}^m(\Omega)$ denotará el espacio vectorial de todas las funciones m-derivables con $m-1$ derivadas continuas. El subespacio $\mathcal{C}^m_c(\Omega)$ de $\mathcal{C}^m(\Omega)$ contiene todas las funciones de este último que además tienen soporte compacto. En el caso que $m = 0$, $\mathcal{C}^0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$ y en el caso que $m = \infty$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ denotará el espacio de las funciones infinitamente derivables.

Siendo Y un espacio localmente convexo de Hausdorff, $\mathcal{C}_0(Y)$ denotará el espacio vectorial de todas las funciones continuas que se anulan en el infinito.

Sea $P(x) = \sum_a c_a x^a$ un polinomio en n variables con coeficientes constantes, entonces $P(D)$ denotará el polinomio diferenical asociado; es decir, el operador

$$P(D)f = \sum_a c_a D^a f.$$

Sea E un conjunto de elementos, se denotará $\chi_E(t)$ la función característica que vale 1 si $t \in E$ y 0 fuera del conjunto E.

La expresión “en casi todo punto”, brevemente “c.t.p.” se refiere a propiedades que se cumplen salvo en un conjunto de medida nula.

Las letras C, c denotarán constantes que varían en cada uso, incluso en el mismo teorema. Si están acompañadas por otra letra, por ejemplo C_p, c_p, denotarán una constante que depende del parámetro p.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Los espacios de Lebesgue

Definición 1.1.1. Sea X un espacio de medida con una medida positiva μ. Para todo número real p positivo y finito se define el espacio de *funciones medibles de potencia p-ésima integrable* como

$$L^p(X,\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{C} : \ f \text{ es medible y } \|f\|_p^p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Cuando $p = \infty$, el espacio $L^\infty(X,\mu)$ lo forman las *funciones esencialmente acotadas* es decir, las funciones que son acotadas en casi todo X.

Tal como es definida, $\|\cdot\|_p$ no es una norma. Consideramos un nuevo espacio como resultado del espacio cociente entre $L^p(X,\mu)$ y el conjunto de funciones que coinciden con la función nula salvo en un conjunto de medida cero. Denotaremos al nuevo espacio, cuyos elementos son clases de funciones, por $L^p(X,\mu)$ o simplemente L^p. Sobre este nuevo espacio se demuestra, utilizando la desigualdad de Minkowski, que $\|\cdot\|_p$ es una norma. Además por cumplir la propiedad de la completitud, los espacios L^p "se convierten" en lo que se les llama espacios de Banach. Cuando $p = 2$ se obtiene el espacio de Hilbert cuya norma se define por un producto escalar.

Los espacios de Banach son muy importantes ya que en ellos se pueden extender propiedades de los espacios ordinarios Euclídeos, que dependen de la distancia. Más aún, en los espacios de Hilbert se pueden extender propiedades geométricas, que dependen del concepto de "ángulo".

Veamos algunas propiedades y resultados básicos de los espacios de Lebesgue que usaremos a menudo a lo largo del trabajo:

Una función $f \in L^p$ se puede descomponer como $f = f_0 + f_1$, donde $f_0 \in L^1$ y $f_1 \in L^\infty$. En efecto, podemos considerar $f_0 = f\chi_{\{x:|f(x)|>1\}}$ y $f_1 = f\chi_{\{x:|f(x)|\leq 1\}}$.

Más aún, toda $f \in L^p$ se puede descomponer como $f = f_0 + f_1$, donde $f_0 \in L^{p_0}$ y $f_1 \in L^{p_1}$, para todo p entre p_0 y p_1. Efectivamente, basta considerar

$$\begin{aligned} f_0 &= f\chi_{\{x:|f(x)|>c\}} \in L^{p_0}, \\ f_1 &= f\chi_{\{x:|f(x)|\leq c\}} \in L^{p_1}. \end{aligned}$$

Observación 1.1.2. Sea $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad S^1. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ se puede definir una función periódica F de período 2π, en la recta real de manera que

$$F(x) = f(e^{ix}).$$

Por lo tanto, cuando hablemos de funciones periódicas sobre la recta real, basta considerarlas definidas sobre $\mathbb{T}$.

Teorema 1.1.3. *Desigualdad integral de Minkowski. Sean $(X,\mu), (Y,\lambda)$ espacios de medida. Entonces se tiene*

$$\left(\int_X \left|\int_Y f(x,y)d\lambda(y)\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} d\lambda(y),$$

donde f es una función medible en $X \times Y$ y $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1.1.4. *Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue.*

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones, $f_n \in L^1(\mathbb{T})$, tal que

$$f_n(x) \to f(x) \quad c.t.p. \text{ de } \mathbb{T},$$

para alguna f medible. Si existe $g \in L^1(\mathbb{T})$, tal que, para todo n

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad c.t.p. \text{ de } \mathbb{T},$$

entonces,

$$f \in L^1(\mathbb{T}), \quad \lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_1 = 0$$

y

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} f_n(x)dx.$$

Demostración. Véase [Ru1]. □

1.2. Los espacios de Lorentz

En teoremas como es el teorema de interpolación de Marcinkiewicz que demostraremos más adelante, la acotación de operadores definidos sobre los espacios L^p se obtiene si ciertas desigualdades se cumplen. A lo largo de esta sección veremos cómo a partir de los espacios L^p llegamos de manera natural a la definición de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$, de donde surge la definición de las desigualdades mencionadas, llamadas desigualdades débiles.

DEFINICIÓN 1.2.1. Sea (X, μ) un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible. Se llama *función de distribución de f asociada a μ* a la función $\mu_f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por

$$\mu_f(\lambda) := \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}).$$

PROPOSICIÓN 1.2.2. *Sea $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ derivable y creciente con $\phi(0) = 0$. Entonces*

$$\int_X \phi(f(x))d\mu = \int_0^\infty \phi'(\lambda)\mu_f(\lambda)d\lambda.$$

Demostración. Observamos que por la hipótesis $\phi(0) = 0$ se tiene que

$$\int_X \phi(f(x))d\mu = \int_X \left(\int_0^{|f(x)|} \phi'(\lambda)d\lambda \right) d\mu.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_X \phi(f(x))d\mu &= \int_X \left(\int_0^{|f(x)|} \phi'(\lambda)d\lambda \right) d\mu \\
&= \int_X \left(\int_0^\infty \chi_{(0,|f(x)|)}(\lambda)\phi'(\lambda)d\lambda \right) d\mu \\
&= \int_0^\infty \phi'(\lambda) \left(\int_X \chi_{(0,|f(x)|)}(\lambda)d\mu \right) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \phi'(\lambda) \left(\int_X \chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(\lambda)d\mu \right) d\lambda \\
&= \int_0^\infty \phi'(\lambda)\mu_f(\lambda)d\lambda,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el teorema de Fubini y la definición anterior. □

Observación 1.2.3. Si $\phi(\lambda) = \lambda^p$ se tiene

$$||f||_p^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_f(\lambda)d\lambda.$$

Definición 1.2.4. Se define *el espacio de Lorentz* $L^{p,q}$ como

$$L^{p,q}(X,\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{C}, f \text{ es medible y } \|f\|_{p,q} = \left(\int_0^\infty (\lambda\mu_f^{1/p}(\lambda))^q \frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{1/q} < \infty \right\},$$

donde $1 \le p < \infty$ y $1 \le q < \infty$. Cuando $q = \infty$, el espacio $L^{p,\infty}(X,\mu)$ es el espacio dado por

$$L^{p,\infty}(X,\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{C}, f \text{ es medible y } \|f\|_{p,\infty} = \sup_X \lambda\mu_f^{1/p}(\lambda) < \infty \right\}.$$

Observación 1.2.5. Observamos que en el caso $p = q$ se recupera el espacio L^p.

Observación 1.2.6. Los espacios $L^{p,q}$ no siempre son espacios de Banach, porque puede que $\|f\|_{p,q}$ no cumpla la desigualdad triangular. Esto depende de los valores que toman los p y q. Efectivamente, si $q \le p$, entonces $\|f\|_{p,q}$ es una norma, si $1 < p < q \le \infty$, $\|f\|_{p,q}$ es equivalente a una norma y si $1 = p < q \le \infty$, los espacios $L^{p,q}$ no son espacios de Banach. Para más detalles véase [S-W].

Definición 1.2.7. Sea T un operador del espacio $L^p(X)$ al espacio $L^{q,\infty}(Y)$, donde X y Y son espacios de medida. La desigualdad (p,q)-*débil* se define como

$$||Tf||_{q,\infty} \le C||f||_p,$$

donde $1 \le p < \infty$, $q < \infty$. En el caso que $q = \infty$ la desigualdad anterior se define como

$$||Tf||_\infty \le C||f||_p.$$

Observación 1.2.8. La acotación de un operador $T : L^p \to L^q$ para todo p, q positivo o infinito es decir, la desigualdad

$$||Tf||_q \le C||f||_p$$

se suele llamar desigualdad (p,q)-*fuerte*.

OBSERVACIÓN 1.2.9. En el caso que el espacio de medida Y es $\mathbb{R}^n$, con su medida usual, la desigualdad (p,q)-débil se escribe como

$$|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C||f||_p}{\lambda}\right)^q.$$

DEFINICIÓN 1.2.10. Un operador T de un espacio vectorial A de funciones medibles en funciones medibles se llama *sublineal* si

$$|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|,$$
$$|T(\lambda f)| = |\lambda||Tf|,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y $f, g \in A$.

A continuación demostramos el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz que será un resultado muy útil para nuestro trabajo.

TEOREMA 1.2.11. *Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y T un operador sublineal definido en $L^{p_0} + L^{p_1}$, que es (p_0,p_0)-débil y (p_1,p_1)-débil. Entonces, T es (p,p)-fuerte para $p_0 < p < p_1$.*

Demostración. Hemos visto que toda función $f \in L^p$ se descompone como $f_0 + f_1$, donde $f_0 = f\chi_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}} \in L^{p_0}$ y $f_1 = f\chi_{\{x:|f(x)|\leq c\lambda\}} \in L^{p_1}$, para $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ y $\lambda > 0$. Por ser T sublineal se tiene

$$|Tf(x)| \leq |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)|, \tag{1.1}$$

de donde se obtiene

$$\mu_{Tf}(\lambda) \leq \mu_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \mu_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right). \tag{1.2}$$

Consideramos los dos siguientes casos;

Primer caso: Sea $p_1 = \infty$. Por la hipótesis se tiene

$$||Tf||_\infty \leq c_1||f||_\infty.$$

Escogiendo la constante de manera que $c = \frac{1}{2c_1}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\mu_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right) &= \mu\left(\left\{x : |Tf_1(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
&= \mu\left(\left\{x : |Tf_{\{x:|f(x)|\leq c\lambda\}}(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
&= \mu\left(\left\{x : |Tf_{\{x:|f(x)|\leq \frac{\lambda}{2c_1}\}}(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad (p_0, p_0)-débil se tiene

$$\mu_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leq \left(\frac{2c_0}{\lambda}||f_0||_{p_0}\right)^{p_0}.$$

Por tanto y al expresar la norma $||\cdot||_p$ como

$$\|Tf\|_p^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_{Tf}(\lambda)d\lambda,$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_{Tf}(\lambda)d\lambda \\
&\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(\frac{2c_0}{\lambda}||f_0||_{p_0}\right)^{p_0} d\lambda \\
&= p(2c_0)^{p_0}\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}\int_X \chi_{\{x:|f(x)|>c\lambda\}}|f(x)|^{p_0}d\mu d\lambda \\
&= p(2c_0)^{p_0}\int_X |f(x)|^{p_0}\left(\frac{\lambda^{p-p_0}}{p-p_0}|_0^{\frac{|f(x)|}{c}}\right)d\mu \\
&= \frac{p(2c_0)^{p_0}c^{p-p_0}}{p-p_0}\int_X |f(x)|^p d\mu = c||f||_p^p\ ,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Teorema de Fubini. Por lo que queda demostrada la acotación (p,p)-fuerte del operador T cuando $p_1 = \infty$.

Segundo caso: Sea $p_1 < \infty$. Utilizando la sublinealidad del operador T, y las desigualdades (p_0, p_0)-débil y (p_1, p_1)-débil es decir,

$$\mu_{Tf_0}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leq \left(\frac{2c_0}{\lambda}||f_0||_{p_0}\right)^{p_0},$$

$$\mu_{Tf_1}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leq \left(\frac{2c_1}{\lambda}||f_1||_{p_1}\right)^{p_1}$$

respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_{Tf}(\lambda)d\lambda \\
&\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_{Tf_0}(\lambda)d\lambda + p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_{Tf_1}(\lambda)d\lambda.
\end{aligned}$$

De aquí, actuando para cada sumando de manera análoga al primer caso obtenemos

$$\|Tf\|_p^p \leq \left(\frac{p(2c_0)^{p_0}}{(p-p_0)c^{p-p_0}} + \frac{p(2c_1)^{p_1}}{(p-p_1)c^{p-p_1}}\right)||f||_p^p = c||f||_p^p,$$

es decir, hemos demostrado la desigualdad (p,p)-fuerte. $\square$

1.3. La clase de Schwarz

Antes de definir formalmente la clase de Schwarz y el espacio de las distribuciones temperadas damos una idea de la necesidad de introducir estas definiciones. En el capítulo siguiente definimos la transformada de Fourier, un operador definido sobre los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$. Veremos que solamente para $p \leq 2$ lo que obtenemos es una función localmente integrable. Por lo tanto, y por propiedades de este operador que estudiaremos en el próximo capítulo, definimos la clase de Schwarz, un espacio "muy pequeño", denso en todos los $L^p, 1 \leq p < \infty$. En este espacio consideramos una topología débil que haga que su espacio dual, el espacio de las distribuciones temperadas sea "muy grande" y contenga a todos los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Definición 1.3.1. Se define *la clase de Schwarz* como el espacio vectorial complejo

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\phi \in C^\infty : q_N(\phi) < \infty\},$$

donde $q_N(\phi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n;|\alpha|\leq N}(1+|x|^2)^N|D^\alpha\phi(x)|$.

Observación 1.3.2. Una función $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ es de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si las funciones $P(x)Q(D)\phi(x)$ son acotadas, donde P y Q son polinomios arbitrarios de n variables.

La topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se define por la sucesión de normas $q_0 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots$ y la convergencia $\phi_k \to \phi$ en $\mathcal{S}$ es la convergencia uniforme de las sucesiones

$$PQ(D)\phi_k \to PQ(D)\phi.$$

Teorema 1.3.3. *La clase de Schwarz es un espacio de Frechet, denso en los espacios L^p, para todo $0 < p \leq \infty$.*

Demostración. Véase [Ru2]. □

Definición 1.3.4. El espacio de los funcionales lineales continuos sobre $\mathcal{S}$ es decir, su espacio dual se llama *espacio de distribuciones temperadas* y se denotará $\mathcal{S}'$. Una aplicación lineal $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ está en $\mathcal{S}'$ si $\lim_{k\to\infty} T(\phi_k) = 0$, siempre que $\lim_{k\to\infty}\phi_k = 0$ en $\mathcal{S}$.

Ejemplo: Una función $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ es una función temperada, es decir es una distribución temperada que además es función, si existe N tal que $(1+|x|^2)^{-N}f(x)$ sea integrable.

En este trabajo, los términos "distribución" y "distribución temperada" serán equivalentes.

Capítulo 2

Elementos de Análisis de Fourier

A lo largo de este capítulo se presentarán los resultados básicos de Análisis de Fourier. Se definen la serie de una función periódica y la transformada de Fourier definida en $\mathbb{R}^n$. El problema consiste en estudiar si se puede recuperar la función a partir de su serie o su transformada de Fourier.

2.1. Series de Fourier

La idea básica de las series de Fourier es que toda función periódica puede ser expresada por una suma trigonométrica de senos y cosenos del mismo período; es decir,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{2.1}$$

Los a_k, b_k, son coeficientes que determinan (2.1) y dependiendo de la expresión que puedan tener, la suma trigonométrica se convierte en serie de Fourier, como veremos a continuación. El problema aparece naturalmente en astronomía; de hecho *Neughebauer* (1952) descubrió que los Babilonios utilizaron una forma primitiva de las series de Fourier en la predicción de ciertos eventos celestiales. A mediados del siglo XVIII las series de Fourier aparecen de nuevo en el trabajo de *Daniel Bernoulli* quien, por el método de separación de variables, resolvió formalmente el problema de la cuerda vibrante. Posteriormente, las series de Fourier recibieron su nombre en honor a *Joseph Fourier*, quien hizo uso sistemático de éstas en su obra *"Théorie Analytique de*

Chaleur" que se publicó en 1822. *Euler* estableció la fórmula:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{2.2}$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$, convirtiéndose la relación (2.1) en

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{2.3}$$

Cuando $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$, la expresión (2.3) se denomina *serie de Fourier* de f y los coeficientes c_k se denotarán $\hat{f}(k)$ y se llamarán *coeficientes de Fourier*. Se tiene entonces

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}, \tag{2.4}$$

donde, por comodidad, hemos tomado funciones de período 1 en vez de 2π y $\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx$.

OBSERVACIÓN 2.1.1. La expresión $c_k = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx$ se obtiene en el caso que la serie (2.3) converja uniformemente, multiplicando por $e^{-2\pi imx}$ e integrando término a término en $(0,1)$, donde usamos la propiedad de la ortogonalidad del sistema $\{e^{2\pi ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\int_0^1 e^{2\pi ikx}e^{-2\pi imx}dx = \begin{cases} 1, & \text{si } k = m; \\ 0, & \text{si } k \neq m. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 2.1.2. Se define *la N-ésima suma parcial de la serie* (2.4) como

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}.$$

Nuestro problema, poder recuperar la función f a partir de su serie de Fourier, se convierte en estudiar si $S_N f$ "converge" a f cuando N tiende a ∞. Veamos que el término "converge" puede significar varias cosas:

1. Una manera de plantear el problema es estudiar si $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{T}$; es decir, estudiar las condiciones que hay que imponer a la función f para obtener la convergencia puntual.

2. Estudiar la convergencia en norma; es decir, estudiar si $\lim_{N\to\infty} ||S_N f - f||_p = 0$, para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$.

3. Estudiar la convergencia en "casi todo punto"; es decir, estudiar si para $f \in L^p(\mathbb{T})$, $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{T}$, salvo en un conjunto de medida cero.

2.2. Núcleos

Los núcleos que a continuación definiremos, son una herramienta básica de Análisis de Fourier. Antes de tratarlos en profundidad, haremos una presentación técnica viendo algunas propiedades para poder familiarizarnos con ellos. En próximas secciones haremos la conexión entre los núcleos y problemas de convergencia de Análisis de Fourier.

Definición 2.2.1. Dadas dos funciones f, g definidas en $\mathbb{T}$ *la convolución* de éstas, denotada por $f * g$, es la función definida en casi todo punto:

$$f * g(x) = \int_0^1 f(t)g(x-t)dt,$$

donde $x, t \in \mathbb{T}$.

Daremos un resultado cuya demostración se encuentra en [Ka].

Teorema 2.2.2. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Entonces para casi todo $x \in \mathbb{T}$, $f(t)g(x-t)$ es integrable y la convolución $f * g \in L^1(\mathbb{T})$. Además se tiene*

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1.$$

Observación 2.2.3. Haciendo un cambio de variables se puede ver que la convolución es conmutativa, asociativa y distributiva respecto de la suma.

Definición 2.2.4. Se define *el núcleo de Dirichlet* como

$$D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi i k t}.$$

Es facil probar que

$$D_N(t) = \frac{\sin \pi(2N+1)t}{\sin \pi t}. \tag{2.5}$$

Efectivamente, se tiene que

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{k=-N}^{N} e^{2\pi ikt} = \sum_{k=1}^{N} e^{-2\pi ikt} + \sum_{k=0}^{N} e^{2\pi ikt} \\ &= e^{-2\pi it}\frac{1-e^{-2\pi iNt}}{1-e^{-2\pi it}} + \frac{1-e^{2\pi i(N+1)t}}{1-e^{2\pi it}} = \frac{e^{2\pi i(N+1)t}-e^{-2\pi iNt}}{e^{2\pi it}-1} \\ &= e^{i\pi t}\frac{e^{\pi i(2N+1)t}-e^{-\pi i(2N+1)t}}{e^{i\pi t}\big(e^{i\pi t}-e^{-i\pi t}\big)} = \frac{\sin \pi(2N+1)t}{\sin \pi t}. \end{aligned}$$

De aquí se obtiene:

$$|D_N(t)| \leq \frac{1}{\sin \pi\delta}, \quad \text{si } \delta \leq |t| \leq \frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

Además, por la ortogonalidad de $\{e^{2k\pi i}, k \in \mathbb{Z}\}$ se tiene

$$\int_0^1 D_N(t) = 1. \tag{2.7}$$

Otra propiedad de núcleo de Dirichlet es

$$|D_N(0)| = 1 + \cdots + 1 = 2N+1 \to \infty, \quad \text{cuando } N \to \infty. \tag{2.8}$$

Podemos escribir la N-ésima suma parcial de una función f, a partir del núcleo de Dirichlet, de siguiente modo:

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{k=-N}^{N} \int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}e^{2\pi ikx}dt = \int_0^1 f(t)D_N(x-t)dt \\ &= \int_0^1 f(x-t)D_N(t)dt = D_N * f(x). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Observación 2.2.5. Históricamente $D_N * f$ es la primera convolución del Análisis.

Definición 2.2.6. Se define *el núcleo de Fejér* como

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(t).$$

Se demuestra que:

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin \pi(N+1)t}{\sin \pi t}\right)^2. \tag{2.10}$$

Efectivamente, por definición del núcleo de Fejér se tiene

$$\begin{aligned} F_N(t) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t) \\ &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} \frac{\sin \pi(2n+1)t}{\sin \pi t}. \end{aligned}$$

Utilizando relaciones trigonométricas se obtiene:

$$\begin{aligned} 2(N+1)\sin^2 \pi t F_N(t) &= 2\sum_{n=0}^{N} \sin \pi(2n+1)t \sin \pi t = 1 - \cos 2\pi N t \\ &= 2\sin^2 \frac{2\pi N t}{2} = 2\sin^2 \pi N t. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin \pi(N+1)t}{\sin \pi t}\right)^2.$$

Además,

$$||F_N(t)||_1 = \int_0^1 |F_N(t)|dt = \int_0^1 F_N(t)dt = 1, \tag{2.11}$$

y

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}} |F_N(t)|dt = 0, \qquad \text{si } \delta > 0. \tag{2.12}$$

Definición 2.2.7. Se definen *las medias aritméticas de las sumas parciales* como

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k f(x).$$

Podemos ver las medias aritméticas de las sumas paciales, como la convolución del núcleo de Fejér con la función f, es decir,

$$\begin{aligned} \sigma_N f(x) &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k f(x) \\ &= \int_0^1 f(t)\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} D_k(x-t)dt \\ &= \int_0^1 f(t)F_N(x-t)dt = F_N * f(x). \end{aligned}$$

Definimos ahora el núcleo de Poisson.

Definición 2.2.8. Se define *el núcleo de Poisson* como

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{|k|} e^{2\pi i k t}.$$

Se puede ver que

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos 2\pi t + r^2}. \tag{2.13}$$

En efecto, sea $z = re^{2\pi i t}$. Utilizando la fórmula $\cos x = \frac{e^{-ix}+e^{ix}}{2}$ obtenemos

$$\begin{aligned} P_r(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{2\pi i k t} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos 2\pi k t \\ &= \Re\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} r^k (\cos 2\pi k t + i \sin 2\pi k t)\right) \\ &= \Re\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^k\right) = \Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos 2\pi t + r^2}. \end{aligned}$$

Como en el caso del núcleo de Fejér, el núcleo de Poisson es positivo,

$$\int_0^1 P_r(t)dt = 1, \tag{2.14}$$

y

$$\lim_{r\to 1} \int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}} P_r(t)dt = 0. \tag{2.15}$$

El núcleo de Poisson tiene propiedades análogas a las del núcleo de Fejér. Esto conduce a la siguiente definición:

Definición 2.2.9. Se define como *núcleo de sumabilidad*, una sucesíón $\{k_n\}$ de funciones continuas, periódicas, tal que

1. $\int_0^1 k_n(t)dt = 1$;

2. $\int_0^1 |k_n(t)|dt \le c$;

3. $\lim_{n\to\infty} \int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}} |k_n(t)|dt = 0$, para todo $\delta > 0$.

2.3. Resultados locales

En esta sección daremos dos resultados importantes: el Lema de Riemann-Lebesgue y el Principio de Localización de Riemann.

Lema 2.3.1. *Lema de Riemann-Lebesgue. Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Se tiene*

$$\lim_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Demostración. Los coeficientes de Fourier de una funcion $f \in L^1(\mathbb{T})$ haciendo un cambio de variables se convierten en

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}dx = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ik(x+1/(2k))}e^{i\pi}dx \\ &= -\int_0^1 f(x)e^{-2\pi ik(x+1/(2k))}dx = -\int_0^1 f\left(x - \frac{1}{2k}\right)e^{-2\pi ikx}dx.\end{aligned}$$

De aquí, por cálculos elementales se obtiene

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 \left[f(x) - f(x - 1/2k)\right] e^{-2\pi ikx}dx\right\}.$$

En el caso que f es continua, evidentemente se obtiene

$$\lim_{k\to\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Sea ahora $f \in L^1(\mathbb{T})$ cualquiera. Dado $\epsilon > 0$ escogemos g una función continua tal que $||f - g||_1 \leq \varepsilon/2$ y $|k|$ suficientemente grande, de manera que $|\hat{g}(k)| < \varepsilon/2$. Se tiene entonces

$$|\hat{f}(k)| \leq |\widehat{(f-g)}(k)| + |\hat{g}(k)| \leq ||f - g||_1 + |\hat{g}(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Teorema 2.3.2. *Principio de Localización de Riemann.*

Sea f una función que coincide con la función nula en casi todo punto de un entorno I de x. Entonces,

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = 0.$$

Como consequencia, se tiene que $\lim_{N\to\infty} S_N f(y) = 0$ para toda $y \in I$.

Demostración. Sea $f \equiv 0$ en un entorno de x, $(x-\delta, x+\delta)$, donde $\delta > 0$. Entonces por la fórmula (2.9) se tiene

$$\begin{aligned}
S_N f(x) &= \int_{\delta \le |t| < \frac{1}{2}} f(x-t) D_N(t) dt \\
&= \int_{\delta \le |t| < \frac{1}{2}} f(x-t) \frac{\sin \pi(2N+1)t}{\sin \pi t} dt \\
&= \int_{\delta \le |t| < \frac{1}{2}} f(x-t) \frac{e^{i\pi(2N+1)t} - e^{-i\pi(2N+1)t}}{2i \sin \pi t} dt \\
&= \frac{1}{2i} \int_{\delta \le |t| < \frac{1}{2}} \frac{f(x-t)}{\sin \pi t} (e^{i\pi(2N+1)t} - e^{-i\pi(2N+1)t}) dt.
\end{aligned}$$

Consideremos $g_x(t) = \frac{f(x-t)}{\sin \pi t} \chi_{\{\delta \le |t| \frac{1}{2}\}}(t) \in L^1$. Se tiene entonces

$$S_N f(x) = \frac{1}{2i} \left(\int_{-1/2}^{1/2} g_x(t) e^{i\pi t} e^{2\pi i N t} dt - \int_{-1/2}^{1/2} g_x(t) e^{-i\pi t} e^{-2\pi i N t} dt \right). \tag{2.16}$$

Por comodidad definimos

$$h_x(t) = g_x(t) e^{i\pi t},$$

por lo que la relación (2.16) se convierte en

$$S_N f(x) = \frac{1}{2i} (\hat{h}_x(N) + \hat{h}_x(-N))$$

que tiende a cero cuando N tiende a infinito, por el Lema de Riemann-Lebesgue. □

Observación 2.3.3. En las condiciones del teorema anterior, la convergencia de la serie de Fourier de la función f es uniforme en todo $J \subset\subset I$.

Observación 2.3.4. Para f, g dos funiones idénticas en casi todo punto de un entorno de x, conociendo el $\lim_{N\to\infty} S_N f(x)$ concluimos por el teorema anterior

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N g(x).$$

Observación 2.3.5. Observamos que ambos resultados son locales. En realidad, "$S_N f(x)$" es un concepto global, pues así están definidos los coeficientes de Fourier. Sin embargo el comportamiento en un punto sólo depende del valor de f en un entorno.

2.4. Convergencia

A lo largo de esta sección estudiamos los tipos de convergencia que comentamos al principio de este capítulo.

2.4.1. Convergencia puntual

Probaremos dos resultados que nos dan condiciones sobre la funcion f para que exista el límite puntual de $S_N f(x)$ y sea igual a $f(x)$, cuando N tiende a infinito. Veremos detalladamente que la continuidad en general no es una condición suficiente para obtener la convergencia puntual.

TEOREMA 2.4.1. *Criterio de Dini. Si existe $\delta > 0$ tal que*

$$\int_{|t|<\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dt < +\infty,$$

entonces $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$.

Demostración. Veamos que $S_N f(x) - f(x)$ tiende a 0 cuando $N \to \infty$. Usando la propiedad del núcleo de Dirichlet

$$\int_{-1/2}^{1/2} D_N(x)dx = 1,$$

y la fórmula (2.5) se tiene

$$\begin{aligned} S_N f(x) - f(x) &= D_N * f(x) - f(x) \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} D_N(t) f(x-t)dt - f(x) \int_{-1/2}^{1/2} D_N(t)dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} D_N(t)[f(x-t) - f(x)]dt \\ &= \int_{|t|<\delta} D_N(t)[f(x-t) - f(x)]dt + \int_{\delta \le |t| < 1/2} D_N(t)[f(x-t) - f(x)]dt, \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde $\delta > 0$. Ambas integrales tienden a cero por el Lema 2.3.1 (Riemann-Lebesgue). Para la primera integral se tiene

$$\begin{aligned} \int_{|t|<\delta} D_N(t)[f(x-t) - f(x)]dt &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin \pi(2N+1)t}{\sin \pi t} [f(x-t) - f(x)] \chi_{\{|t|<\delta\}}(t)dt \\ &= c\left(\widehat{F_x e^{i\pi t}}(N) + \widehat{F_x e^{i\pi t}}(-N) \right), \end{aligned}$$

donde $F_x(t) = \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin \pi t} \chi_{\{|t|<\delta\}}(t)$. Esta integral está bien definida observando que la función F_x es integrable, ya que $\sin \pi t$ y πt son equivalentes en $\{t : |t| < \delta\}$ y $\frac{f(x-t)-f(x)}{\pi t} \chi_{\{|t|<\delta\}}(t)$ es integrable por la hipótesis, por lo que la primera integral se convierte en un coeficiente de Fourier, que tiende a cero por el Lema 2.3.1 (Riemann-Lebesgue). Directamente, se puede ver que la última integral de (2.17) es un coeficiente de Fourier que, de nuevo por el Lema 2.3.1 (Riemann-Lebesgue), tiende hacia cero cuando N tiende a infinito. Por lo tanto, tomando límite se tiene que $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$. $\square$

OBSERVACIÓN 2.4.2. Si f satisface una condición de tipo Lipshitz

$$|f(x+t) - f(x)| \leq c|t|^a, \quad \text{tal que} \quad a > 0, |t| < \delta,$$

entonces la serie de Fourier de f converge a f por el criterio de Dini.

TEOREMA 2.4.3. *Criterio de Jordan. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ es una función de variación acotada en un entorno de x, entonces*

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)].$$

OBSERVACIÓN 2.4.4. Observamos que se obtiene la convergencia puntual en los puntos donde f es continua.

Demostración. Utilizando (2.9) y teniendo en cuenta que D_N es una función par se tiene que

$$\begin{aligned} S_N f(x) = f * D_N(t) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x-t) D_N(t) dt \\ &= \int_{-1/2}^{0} f(x-t) D_N(t) dt + \int_{0}^{1/2} f(x-t) D_N(t) dt \\ &= \int_{0}^{1/2} f(x+t) D_N(t) dt + \int_{0}^{1/2} f(x-t) D_N(t) dt. \end{aligned}$$

Por ser f una función de variación acotada se puede escribir como suma de dos funciones monotonas, por lo que f se tratará como una función monótona. Sean

$$\begin{aligned} A_N &= \int_{0}^{1/2} f(x+t) D_N(t) dt, \\ B_N &= \int_{0}^{1/2} f(x-t) D_N(t) dt. \end{aligned}$$

Veremos que $\lim_{N\to\infty} A_N = \frac{f(x+)}{2}$. Análogamente se prueba que $\lim_{N\to\infty} B_N = \frac{f(x-)}{2}$, por lo que quedará demostrado el Criterio de Jordan. Utilizando (2.7) se tiene que

$$\begin{aligned} A_N - \frac{f(x+)}{2} &= \int_0^{1/2} f(x+t)D_N(t)dt - f(x+)\int_0^{1/2} D_N(t)dt \\ &= \int_0^{1/2} [f(x+t) - f(x+)]D_N(t)dt. \end{aligned}$$

Sea $g_x(t) = f(x+t) - f(x+)$, bastaría probar que

$$\lim_{N\to\infty}\left(A_N - \frac{f(x+)}{2}\right) = \int_0^{1/2} g_x(t)D_N(t)dt = 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escogemos $\delta > 0$ tal que $g_x(t) < \varepsilon$. Si $0 < t < \delta$, podemos escribir

$$\int_0^{1/2} g_x(t)D_N(t)dt = \int_0^{\delta} g_x(t)D_N(t)dt + \int_{\delta}^{1/2} g_x(t)D_N(t)dt. \tag{2.18}$$

Para ver que la primera integral de (2.18) es finita, usamos el Teorema del Valor Medio (véase [Ru1]). La monotonía de la función g se obtiene por la de la función f y sabiendo que D_N es continua se tiene: para algún $\eta \in (0,\delta)$

$$\int_0^{\delta} g_x(t)D_N(t)dt = g_x(\delta-)\int_{\eta}^{\delta} g_x(t)D_N(t)dt + g(0+)\int_0^{\eta} g_x(t)D_N(t)dt.$$

Considerando $g_x(0+) = 0$, obtenemos

$$\left|\int_0^{\delta} g_x(t)D_N(t)dt\right| = \left|g_x(\delta-)\int_0^{1/2} g_x(t)D_N(t)dt\right| \leq \varepsilon\left|\int_{\eta}^{\delta} D_N(t)dt\right|.$$

Veremos la acotación de la relación anterior utilizando (2.5), por lo que se tiene

$$\begin{aligned} \left|\int_{\eta}^{\delta} D_N(t)dt\right| &= \left|\int_{\eta}^{\delta} \sin\pi(2N+1)t\left[\frac{1}{\sin\pi t} - \frac{1}{\pi t} + \frac{1}{\pi t}\right]dt\right| \\ &\leq \left|\int_{\eta}^{\delta} \sin\pi(2N+1)t\left[\frac{1}{\sin\pi t} - \frac{1}{\pi t}\right]dt\right| + \left|\int_{\eta}^{\delta} \frac{\sin\pi(2N+1)t}{\pi t}dt\right| \\ &\leq \int_{\eta}^{\delta}\left|\frac{1}{\sin\pi t} - \frac{1}{\pi t}\right|dt + \left|\int_{\eta(2N+1)}^{\delta(2N+1)} \frac{\sin\pi s}{\pi s}ds\right|, \end{aligned}$$

donde $s = 2N+1$. La primera integral es evidentemente finita, mientras que la segunda integral es finita, puesto que

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\delta(2N+1)} \frac{\sin\pi s}{\pi s}ds = \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\left|\int_0^\delta g_x(t)D_N(t)dt\right| \leq c.$$

Por otro lado, usando el Lema de Riemann Lebesgue veremos que

$$\left|\int_\delta^{1/2} g_x(t)D_N(t)dt\right| \leq c.$$

En efecto, sea $\chi_\delta(t) = 1$, si $t \in [\delta, 1/2]$ y $\chi_\delta(t) = 0$, si $t \in [-1/2, \delta)$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned}\int_\delta^{1/2} g_x(t)D_N(t)dt &= \int_\delta^{1/2} g_x(t)\frac{\sin\pi(2N+1)t}{\sin\pi t}dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{i\pi t}g_x(t)}{2i\sin\pi t}\chi_\delta(t)e^{2\pi iNt}dt \\ &\quad - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{-i\pi t}g_x(t)}{2i\sin\pi t}\chi_\delta(t)e^{-2\pi iNt}dt \\ &= \widehat{h_x e^{i\pi t}}(N) - \widehat{h_x e^{-i\pi t}}(-N),\end{aligned} \tag{2.19}$$

donde $h_x(t) = \frac{g_x(t)}{2i\sin\pi t}\chi_\delta(t)$. Tomando límite en (2.19) cuando N tiende a infinito, por el Lema 2.3.1 (Riemann-Lebesgue) la integral $\int_\delta^\pi g_x(t)D_N(t)dt$ tiende a cero. $\square$

Observación 2.4.5. Observamos que por los criterios anteriores, la continuidad no aparece como una propiedad suficiente para que la serie de Fourier de una función continua converja puntualmente a esta función.

Du Bois Reymond demostró que existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto. A continuación veremos la existencia de esta función.

Teorema 2.4.6. *Principio de la acotación uniforme (Banach-Steinhaus). Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_a\}_{a\in A}$ una familia de operadores lineales acotados de X en Y, siendo A un conjunto de índices arbitrario. Entonces, o bien*

$$\textit{existe}\ \ M < \infty \ \ \textit{tal que}\ \ \sup_{a\in A}||T_a|| \leq M,$$

o bien,

$$\textit{existe}\ \ x \in X \ \ \textit{tal que}\ \ \sup_{a\in A}||T_a x||_Y = \infty,$$

donde

$$||T_a|| = \sup\{||T_a x||_Y : ||x||_X \leq 1\}.$$

Demostración. Véase [Ru1]. □

DEFINICIÓN 2.4.7. Se definen los *números de Lebesgue* como

$$L_N = \int_{-1/2}^{1/2} |D_N(t)| dt.$$

LEMA 2.4.8. *Se tiene que*

$$\lim_{N\to\infty} L_N = \infty.$$

Demostración. Observamos que $|\sin x| \leq |x|$ para todo x. Usando la fórmula (2.5) y teniendo en cuenta que D_N es una función par obtenemos

$$\begin{aligned} L_N &= \int_{-1/2}^{1/2} |D_N(t)| dt = \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{\sin \pi(2N+1)t}{\sin \pi t} \right| dt \\ &= 2\int_{0}^{1/2} \left| \frac{\sin \pi(2N+1)t}{\sin \pi t} \right| dt \geq 2\int_{0}^{1/2} \left| \frac{\sin \pi(2N+1)t}{\pi t} \right| dt \\ &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi N + 1/2} \frac{|\sin s|}{s} ds > \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi N} \frac{|\sin s|}{s} ds, \end{aligned}$$

donde $s = \pi(2N+1)t$. De aquí se tiene que

$$\int_0^{\pi N} \frac{|\sin s|}{s} ds = \sum_{k=1}^{N} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin s|}{s} ds > \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} |\sin s| ds = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

Tomando límite cuando N tiende a infinito se tiene

$$\lim_{N\to\infty} L_N \geq \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

□

TEOREMA 2.4.9. *Existe una función continua, cuya serie de Fourier diverge en un punto.*

Demostración. Sea $X = \mathcal{C}(\mathbb{T})$ con la norma $||\cdot||_\infty$ e $Y = \mathbb{C}$. Sea $T_N : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ dado por

$$T_N f = S_N f(0) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t) D_N(t) dt.$$

Evidentemente, se tiene

$$|T_N f| \leq L_N ||f||_\infty.$$

Consideramos f continua tal que $||f - \mathrm{sgn} D_N||_1 \leq \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$. Suponiendo que $||f||_\infty = \sup_{\mathbb{T}} |f| = 1$, se obtiene

$$|T_N f| > L_N - \varepsilon.$$

Tomando el supremo de los $T_N f$, para todo $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, con $||f||_\infty = 1$ obtenemos

$$||T_N||_\infty = L_N,$$

y utilizando el lema anterior se obtiene $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_N|| = \infty$. Por el Teorema 2.4.6 (Principio de la acotación uniforme), existe una función f continua tal que

$$\lim_{N\to\infty} |S_N f(0)| = \infty$$

es decir, la serie de Fourier de la función f diverge en el punto 0. $\square$

2.4.2. Convergencia en norma

La teoría de la medida y los espacios L^p permiten la recuperación de f a partir de $\lim_{N\to\infty} S_N f$, donde la convergencia se entiende en la siguiente manera

$$\lim_{N\to\infty} ||S_N f - f||_p = 0,$$

para toda $f \in L^p$ y $1 \leq p < \infty$. La última relación equivale a

$$||S_N f||_p \leq C_p ||f||_p.$$

Efectivamente, veamos la necesidad de la última relación:
Sea $\lim_{N\to\infty} ||S_N f - f||_p = 0$. Consideremos la familia de operadores $\{S_N\}$ y sea $X = Y = L^p$. Entonces por el Teorema 2.4.6 (Principio de la acotación uniforme), se obtiene que $\sup_{N\in\mathbb{N}} ||S_N|| < \infty$, y por lo tanto

$$||S_N f||_p \leq c_p ||f||_p.$$

Por otro lado la suficiencia se demuestra utilizando un resultado de densidad de los polinomios trigonométricos en L^p (véase [Duo]). Es decir, si f es un polinomio trigonométrico, entonces obviamente $S_N f = f$ para N mayor o igual que el grado de f. Si $f \in L^p$, por el resultado que hemos mencionado podemos escoger un polinomio trigonométrico q tal que

$$||f - q||_p \leq \varepsilon.$$

Entonces para N suficientemente grande se tiene que

$$\begin{aligned} ||S_N f - f||_p &\leq ||S_N(f-q)||_p + ||S_N q - q||_p + ||f-q||_p \\ &\leq (c_p+1)\varepsilon. \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 2.4.10. Cuando $p=1$ la norma de $S_N : L^1 \to L^1$ es L_N y según el Lema 2.4.8 no se obtiene convergencia en la norma.

El caso $1 < p < \infty$ lo estudiaremos en el siguiente capítulo.

2.4.3. Convergencia en casi todo punto

El estudio de la convergencia en casi todo punto, es decir estudiar si

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x) \ \text{ c.t.p. si } \ f \in L^p,$$

es un problema bastante complicado.

En 1926, *Kolmogorov* encontró una función integrable cuya serie de Fourier diverge en todo punto.

En 1965, *Carleson* demostró que para funciones de L^2 hay convergencia en casi todo punto y en 1967, *Hunt* generalizó este resultado para todas las funciones de L^p, para $1 < p \leq \infty$. Enunciamos el famoso Teorema de Carleson-Hunt.

TEOREMA 2.4.11. *Carleson-Hunt. Sea $1 < p \leq \infty$. Entonces para toda $f \in L^p(\mathbb{T})$ se tiene*

$$S_N f(t) \to f(t) \quad \textit{c.t.p. de } \ \mathbb{T},$$

cuando N tiende a infinito.

Demostración. Véase [A] y [Gar]. □

2.5. Métodos de sumabildad

En un curso básico de Análisis se aprende que si $\lim_{k\to\infty} x_k$ existe, entonces también existe $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_k)$ y los dos límites coinciden. *La sumabilidad de Cesàro* es exactamente una extensión de este resultado y consiste en hacer el límite de las medias aritméticas de las sumas parciales, que hemos definido como $\sigma_N f$ en la Sección

2.4. El problema se transforma en tratar de recuperar la función f al hacer el límite de las medias aritméticas y estudiar si

$$\sigma_N f \to f, \quad \text{cuando} \quad N \quad \text{tiende a infinito.}$$

La convergencia se entiende en norma o en "casi todo punto".

Antes de estudiar la convergencia en el caso de la sumabilidad de Cesàro, nos referimos a otro método de sumabilidad, *la sumabilidad de Abel-Poisson*. Consideramos una función $f \in L^1(\mathbb{T})$. Sabemos que su extensión armónica, sea u, es la convolución de f con el núcleo de Poisson que hemos definido anteriormente; es decir, $u = P_r * f$ está definida en $\mathbb{D}$ que denota el disco unidad del plano complejo. El núcleo de Poisson es una herramienta básica para pasar del Análisis Real al Análisis Complejo.

Sea $z = re^{2\pi i\theta}$, entonces la función u se puede expresar del siguiente modo

$$\begin{aligned}
u(re^{2\pi i\theta}) = P_r * f(\theta) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(t)P_r(\theta - t)dt \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{2\pi ik(\theta-t)}dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{2\pi ik\theta} \int_{-1/2}^{1/2} f(t)e^{-2\pi ikt}dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)r^{|k|}e^{2\pi ik\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \hat{f}(k)\bar{z}^k.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Observamos que si r tiende a 1, la función u coincide con la serie de Fourier de la función f. Podemos ver entonces la serie de Fourier de f como el límite formal, en el círculo unidad del plano complejo, de u expresada como anteriormente.

Observación 2.5.1. Puesto que u es armónica en $|z| < 1$ estudiar el límite de (2.20) es análogo a estudiar el problema de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \quad \text{en} \quad |z| < 1,$$

$$u = f \quad \text{en} \quad |z| = 1,$$

donde la condición del borde se entiende como convergencia en norma o en "casi todo punto" de

$$\lim_{r\to 1} P_r * f \to f.$$

Veamos un resultado que nos asegura la convergencia en norma tanto para $F_N * f$ como para $P_r * f$, si $f \in L^p$ y $1 \leq p < \infty$:

TEOREMA 2.5.2. *Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ donde $1 \leq p < \infty$ y sea $\{k_n\}$ un núcleo de sumabilidad. Entonces se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} ||k_n * f - f||_p = 0.$$

Demostración. La demostración del teorema precedente se encuentra en [Ka]. Se demuestra para una clase de espacios más generales que los espacios L^p, que son los Espacios de Banach Homogéneos, pero que no trataremos en este trabajo. □

COROLARIO 2.5.3. *Sea $f \in L^p$, donde $1 \leq p < \infty$. Se obtiene la convergencia en norma*

$$\lim_{N\to\infty} ||\sigma_N * f - f||_p = 0,$$
$$\lim_{r\to 1} ||P_r * f - f||_p = 0.$$

2.6. Transformada de Fourier

DEFINICIÓN 2.6.1. Se define *la transformada de Fourier* de una función f definida sobre $\mathbb{R}^n$, denotada por $\hat{f}$ ó $\mathcal{F}(f)$ como

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \tag{2.21}$$

siempre que la integral (2.21) exista, y $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

OBSERVACIÓN 2.6.2. Observamos que la transformada de Fourier está bien definida para funciones de L^1. En efecto,

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, $\mathcal{F}$ es lineal y continua, es decir $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$.

Antes de estudiar la acotación del operador (2.21) para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, veremos algunas de sus propiedades básicas. Sean f, g funciones definidas en casi todo $\mathbb{R}^n$. Entonces se tiene:

1. $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.

2. $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$ y $\hat{f}$ es continua. En efecto, la continuidad de f se obtiene por el Teorema 1.1.4 (Convergencia Dominada).

   Las relaciones que siguen son consecuencia del cambio de variables, Teorema de Fubini e integración por partes.

3. $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

4. Sea $\tau_a f(x) = f(x+a)$. Se tiene entonces $\widehat{\tau_a f}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2\pi i a\cdot\xi}$ y $(\widehat{fe^{2\pi i a\cdot x}})(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$.

5. Sea $g(x) = \lambda^{-n} f(\lambda^{-1}x)$, se tiene $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\lambda\xi)$, donde $\lambda > 0$.

6. $\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x_j} f)(\xi) = 2\pi i \xi_j \mathcal{F}(f)(\xi)$.

7. $\mathcal{F}(-2\pi i x_j f)(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j}\mathcal{F}(f)(\xi)$.

Observación 2.6.3. Vemos, por la última propiedad, que la transformada de Fourier de una funcion de la clase de Schwarz $\mathcal{S}$, es una función de $\mathcal{S}$.

Lema 2.6.4. *Si* $W(t) = e^{-\pi|t|^2}$, *entonces* $\hat{W}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$.

Demostración. Derivando W respecto a t se tiene

$$W'(t) = -2\pi t W(t),$$

de donde aplicando la transformada de Fourier y la propiedad 7 de la precedente sección, obtenemos

$$2\pi\xi\hat{W}(\xi) = (\hat{W}(\xi))'. \tag{2.22}$$

La última relación es una ecuación diferencial de primer orden cuya solución es

$$\hat{W}(\xi) = ce^{-\pi|\xi|^2}.$$

Calculamos la constante c;

$$c = \hat{W}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi|t|^2} dt = 1,$$

de donde, por unicidad, se tiene que $\hat{W}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2} = W(\xi)$. □

Observación 2.6.5. Observamos que W es un punto fijo para la transformada de Fourier.

Teorema 2.6.6. *La transformada de Fourier es una aplicación continua de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} g\hat{f}, \tag{2.23}$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi \quad \textit{(fórmula de inversión).} \tag{2.24}$$

Demostración. Para ver la continuidad de la transformada hay que ver que si $\phi_k \to 0$ en $\mathcal{S}$ entonces $\mathcal{F}(\phi_k) = \hat{\phi}_k \to 0$ en $\mathcal{S}$. Para $N > \frac{n}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}_k(\xi)| &= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_k(x)|(1+|x|^2)^N(1+|x|^2)^{-N}dx \\ &\leq q_N(\phi_k)\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{-N}dx = c_N q_N(\phi_k). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$||\hat{\phi}_k||_\infty \leq c_N q_N(\phi_k)$$

es decir, $\hat{\phi}_k \in \mathcal{C}^\infty$. Falta ver que para todo $a, b \in \mathbb{N}$ $||x^a D^b\hat{\phi}_k||_\infty$ está acotado por $q_N(\phi_k)$, lo cual es cierto utilizando las propiedades 6 y 7 de la transformada de Fourier.

La fórmula $\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g$ es consequencia del Teorema de Fubini.

La fórmula de inversión se demuestra teniendo en cuenta propiedades básicas de la transformada de Fourier. Hemos visto que si $g(x) = \lambda^{-n}f(\lambda^{-1}x)$ entonces, $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\lambda\xi)$, donde $\lambda > 0$. De aquí, utilizando (2.23) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(\lambda x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\lambda^{-n}g(\lambda^{-1}x)dx.$$

Haciendo el cambio de varibles $y = \lambda x$, la primera integral queda

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda^{-1}x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(\lambda^{-1}x)dx,$$

de donde haciendo que $\lambda \to \infty$ y utilizando el Teorema de la Convergencia Dominada se obtiene

$$f(0)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)dx = g(0)\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)dx.$$

Sea $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$ entonces por el lema anterior $g(x) = \hat{g}(x)$ y se tiene

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i 0\cdot\xi}d\xi.$$

Utilizando la propiedad 5 de la transformada de Fourier en combinación con la relación (2.23), se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda^{-1}x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)g(\lambda^{-1}y)dy,$$

de donde por traslación, usando la propiedad

$$\widehat{\tau_x} f(\xi) = e^{2\pi i x\cdot\xi} f(\xi),$$

se obtiene

$$\begin{aligned} f(x) = (\tau_x f)(0) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\tau_{-x} f(\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi. \end{aligned}$$

□

Consideramos el espacio dual de $\mathcal{S}$ es decir, el espacio $\mathcal{S}'$ de las distribuciones temperadadas y definimos la transformada de Fourier de elementos de $\mathcal{S}'$ como sigue:

Definición 2.6.7. La *transformada de Fourier de* $T \in \mathcal{S}'$ es la distibución temperada dada por

$$\hat{T}(\phi) = T(\hat{\phi}),$$

para todo $\phi \in \mathcal{S}$.

Teorema 2.6.8. *La transformada de Fourier es una aplicación lineal, biyectiva y continua de $\mathcal{S}'$ a $\mathcal{S}'$ cuya inversa es también continua.*

Demostración. Veremos la continuidad de la transformada de Fourier y de su inversa. En efecto, sea $\{T_n\}$ una sucesión de $\mathcal{S}'$ que converge a $T \in \mathcal{S}'$ cuando n tiende a infinito. Entonces, por la definición anterior se tiene que $\hat{T}_n(\phi) = T_n(\hat{\phi})$, para toda $\phi \in \mathcal{S}$. Pero $\lim_{n\to\infty} T_n(\hat{\phi}) = T(\hat{\phi}) = \hat{T}(\phi)$, por definición. Para ver que la inversa es también continua basta observar que la transformada de Fourier es periódica de período 4, por lo que la inversa se obtiene aplicando tres veces la transformada de Fourier. □

Observación 2.6.9. Como todos los $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ están contenidos en $\mathcal{S}'$, por el teorema anterior concluimos que la transformada de Fourier de cualquier función de L^p es un elemento de $\mathcal{S}'$.

Veremos cuando la transformada de Fourier de funciones de L^p es una distribución que también es una función.

Teorema 2.6.10. *La transformada de Fourier es una isometría en L^2 es decir, $f \in L^2$ y $||f||_2 = ||\hat{f}||_2$ (igualdad de Plancherel).*

Además,

$$f(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx \ \text{ en } L^2,$$

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{|\xi|<R} \hat{f}(x) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi \ \text{ en } L^2.$$

Demostración. Al principio demostramos la igualdad de Plancherel para $f \in \mathcal{S}$: Luego por densidad de $\mathcal{S}$ en L^2, la transformada de Fourier de $f \in \mathcal{S}$ se extiende a $\hat{f} \in L^2$. Sea $\hat{g} = \bar{h}$ se tiene entonces $g = \bar{\hat{h}}$, luego por la propiedad (2.23) se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{h}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\bar{\hat{h}}(x)dx, \tag{2.25}$$

para $f, h \in \mathcal{S}$. Sea $h = f$ entonces, de (2.25) se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{h}(x)dx = \int \hat{f}(x)\bar{\hat{f}}(x)dx,$$

de donde

$$||f||_2 = ||\hat{f}||_2.$$

En el Teorema 2.6.6 se ha verificado la continuidad de la transformada de Fourier $\mathcal{F}$, de $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}$. Por densidad de $\mathcal{S}$ en L^2 podemos prolongar $\mathcal{F}$ de L^2 en L^2 de manera que siga siendo continua. Entonces, consideramos el límite de $\hat{f}\chi_{B(0,R)}$ y por la continuidad de la transformada de Fourier en L^2, se obtiene

$$\lim_{R\to\infty} \hat{f}\chi_{B(0,R)}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx,$$

donde hemos usado la definición de la transformada de Fourier. Luego hacemos lo mismo para $f\chi_{B(0,R)}$ y obtenemos

$$\lim_{R\to\infty} f\chi_{B(0,R)}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} \hat{f}(x) e^{2\pi i x\cdot\xi} dx,$$

donde hemos usado (2.24) (fórmula de inversión), por lo que se ha acabado la demostración. $\square$

Necesitamos un resultado más para poder demostrar que, bajo ciertas condiciones, la transformada de Fourier es una función localmente integrable.

TEOREMA 2.6.11. *Interpolación de M. Riesz-Thorin. Sean* $1 \leq p_0, p_1,\ q_0, q_1 \leq \infty$ *y* $0 < \theta < 1$. *Se definen* p *y* q *como*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Si $T : L^{p_0} + L^{p_1} \to L^{q_0} + L^{q_1}$ *es un operador lineal tal que*

$$||Tf||_{q_0} \leq c||f||_{p_0} \quad para \quad f \in L^{p_0},$$

$$||Tf||_{q_1} \leq c||f||_{p_1} \quad para \quad f \in L^{p_1},$$

entonces,

$$||Tf||_q \leq c||f||_p \quad para \quad f \in L^p.$$

Demostración. Véase [B-Sh]. □

COROLARIO 2.6.12. *Desigualdad de Hausdorff-Young. Sea* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$. *Se tiene entonces* $\hat{f} \in L^{p'}$ *y*

$$||\hat{f}||_{p'} \leq ||f||_p.$$

Demostración. Aplicamos el Teorema 2.6.11 para la transformada de Fourier donde $p_0 = 1, q_0 = \infty$ por la desigualdad $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$ y $p_1 = q_1 = 2$ por el Teorema 2.6.10 (Plancherel). □

DEFINICIÓN 2.6.13. Se define *el operador de la suma parcial*

$$S_R f(x) = \int_{B_R} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi,$$

donde $B_R = \{x : ||x|| < R\}$.

Considerando el límite de $S_R f$, el problema análogo de las series de Fourier, consiste en recuperar la función f a partir de su transformada. El límite se entiende en norma $|| \cdot ||_p$ o en "casi todo punto". También podemos considerar los métodos de sumabilidad, pero en este trabajo no entraremos en más detalles. Hemos definido la transformada de Fourier no para profundizar en el problema que acabamos de mencionar, sino con el propósito de usar sus propiedades en el estudio de las integrales singulares que va a ser el tema principal de nuestro trabajo.

Capítulo 3

La función maximal de Hardy-Littlewood

A lo lago de este capítulo estudiaremos la función maximal de Hardy-Littlewood que en el caso unidimensional, $n = 1$ fue introducida por *Hardy* y *Littlewood* (véase [H-L]) y para $n > 1$ por *N. Wiener* (véase [W]). Son dos las razones de este estudio: Primero, sus propiedades se pueden utilizar para probar la convergencia en "casi todo punto" de los métodos de sumabilidad de Cesàro y Abel-Poisson, complemetando de esta manera el capítulo anterior. Segundo, las técnicas que usamos, como la descomposición de Calderón-Zygmund, serán una herramienta imprescindible en el estudio de los operadores singulares.

3.1. Introducción a la función maximal de Hardy-Littlewood

Una operación que surge de manera natural al estudiar varias situaciones del Análisis es el promedio. Se define el *promedio* de $|f|$ sobre la bola B_r de radio $r > 0$ centrada en el origen, como

$$\mathcal{P}_{B_r}(|f|) = \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |f(y)|dy,$$

donde $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Un resultado importante del Análisis es el Teorema de Diferenciación de Lebesgue que demostraremos en la última sección de este capítulo:

Teorema 3.1.1. *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces se tiene*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(x-y)dy = f(x) \text{ c.t.p.}$$

Una manera de estudiar este límite es introducir la función maximal de Hardy-Littlewood definida como sigue:

Definición 3.1.2. Se define *la función maximal de Hardy- Littlewood* como

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \mathcal{P}_{B_r}(|f(x-\cdot)|) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |f(x-y)|dy.$$

Se denotará M el operador correspondiente a la función maximal de Hardy-Littlewood.

Observación 3.1.3. Observamos que para definir la función maximal de Hardy-Littlewood hemos intercambiado el límite del teorema anterior cuando $r \to 0$ con el supremo sobre todos los $r > 0$, que en este caso puede ser infinito. El paso del límite de una expresión al supremo de esta misma es una técnica que se usa a menudo para estudiar dicho límite.

Observación 3.1.4. La función maximal de Hardy-Littlewood es un operador positivo $Mf = M(|f|) \geq 0$. Además observamos que al considerar $|f|$ en la definición de la función maximal de Hardy-Littlewood se evitará la posible cancelación de la función f.

Podemos definir la función maximal de Hardy-Littlewood con cubos en vez de con bolas, es decir:

Definición 3.1.5. Sea Q_r el cubo $[-r,r]^n$, donde $r > 0$. Se define

$$M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n}\int_{Q_r} |f(x-y)|dy. \tag{3.1}$$

Observación 3.1.6. Si $n = 1$ entonces M y M' coinciden y para $n > 1$ existen c_n, C_n tales que

$$c_n M'f(x) \leq Mf(x) \leq C_n M'f(x). \tag{3.2}$$

Más aún, a partir de la definición se obtienen

$$||Mf||_\infty \leq ||f||_\infty, \quad ||M'f||_\infty \leq ||f||_\infty. \tag{3.3}$$

3.2. Acotación de la función maximal

En esta sección veremos que si $f \in L^1$, Mf no tiene por qué pertenecer a L^1, es decir el operador M no cumple la desigualdad $(1,1)$-fuerte. En cambio, se prueba la desigualdad $(1,1)$-débil y a continuación, usando el Teorema de Marcinkiewicz, se demuestra la desigualdad (p,p)-fuerte para $1 < p \leq \infty$.

Empezamos, probando un lema de recubrimiento:

Lema 3.2.1. *Sean $\{Q_j\}_{j=1,\ldots,N}$ N cubos. Entonces*

I. *existen $\{R_k\}_{k=1,\ldots,M}$ M cubos tal que $\{R_k\} \subset \{Q_j\}$ y $R_k \cap R_{k'} = \emptyset$, si $k \neq k'$;*

II. *para todo j existe k tal que $Q_j \subset R_k^*$.*

Antes de demostrar el lema precedente aclaramos la notación usada: $Q := Q(x,r)$ denotará el cubo de centro $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|Q| = r^n$ y $Q^* := Q(x, 3r)$.

Demostración. De entre todos los cubos de la familia $\{Q_j\}_{j=1,\cdots,N}$ elegimos uno de los que tengan el volumen mayor (que lo denotamos por R_1), y descartamos de $\{Q_j\}_{j=1,\cdots,N}$ tanto R_1 como todos los Q_j que intersequen a R_1.

Una vez elegidos $R_1, \cdots, R_k$, si queda algún cubo en $\{Q_j\}_{j=1,\cdots,N}$, seleccionamos uno de los que tengan el volumen mayor, R_{k+1}, y volvemos a eliminar de $\{Q_j\}_{j=1,\cdots,N}$ todos los que tienen intersección no vacía con R_{k+1}.

Este proceso termina en un número finito de pasos, y obtenemos la colección $R_1, \cdots, R_M$, con $1 \leq M \leq N$.

Claramente los cubos R_k están elegidos de la familia original $\{Q_j\}_{j=1,\cdots,N}$, y son disjuntos (si 2 tienen intersección no vacía, el de volumen menor habría sido eliminado al elegir el otro).

Si Q_j no ha sido elegido, es porque en algún momento ha sido eliminado, por lo que ha de cortar a uno de los R_k. Además, por la definición de R_k, el cubo Q_j tiene un volumen menor, y por lo tanto $Q_j \subset R_k^*$. □

Teorema 3.2.2. *El operador M cumple la desigualdad $(1,1)$-débil.*

Demostración. Sea $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$. Si $x \in E_\lambda$, existe un cubo Q_x, centrado en x tal que

$$\frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y)| dy > \lambda. \tag{3.4}$$

Sea K un subconjunto arbitrario, compacto de E_λ. Como $K \subset \bigcup_{x \in E_\lambda} Q_x$, usando la compacidad de K, existe una familia finita de cubos $\{Q_j\}_{j=1,\cdots,N} \subset \{Q_x\}_{x\in E_\lambda}$. Por el Lema 3.2.1, existe una familia $\{R_k\}_{k=1,\cdots,M}$ de cubos disjuntos que recubre K y para todo j, existe k tal que $Q_j \subset R_k^*$, de donde $\cup_j Q_j \subset \cup_k R_k^*$.

Vamos a ver que se cumple la siguiente desiguladad:

$$|K| \leq \frac{C}{\lambda}||f||_1.$$

La medida usual de $\mathbb{R}^n$, $|\cdot|$, es doblante, es decir $|R_k^*| = c|R_k|$, para todo $k = 1, \ldots, M$. Por lo tanto,

$$|K| \leq \sum_{j=1}^{N} |Q_j| \leq \sum_{k=1}^{M} |R_k^*| = c\sum_{k=1}^{M} |R_k|.$$

Ahora, utilizando la relación (3.4) que es válida para todo R_k por la propia definición de los R_k, se obtiene

$$|K| \leq \frac{c}{\lambda}\sum_{j=1}^{M}\int_{R_j}|f| = \frac{c}{\lambda}\int_{\bigcup R_j}|f| \leq \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f| = \frac{c}{\lambda}||f||_1,$$

donde la primera igualdad se obtiene por ser los R_j disjuntos. La desigualdad que acabamos de demostrar es válida para todo compacto $K \subset E_\lambda$, por lo tanto se deduce la desigualdad $(1,1)$-débil para el operador M. □

Observación 3.2.3. Observamos que la desigualdad $(1,1)$-débil que probamos sustituye a la $(1,1)$-fuerte que en general es falsa, ya que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y no es idénticamente nula, $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. En efecto, existe $\delta > 0$ tal que $\int_{B(0,\delta)} f(y)dy \geq c > 0$. Si $|x| > \delta$, $B(x, 2|x|) \supset B(0,\delta)$ por lo que se tiene

$$Mf(x) \geq \frac{1}{(2|x|)^n}\int_{B(0,\delta)} f(y)dy = \frac{c}{(2|x|)^n}.$$

Por lo tanto, $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.2.4. *El operador M es de tipo (p,p)-fuerte si $1 < p \leq \infty$.*

Demostración. El operador M cumple la desigualdad $(1,1)$-débil por el teorema anterior y (∞,∞)-fuerte por la relación (3.3). Entonces, usando el Teorema 1.2.11 (Marcinkiewicz), se obtiene la desigualdad (p,p)-fuerte para el operador M. □

3.3. Aproximaciones de la identidad

Varios problemas de aproximación se plantean de la siguiente forma: Sea $\{F_t\}_{t>0}$ una familia de operadores integrales. El propósito es estudiar si para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se obtiene $F_t f \to f$ cuando $t \to 0$. Nos interesa encontrar un núcleo $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y definir una familia $\{\phi_t\}_{t>0}$ de manera que podamos representar $F_t f$ como $\phi_t * f$. Entonces, el problema se convierte en estudiar si $\phi_t * f \to f$ cuando $t \to 0$. La convergencia se entiende en norma o en "casi todo punto", lo cual es normalmente un problema más delicado.

DEFINICIÓN 3.3.1. Se define como *aproximación de la identidad* una familia $\{\phi_t\}_{t>0}$, donde $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(\frac{x}{t})$ y $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ de manera que se cumplen las siguiente propiedades:

- $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x)dx = 1$;
- $\lim_{t\to 0} \int_{\delta<|x|} |\phi_t(x)|dx = 0$, para todo $\delta > 0$.

OBSERVACIÓN 3.3.2. Hemos definido los núcleos de Fejér y de Poisson en el caso periódico. También se pueden definir sobre $\mathbb{R}^n$ (véase [Gr]), y sus propiedades coinciden con las de la definición anterior, por lo que son aproximaciones de la identidad.

Estudiaremos la convergecia en norma y en "casi todo punto" de $\phi_t * f$.

TEOREMA 3.3.3. *Sea $\{\phi_t\}_{t>0}$ una aproximación de la identidad. Entonces*

$$\lim_{t\to 0} ||\phi_t * f - f||_p = 0$$

si $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$ y uniformemente $(p = \infty)$ si $f \in \mathcal{C}_0$.

Demostración. Por ser $\{\phi_t\}$ una aproximación de la identidad se tiene, a partir de la definición, que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Por tanto, haciendo un cambio de variables se obtiene

$$\phi_t * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)[f(x - ty) - f(x)]dy. \tag{3.5}$$

Vamos a ver que $\lim_{t\to 0} ||\phi_t * f(x) - f(x)||_p = 0$, donde $f \in L^p$ para $1 \leq p < \infty$ y $f \in \mathcal{C}_0$ cuando $p = \infty$. Utilizando la relación (3.5) y el Teorema 1.1.3 (Desigualdad

Integral de Minkowksi), se tiene

$$\begin{aligned}||\phi_t * f(x) - f(x)||_p &= \left|\left|\int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)[f(x-ty) - f(x)]dy\right|\right|_p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} ||\phi(y)[f(\cdot - ty) - f(\cdot)]||_p dy = A + B,\end{aligned}$$

donde $A = \int_{|y|<\delta/t} |\phi(y)|||f(\cdot - ty) - f(\cdot)||_p dy$ y $B = \int_{|y|\geq\delta/t} |\phi(y)|||f(\cdot - ty) - f(\cdot)||_p dy$. Ahora basta ver que $A + B \leq \varepsilon$.

Sea $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ y sea $h = ty$ de manera que $|h| < 1$. El soporte de $\tau_h f$, donde $\tau_h f = f(\cdot - h)$ está controlado por un compacto de $\mathbb{R}^n$, sea K, por lo que existe otro compacto de $\mathbb{R}^n$, $K' \supset K$ de manera que $\mathrm{sop}(\tau_h f - f) \subset K'$. Además por continuidad,

$$\lim_{h\to 0}[f(x-h) - f(x)] = 0, \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.6}$$

Por otro lado, si tomamos $g(x) = 2(||f||_\infty)^p \chi_{K'}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$|f(x-h) - f(x)|^p \leq g(x). \tag{3.7}$$

Ahora obtendremos una acotación para $||f(\cdot - h) - f||_p$, usando el Teorema 1.1.4 (Convergencia Dominada), que en este caso es válida por las relaciones (3.6) y (3.7). Es decir,

$$||f(\cdot - h) - f||_p = \left(\int_{K'} |f(x-h) - f(x)|^p dx\right)^{1/p} \longrightarrow 0,$$

cuando h tiende a cero. Podemos entonces escribir

$$||f(\cdot - h) - f||_p < \frac{\varepsilon}{2||\phi||_1},$$

teniendo en cuenta que $||\phi||_1 = 1$ por definición. De aquí, sustituyendolo en la expresión A, se obtiene

$$A = \int_{|y|<\delta/t} |\phi(y)|||f(\cdot - ty) - f(\cdot)||_p dy \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hemos demostrado que $A \leq \frac{\varepsilon}{2}$ en el caso que $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. Si $f \in L^p$, para $1 \leq p < \infty$, entonces por densidad de $\mathcal{C}_c$ en los L^p se obtiene el mismo resultado.

Veremos que también se tiene $B \leq \frac{\varepsilon}{2}$. La integral $\int_{|y|\geq\delta/t} |\phi(y)|dy$ tiende hacia cero cuando también t tiende a cero. Por tanto podemos obtener la siguiente acotación para t suficientemente pequeño:

$$\int_{|y|\geq\delta/t} |\phi(y)|dy \leq \frac{\varepsilon}{4||f||_p}. \tag{3.8}$$

Usando la desigualdad de Minkowski, la relación anterior y el hecho de que la norma $||\cdot||_p$ es invariante por traslaciones se tiene

$$B = \int_{|y|\geq \delta/t} |\phi(y)|||f(\cdot - ty) - f(\cdot)||_p dy \leq 2\int_{|y|\geq\delta/t} |\phi(y)|||f||_p dy$$
$$\leq 2||f||_p \frac{\varepsilon}{4||f||_p} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hemos visto que $A + B \leq \varepsilon$ por lo que la demostración queda acabada. □

Observación 3.3.4. Observe que por este teorema y por la Observación 3.3.2 se prueba la convergencia en norma de los métodos de sumabilidad de Cesàro y Abel-Poisson.

Observación 3.3.5. Como consequencia de este teorema, existe una sucesión t_k dependiente de f tal que $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$ y

$$\lim_{k\to\infty} \phi_{t_k} * f(x) = f(x) \ \text{ c.t.p.}$$

En el caso que el límite de $\phi_t * f$, cuando t tiende a cero, existe puntualmente debe coincidir con f en "casi todo punto". Por lo tanto, estudiaremos bajo qué condiciones se obtiene la existencia de este límite puntual que es cierta en el caso que $f \in \mathcal{S}$. En efecto, sea $g \in \mathcal{S}$, entonces haciendo un cambio de variables se tiene

$$\phi_t(g) = \int_{\mathbb{R}^n} t^{-n}\phi(t^{-1}x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)g(tx)dx.$$

Por el Teorema 1.1.4 (Convergencia Dominada), se obtiene

$$\lim_{t\to 0} \phi_t(g) = g(0) = \delta(g),$$

donde δ denota la delta de Dirac. Sabemos que $\delta * g = g$ para toda función $g \in \mathcal{S}$, por lo tanto

$$\lim_{t\to 0} \phi_t * g(x) = g(x).$$

En el caso que $f \in L^p$ necesitamos un resultado más:

Teorema 3.3.6. *Sea $\{T_t\}_{t>0}$ una familia de operadores lineales en $L^p(X,\mu)$, donde (X,μ) es un espacio de medida y $T^*f(x) = \sup_t |T_t f(x)|$. Si T^* es de tipo (p,q)-débil, entonces el conjunto*

$$\{f \in L^p : \lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x) \ \text{ c.t.p.}\}$$

es cerrado en L^p.

El operador T^* se llamará operador maximal asociado a $\{T_t\}$.

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones tal que

$$\lim_{t\to t_0} T_t f_n(x) = f_n(x) \quad \text{en c.t. } x \in X \tag{3.9}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0. \tag{3.10}$$

Entonces, por la linealidad de los $\{T_t\}$ y por la relación (3.9) se tiene

$$\begin{aligned}
&\mu(\{x \in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda\}) \\
&\le \mu(\{x \in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - (T_t f_n(x) - f_n(x)) - f(x)| > \lambda\}) \\
&\le \mu(\{x \in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x)| > \lambda\}) \\
&\le \mu(\{x \in X : \sup_t |T_t(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x)| > \lambda\}) \\
&\le \mu(\{x \in X : T^*(f - f_n)(x) + |(f - f_n)(x)| > \lambda\}) \\
&\le \mu\left(\left\{x \in X : T^*(f - f_n)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X : |(f - f_n)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad (p, q)-débil para el primer sumando y la desigualdad de Chebychev para el segundo se obtiene

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\left\{x \in X : T^*(f - f_n)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{x \in X : |(f - f_n)(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
&\le \left(\frac{2c}{\lambda} ||f - f_n||_p\right)^q + \left(\frac{2}{\lambda} ||f - f_n||_p\right)^p,
\end{aligned}$$

que por la relación (3.10) tiende a cero cuando n tiende a infinito. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\mu(\{x \in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > 0\}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\left\{x \in X : \lim_{t\to t_0} \sup |T_t f(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0,
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que el conjunto

$$\{f \in L^p : \lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x) \ \text{ c.t.p.}\}$$

es cerrado en L^p. □

Hemos probado la convergencia en norma de $\phi_t * f$ hacia f, es decir

$$\lim_{t\to 0} ||\phi_t * f - f|| = 0,$$

donde $f \in L^p$ si $1 \leq p < \infty$ o $f \in \mathcal{C}_0$ si $p = \infty$ y la norma $||\cdot||$ denota la correspondiente norma usual de estos espacios.

Ahora por el teorema anterior, si vemos que el operador maximal $\sup_{t>0} |\phi_t * f|$ cumple una desigualdad (p,q)-débil obtenemos la existencia del límite puntual de $\phi_t * f$. Así, por la Observación 3.3.5 y por densidad de $\mathcal{S}$ en los L^p, con $1 \leq p < \infty$, se prueba la convergencia en "casi todo punto" para toda $f \in L^p$, es decir

$$\lim_{t\to 0} \phi_t * f(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.}$$

Estudiaremos, utilizando la función maximal de Hardy-Littlewood la convergencia en "casi todo punto" de los métodos de sumabilidad de Cesàro y Abel-Poisson.

Proposición 3.3.7. *Sea ϕ una función positiva, radial, decreciente como función definida en $(0,\infty)$ e integrable. Entonces*

$$\sup_{t>0} |\phi_t * f(x)| \leq ||\phi||_1 Mf(x). \tag{3.11}$$

Demostración. Sea ϕ una función que cumpla las hipótesis de la proposición precedente. Sea $\{\phi_t\}_{t>0}$ la aproximación de identidad, es decir $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(\frac{x}{t})$. Bastaría probar que

$$|\phi * f(x)| \leq ||\phi||_1 Mf(x),$$

de donde se obtiene la relación (3.11), puesto que $||\phi_t||_1 = ||\phi||_1$.

Sea $f \geq 0$, se tiene

$$\phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(x-y)dy = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{B(2^k)\setminus B(2^{k-1})} \phi(y) f(x-y)dy.$$

Por hipótesis, ϕ es decreciente, es decir $\phi(2^k) \leq \phi(2^{k-1})$, para todo k. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{B(2^k)\setminus B(2^{k-1})} \phi(y) f(x-y)dy &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(2^{k-1}) \int_{B(2^k)} f(x-y)dy \\
&\leq c_n Mf(x) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(2^{k-1}) 2^{kn} \\
&\leq c_n Mf(x) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{B(2^{k-1})\setminus B(2^{k-2})} \phi(y)dy \\
&= c_n Mf(x) \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)dy = c_n Mf(x)||\phi||_1,
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene por la siguiente estimación

$$\phi(2^{k-1}) \leq \frac{c_n}{2^{kn}} \int_{B(2^{k-1})\setminus B(2^{k-2})} \phi(y)dy.$$

□

Observación 3.3.8. La proposición anterior es válida, no sólo para una función positiva, decreciente y radial, sino para toda función de L^1 que se mayora por una función de L^1, positiva, decreciente y radial. En efecto, sea $\psi \geq 0$. Si $\phi(x) = \sup_{|y|\geq|x|} |\psi(y)| \in L^1$, entonces $\psi \leq \phi$ y $\sup_{t>0} |\psi_t * f(x)| \leq c_n ||\phi||_1 Mf(x)$.

Corolario 3.3.9. *Sea ψ una función que cumple las hipótesis de la proposición anterior y tal que $|\phi(x)| \leq |\psi(x)|$ en "casi todo punto". Entonces la función maximal $\sup_{t>0} |\phi_t * f(x)|$ cumple la desigualdad $(1,1)$-débil y la (p,p)-fuerte para $1 < p \leq \infty$.*

Demostración. Basta observar que

$$\sup_{t>0} |\phi_t * f(x)| \leq \sup_{t>0} |\psi_t| * |f|(x) \leq cM|f|(x)$$

y teniendo en cuenta que la función maximal de Hardy Littlewood, M es de tipo (1,1)-débil y (p,p)-fuerte, con $1 < p \leq \infty$. □

Corolario 3.3.10. *En las condiciones del corolario anterior*

$$\lim_{t\to 0} \phi_t * f(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.}$$

En particular, los métodos de sumabilidad de Cesàro y Abel-Poisson convergen a f en "casi todo punto" si f está en alguno de los espacios citados.

Demostración. Sea $T^*f(x) = \sup_{t>0} |\phi_t * f(x)|$. Entonces por el corolario anterior el operador T^* cumple la desigualdad (p,p)-débil. Además la familia de los operadores $\{T_t\}_{t>0}$, donde $T_t f = \phi_t * f$ es lineal, por lo que se puede usar el Teorema 3.3.6, de donde se obtiene que el conjunto

$$\{f \in L^p : \lim_{t\to 0} \phi_t * f(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.}\}$$

es cerrado. Sabiendo la existencia del límite puntual de $\phi_t * f$ en $\mathcal{S}$ y teniendo en cuenta que $\mathcal{S}$ es denso en los L^p se obtiene la existencia del límite puntual para toda $f \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$. Por la Observación 3.3.2 se obtiene la convergencia en "casi todo punto" de los métodos de sumabilidad de Cesàro y Abel-Poisson. □

3.4. El operador maximal diádico

En la Sección 3.2 hemos probado la desigualdad $(1,1)$-débil para la función maximal de Hardy-Littlewood M, utilizando el Lema de recubrimiento. En esta sección demostraremos el Teorema de Descomposición de Calderón-Zygmund, un resultado que usaremos para probar de nuevo la desigualdad $(1,1)$-débil del operador M, y que a continuación será una de nuestras herramientas más importantes.

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para $n = 1$ la Descomposición de Calderón-Zygmund se demuestra fácilmente (véase [Guz]), pero en el caso $n > 1$, que veremos detalladamente hace falta introducir un concepto nuevo: los cubos diádicos.

3.4.1. Los cubos diádicos

Definición 3.4.1. Se define *un intervalo diádico* $\mathcal{I}$, en $\mathbb{R}$ como

$$\mathcal{I} = [m2^{-k}, (m+1)2^{-k}),$$

donde $m, k \in \mathbb{Z}$ y generalizamos definiendo *un cubo diádico* $\mathcal{Q}$ en $\mathbb{R}^n$ como producto de intervalos diádicos, es decir

$$\mathcal{Q} = \Pi_{j=1}^n [m_j 2^{-k}, (m_j+1)2^{-k}),$$

donde $m_1, \ldots, m_n, k \in \mathbb{Z}$.

Definición 3.4.2. Se define la *la familia de todos los cubos diádicos* $\{\mathcal{Q}_k\}$, donde $\mathcal{Q}_k$ denota el conjunto

$$\mathcal{Q}_k = \{\mathcal{Q} : |\mathcal{Q}| = 2^{-k}\}.$$

Además se denotará

$$Q = \cup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{Q}_k.$$

Observación 3.4.3. Para cada k, $\{\mathcal{Q}_k\}$ es una partición de $\mathbb{R}^n$.

Las siguientes propiedades son evidentes por la propia construcción de los cubos diádicos:

1. todo $x \in \mathbb{R}^n$ pertenece en un único cubo de la familia $\mathcal{Q}_k$;

2. dos cubos diádicos o bien son disjuntos, o bien uno de ellos está contenido en el otro;

3. para todo $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_k$ existe un único $\mathcal{Q}^* \supset \mathcal{Q}$ tal que $\mathcal{Q}^* \in \mathcal{Q}_{k+1}$ y $|\mathcal{Q}^*| = 2^n|\mathcal{Q}|$, donde n es la dimensión del espacio;

4. un cubo diádico de la familia $\mathcal{Q}_k$ está contenido en un único cubo diádico de cada familia $\mathcal{Q}_j$, donde $j < k$ y contiene 2^n cubos diádicos de la familia $\mathcal{Q}_{k+1}$. El cubo $\mathcal{Q}^*$ se llamará *padre* de $\mathcal{Q}$.

Definición 3.4.4. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Se define *la esperanza condicional* de f respecto a la σ-álgebra engenerada por $\mathcal{Q}_k$ como

$$E_k f(x) = \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_k} \left(\frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} f \right) \chi_{\mathcal{Q}}(x).$$

Sea $\Omega = \bigcup_k \mathcal{Q}_k$. Entonces se verifica la propiedad fundamental

$$\int_\Omega E_k f = \int_\Omega f. \tag{3.12}$$

Definición 3.4.5. Se define *la función maximal diádica de Hardy-Littlewood* como

$$M_d f(x) = \sup_k |E_k f(x)|.$$

Teorema 3.4.6. *El operador M_d cumple la desigualdad $(1,1)$-débil y*

$$\lim_{k \to \infty} E_k f(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.} \tag{3.13}$$

para toda $f \in L^1_{\text{loc}}$.

Demostración. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, no negativa. Sea

$$\Omega_k = \{x : E_k f(x) > \lambda \quad \text{y} \quad E_j f(x) \leq \lambda \quad \text{para} \quad j < k\},$$

entonces $\{x : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_k \Omega_k$. Por la Definición 3.4.5 se tiene

$$\begin{aligned} |\{x : M_d f(x) > \lambda\}| &= \sum_k |\Omega_k| \leq \sum_k \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_k} E_k f \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{\Omega_k} f = \frac{1}{\lambda} \int_{\bigcup_k \Omega_k} f \leq \frac{1}{\lambda} ||f||_1, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad surge por ser los Ω_k disjuntos. Veremos la relación (3.13). Sea f una función continua. Entonces $\lim_{k\to\infty} E_k f(x) = f(x)$. Usando la desigualdad (1,1)-débil del operador M_d y el Teorema 3.3.6 se obtiene que el conjunto

$$\{f \in L^1 : \lim_{k\to\infty} E_k f(x) = f(x)\}$$

es cerrado. Por densidad de las funciones continuas en L^1 se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} E_k f(x) = f(x) \ \text{ c.t.p.}$$

para toda $f \in L^1$. Si $f \in L^1_{\text{loc}}$, hacemos el mismo procedimiento para $f\chi_{\mathcal{Q}} \in L^1$ y obtenemos (3.13) en c.t.p. de $\mathcal{Q}$, para todo $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}_0$. Usando la Observación 3.4.3 se obtiene la existencia en c.t.p. de $\mathbb{R}^n$.

$\square$

3.4.2. Descomposición de Calderón-Zygmund

Veamos la Descomposición de Calderón-Zygmund:

Teorema 3.4.7. *Sea f una función integrable no negativa y λ un número positivo. Existe una sucesión $\{\mathcal{Q}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de cubos diádicos disjuntos tal que :*

1. $f(x) \le \lambda$ *en c.t.* $x \notin \bigcup_j \mathcal{Q}_j$;
2. $|\bigcup_j \mathcal{Q}_j| \le \frac{1}{\lambda}||f||_1$;
3. $\lambda < \frac{1}{|\mathcal{Q}_j|}\int_{\mathcal{Q}_j} f \le 2^n\lambda$.

Demostración. 1.Consideramos que los conjuntos Ω_k definidos como anteriormente, descompuestos en los cubos diádicos disjuntos $\mathcal{Q}_k$, forman la familia $\{\mathcal{Q}_j\}$. Sea $x \notin \bigcup_j \mathcal{Q}_j$, es decir $x \notin \bigcup_k \Omega_k$. Entonces si $E_k f(x) \le \lambda$ para todo k, por (3.13) del teorema anterior se obtiene $f(x) \le \lambda$.

La siguiente relación es simplemente la desigualdad $(1,1)$-débil para el operador M_d que probamos en el teorema anterior, es decir

$$|\bigcup_j \mathcal{Q}_j| = |\bigcup_k \Omega_k| = |\{x : M_d f(x) > \lambda\}| \le \frac{1}{\lambda}||f||_1.$$

La primera desigualdad de última relación es consecuencia de la definición de los Ω_k, mientras que la segunda se obtiene si consideramos la familia de los cubos $\{\mathcal{Q}_j^*\}$, donde $\mathcal{Q}_j^*$ es el padre del $\mathcal{Q}_j$. Por lo tanto, se tiene

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}_j|}\int_{\mathcal{Q}_j} f \leq \frac{|\mathcal{Q}_j^*|}{|\mathcal{Q}_j||\mathcal{Q}_j^*|}\int_{\mathcal{Q}_j^*} f \leq 2^n\lambda.$$

□

Probaremos el siguiente lema utilizando la Descomposición de Calderón-Zygmund:

Lema 3.4.8. *Se tiene la desigualdad*

$$|\{x : M'f(x) > 4^n\lambda\}| \leq 2^n|\{x : M_d f(x) > \lambda\}|, \tag{3.14}$$

donde $M'f$ denota la función maximal de Hardy-Littlewood sobre cubos.

Demostración. Sea f una función en las condiciones del teorema anterior. Existe entonces una sucesión de cubos $\{\mathcal{Q}_j\}$ de manera que se cumplen 1, 2 y 3 del mismo teorema. Sea $\{x : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_j \mathcal{Q}_j$. Sea $\mathcal{Q}_j^*$ el padre del $\mathcal{Q}_j$. Entonces la desigualdad (3.14) surge de la siguiente relación:

$$\{x : M'f(x) > 4^n\lambda\} \subset \bigcup_j \mathcal{Q}_j^*. \tag{3.15}$$

Sea $x \notin \bigcup_j \mathcal{Q}_j^*$ y sea $\mathcal{Q}$ un cubo centrado en x de manera que su lado está entre 2^{k-1} y 2^k. El cubo $\mathcal{Q}$ corta a lo mas 2^n cubos de la familia $\mathcal{Q}_k$, por la cuarta propiedad de los cubos diádicos que comentamos en la Sección 3.4.1. Sean $R_1, \ldots, R_m$ estos cubos donde $m \leq 2^n$. Los $\{R_i\}_{i=1,\ldots,m}$ no pueden estar entre los $\mathcal{Q}_j$ porque si estuviesen, entonces $R_i^* \supset \mathcal{Q}_j$ que es falso ya que $x \notin \bigcup_j \mathcal{Q}_j$. Por lo tanto, para todo $i = 1, \ldots, m$ se tiene $\frac{1}{R_i}\int_{R_i} f < \lambda$, de donde se obtiene

$$\frac{1}{|\mathcal{Q}|} \leq \sum_i^m \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{Q}\cap R_i} f \leq \sum_i^m \frac{2^{kn}}{|\mathcal{Q}|}\frac{1}{|R_i|}\int_{R_i} f \leq 2^n m\lambda.$$

Es decir, para toda $x \notin \bigcup_j \mathcal{Q}_j^*$ se tiene $M'f(x) \leq 2^n m\lambda$, de donde se obtiene la relación (3.15) para $m \leq 2^n$. □

Observación 3.4.9. Podemos utilizar el lema precedente para demostrar la desigualdad $(1,1)$-débil para la función maximal de Hardy-Littlewood. Efectivamente, usamos la relación (3.14) y la desigualdad (1,1)-débil para el operador M_d:

$$|\{x : M'f(x) > \lambda\}| \leq 2^n |\{x : M_d f(x) > 4^{-n}\lambda\}| \leq \frac{8^n}{\lambda}||f||_1,$$

que es la desigualdad (1,1)-débil para el operador M'. La desigualdad (1,1)-débil para el operador M se obtiene por la relación (3.2) y la desigualdad (p,p)-fuerte se obtiene utilizando de nuevo el Teorema 1.2.11 (Marcinkiewicz).

Observación 3.4.10. Utilizando los resultados obtenidos hasta ahora probaremos el Teorema 3.1.1 (Diferenciación de Lebesgue).

Efectivamente, por haber obtenido la desigualdad $(1,1)$-débil para el operador M, y utilizando el Teorema 3.3.6, obtenemos

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} f(x-y)dy = f(x) \quad \text{en c.t.p.}$$

para toda $f \in L^1_{\text{loc}}$.

Observación 3.4.11. Se puede probar un resultado mas preciso que el Teorema 3.1.1 (Diferenciación de Lebesgue), es decir

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} |f(x-y) - f(x)|dy = 0 \ \text{ c.t.p.}$$

Para más detalles, véase [Duo].

Capítulo 4

La transformada de Hilbert

El principal propósito de este trabajo es estudiar las integrales singulares. Empezamos con la transformada de Hilbert que es el caso más sencillo. Antes, veremos las herramientas que necesitamos para definir dicha transformada.

4.1. Valor principal

El valor principal fue introducido por *A. Cauchy* y estudiado por *N. Luzin*, *M. Riesz* y *A. Kolmogorov* entre otros. A lo largo de este capítulo, $f \in \mathcal{S}$ ó L^p denotarán funciones definidas sobre la recta real.

Definición 4.1.1. Se define *el valor principal* de $\frac{1}{x}$, abreviadamente v.p.$\frac{1}{x}$, como

$$\text{v.p.}\frac{1}{x}(\phi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx, \tag{4.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}$ y $\phi \in \mathcal{S}$.

Observación 4.1.2. La expresión (4.1) define una distribución temperada. Efectivamente, la linealidad es inmediata y la continuidad se obtiene utilizando el Teorema 1.1.4 (Convergencia Dominada). Es decir, sea $\{\phi_k\}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{S}$.

Veremos que $\lim_{k\to\infty} \text{v.p.}\frac{1}{x}(\phi_k) = 0$ cuando $\lim_{k\to\infty} \phi_k = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned}\left|\text{v.p.}\frac{1}{x}(\phi_k)\right| &= \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi_k(x)}{x}dx\right| \\ &= \left|\int_{|x|<1} \frac{\phi_k(x)-\phi_k(0)}{x}dx + \int_{|x|>1}\frac{\phi_k(x)}{x}dx\right| \\ &\leq \int_{|x|<1} ||\phi_k'||_\infty dx + ||\phi_k||_1 \leq c||\phi_k'||_\infty + ||\phi_k||_1,\end{aligned}$$

que tiende a cero cuando $\lim_{k\to\infty} \phi_k = 0$, teniendo en cuenta que $\{\phi_k\}$ es una sucesión de funciones de $\mathcal{S}$.

Sean $\psi_\varepsilon = \frac{1}{x}\chi_{\{|x|>\varepsilon\}}$, donde $\varepsilon > 0$. Entonces las ψ_ε son acotadas y definen distribuciones temperadas. Además

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \langle \psi_\varepsilon, \phi\rangle = \text{v.p.}\frac{1}{x}(\phi) \text{ para toda } \phi \in \mathcal{S}, \tag{4.2}$$

que es consecuencia de la Definición 4.1.1, donde $\langle \psi_\varepsilon, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(x)\phi(x)dx$.

4.2. Introducción a la transformada de Hilbert

Principalmente, el estudio de la transformada de Hilbert se hizo utilizando técnicas de Análisis Complejo hasta que *Besicovitch* en 1923, y a continuación *Calderón* y *Zygmund* introdujeron métodos de Análisis Real.

4.2.1. El núcleo de Poisson conjugado

Para poder definir la transformada de Hilbert hay que introducir el núcleo de Poisson conjugado. Recordamos que si u es una función armónica, entonces si consideramos la función analítica $f = u + iv$, v será la *armónica conjugada* de u. Sea una función $f \in \mathcal{S}$, su extensión armónica al semiplano superior se obtiene al hacer la convolución con el núcleo de Poisson, es decir $u(x,t) = P_t * f(x)$. Siendo $z = x + it$, la expresión anterior se puede expresar

$$u(z) = \int_0^\infty \hat{f}(\xi)e^{2\pi i z\cdot\xi}d\xi + \int_{-\infty}^0 \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\bar{z}\cdot\xi}d\xi.$$

Consideramos

$$v(z) = v(x,t) = \int_0^\infty \hat{f}(\xi)e^{2\pi i z\cdot\xi}d\xi - \int_{-\infty}^0 \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\bar{z}\cdot\xi}d\xi,$$

que es también armónica en $\mathbb{R}^2_+$. Observamos que $u+iv$ es analítica por lo que v es la armónica conjugada de u. Representamos v como

$$v(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}-i\mathrm{sgn}\xi e^{-2\pi it|\xi|}\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi.$$

Sea $\hat{Q}_t(\xi)=-i\mathrm{sgn}\xi\mathrm{e}^{-2\pi t|\xi|}$. Entonces $v(x,t)=Q_t*f(x)$. Efectivamente,

$$\begin{aligned}v(x,t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{Q}_t(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{Q_t*f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi,\end{aligned}$$

de donde usando (2.24) (fórmula de inversión), se obtiene

$$v(x,t)=\mathcal{F}^{-1}(\widehat{Q_t*f}(\xi))=Q_t*f(x),$$

y $\mathcal{F}^{-1}$ denota el operador inverso de la transformada de Fourier. Invirtiendo la transformada de Fourier se obtiene

$$Q_t(x)=\frac{1}{\pi}\frac{x}{t^2+x^2}$$

que se denominará *el núcleo de Poisson conjugado.*

Proposición 4.2.1. *Se tiene*

$$\lim_{t\to 0}\langle Q_t,\phi\rangle=\frac{1}{\pi}\mathrm{v.p}\frac{1}{x}(\phi),\ \forall\phi\in\mathcal{S}. \tag{4.3}$$

Demostración. Bastaría probar que

$$\lim_{t\to 0}\left\langle Q_t-\frac{1}{\pi}\psi_t,\phi\right\rangle=0,\quad\text{para toda }\ \phi\in\mathcal{S}. \tag{4.4}$$

Entonces por la relación (4.2) se obtendria (4.3). Se tiene

$$\begin{aligned}\langle\pi Q_t-\psi_t,\phi\rangle&=\langle\pi Q_t,\phi\rangle-\langle\psi_t,\phi\rangle=\left\langle\frac{x}{t^2+x^2},\phi\right\rangle-\langle\psi_t,\phi\rangle\\&=\int_{\mathbb{R}}\frac{x\phi(x)}{t^2+x^2}dx-\int_{|x|>t}\frac{\phi(x)}{x}dx\\&=\int_{|x|\le t}\frac{x\phi(x)}{t^2+x^2}dx+\int_{|x|>t}\left(\frac{x}{t^2+x^2}-\frac{1}{x}\right)\phi(x)dx\\&=\int_{|x|\le 1}\frac{x\phi(tx)}{t^2+x^2}dx-\int_{|x|>1}\frac{\phi(tx)}{x(1+x^2)}dx.\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $t\to 0$, por el Teorema 1.1.4 (Convergencia Dominada) se tiene que ambas integrales tienden a cero. Para esto, tenemos en cuenta que los núcleos son impares y los conjuntos de integración son simétricos. $\square$

Observación 4.2.2. Observamos que el límite,

$$\lim_{t\to 0}\langle Q_t,\phi\rangle = \frac{1}{\pi}\text{v.p}\frac{1}{x}(\phi), \forall \phi\in\mathcal{S}$$

se entiende en el sentido de las distribuciones, es decir $\lim_{t\to 0} Q_t = \frac{1}{\pi}\text{v.p}\frac{1}{x}$ en $\mathcal{S}'$.

Observación 4.2.3. Se tiene

$$\lim_{t\to 0} Q_t * f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{f(x-y)}{y}dy$$

que es consecuencia de la Proposición 4.2.1. Más aún

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\frac{1}{x}\right)(\xi) = -i\text{sgn}\xi. \tag{4.5}$$

En efecto, por la proposición anterior se tiene $\mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\frac{1}{x}\right)(\xi) = \mathcal{F}(\lim_{t\to 0} Q_t)$ y por la continuidad de la transformada de Fourier se obtiene

$$\mathcal{F}(\lim_{t\to 0} Q_t) = \lim_{t\to 0}\mathcal{F}(Q_t) = -i\text{sgn}\xi e^{-2\pi i 0\xi} = -i\text{sgn}\xi.$$

4.2.2. Caracterizaciones de la transformada de Hilbert

Definición 4.2.4. Definimos la transformada de Hilbert de una función $f\in\mathcal{S}$ como una de las siguiente expresiones equivalentes:

$$Hf = \lim_{t\to 0} Q_t * f; \tag{4.6}$$

$$Hf = \frac{1}{\pi}\text{v.p}\frac{1}{x} * f = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}\frac{f(\cdot - y)}{y}dy; \tag{4.7}$$

$$\mathcal{F}(Hf)(\xi) = -i\text{sgn}\xi\mathcal{F}(f)(\xi). \tag{4.8}$$

Observación 4.2.5. La equivalencia es inmediata a partir de la relación (4.5) y la Proposición 4.2.1.

Se tienen las siguiente propiedades:

$$||Hf||_2 = ||f||_2. \tag{4.9}$$

En efecto, por la igualad de Plancherel y la relación (4.8) de la definición anterior se tiene

$$||Hf||_2 = ||\mathcal{F}(Hf)||_2 = ||f||_2.$$

Observación 4.2.6. La propiedad (4.9) nos permite definir la transformada de Hilbert sobre el espacio de Lebesgue L^2.

También se tiene

$$H(Hf) = -f. \tag{4.10}$$

Efectivamente, usando de nuevo la relación (4.8) de la definición anterior se tiene

$$\mathcal{F}(H(Hf))(\xi) = -i\mathrm{sgn}\mathcal{F}(Hf)(\xi) = -i\mathrm{sgn}\xi(-\mathrm{isgn}\xi\mathcal{F}\mathrm{f}(\xi)).$$

Ahora, considerando (2.24) (fórmula de inversión), se obtiene $H(Hf) = -f$.

Más aún, usando el Teorema de Fubini obtenemos

$$\int Hf \cdot g = -\int f \cdot Hg, \tag{4.11}$$

donde f, g son funciones reales.

Hasta ahora hemos definido la transformada de Hilbert para funciones de $\mathcal{S}$ y de L^2. A continuación demostraremos dos resultados importantes que nos permiten extender dicha transformada sobre todas las funciones de L^p para $1 \leq p < \infty$.

Teorema 4.2.7. *(Kolmogorov) La transformada de Hilbert cumple la desigualdad (1,1)-débil, es decir:*

$$|\{x : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda}||f||_1.$$

Demostración. Sea $\lambda > 0$, fijo y sea $f \geq 0$, integrable. Entonces por la descomposición de Calderón-Zygmund, existe una sucesión de intervalos $\{I_j\}$ disjuntos tales que:

1. $f(x) \leq \lambda$ en c.t. $x \notin \bigcup_j I_j$;
2. $|\bigcup_j I_j| \leq ||f||_1$;
3. $\lambda < \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f \leq 2^n\lambda$.

Sea $\Omega = \bigcup_j I_j$ y sea I_j^* el padre de I_j. Entonces para $\Omega^* = \bigcup_j I_j^*$ se tiene $|\Omega^*| \leq 2|\Omega|$. Ahora, descomponemos la función f como suma de dos funciones g y h donde

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \notin \bigcup_j I_j; \\ \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)dy, & \text{si } x \in I_j, \end{cases}$$

y $h(x) = \sum_j h_j(x)$, donde $h_j(x) = \left(f(x) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)dy\right)\chi_{I_j}(x)$. Se tiene entonces

$$|\{x : |Hf(x)| > \lambda\}| \leq |\{x : |Hg(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| + |\{x : |Hh(x)| > \frac{\lambda}{2}\}|.$$

Vamos a estimar cada uno de los dos sumandos. Empezamos por el primero. Utilizando la desigualdad de Chebychev y la relación (4.9) obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x \in \mathbb{R} : |Hg(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| &\leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} |Hg(x)|^2 dx = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx \\
&\leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\Omega^c} |g(x)|^2 dx + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 \int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \\
&\leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 (2\lambda) \int_{\Omega^c} |f(x)| dx \leq \frac{8}{\lambda} ||f||_1,
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $g(x) \leq 2\lambda$ en casi todo punto.

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x \in \mathbb{R} : |Hh(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| &\leq |\Omega^*| + |\{x \notin \Omega^* : |Hh(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| \\
&\leq 2|\Omega| + \frac{2}{\lambda} \int_{(\Omega^*)^c} |Hh(x)| dx \leq \frac{2}{\lambda} ||f||_1 \\
&\quad + \frac{2}{\lambda} \int_{(\Omega^*)^c} |Hh(x)| dx,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la segunda relación obtenida por la Descomposición de Calderón-Zygmund, y la desigualdad de Chebychev. Para terminar basta ver que el último término está acotado por $||f||_1$. En efecto, si c_j es el centro de I_j, usando el Teorema de Fubini y teniendo en cuenta que h_j es de media nula, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{(\Omega^*)^c} |Hh(x)|dx &\leq \int_{(\Omega^*)^c} \sum_j |Hh_j(x)|dx = \sum_j \int_{(\Omega^*)^c} |Hh_j(x)|dx \\
&\leq \sum_j \int_{(I_j^*)^c} |Hh_j(x)|dx = \sum_j \int_{(I_j^*)^c} \left| \int_{I_j} \frac{h_j(y)}{x-y} dy \right| dx \\
&\leq \sum_j \int_{(I_j^*)^c} \left(\int_{I_j} |h_j(y)| \left| \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_j} \right| dy \right) dx \\
&= \sum_j \int_{I_j} |h_j(y)| \left(\int_{(I_j^*)^c} \left| \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_j} \right| dx \right) dy \\
&\leq \sum_j \int_{I_j} |h_j(y)| \left(\int_{(I_j^*)^c} \frac{|I_j|}{|x-c_j|} dx \right) dy \\
&= 2 \sum_j \int_{I_j} |h_j(y)| dy \leq 2||f||_1,
\end{aligned}$$

puesto que $\int_{(I_j^*)^c} \frac{|I_j|}{|x-c_j|} dx = 2$. □

Observación 4.2.8. En [G-R] se puede ver una demostración alternativa del Teorema de Kolmogorov donde se usan herramientas del Análisis Complejo.

Teorema 4.2.9. *(Riesz) La transformada de Hilbert cumple la desigualdad (p,p)-fuerte, para $1 < p < \infty$, es decir*

$$||Hf||_p \leq c_p ||f||_p.$$

Demostración. Por el Teorema 4.2.7 (Kolmogorov), hemos obtenido la desigualad (1,1)-débil para el operador de Hilbert y por la Observación 4.2.6 la (2,2)-fuerte. Utilizamos entonces el Teorema 1.2.11 (Marcinkiewicz), y obtenemos la desigualdad (p,p)-fuerte para $1 < p \leq 2$. Veremos que dicha desigualdad es también válida para $2 < p < \infty$. Se tiene el siguiente resultado de dualidad:

$$||Hf||_p = \sup_{g \in L^{p'}} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} Hf(x) \cdot g(x) dx \right| : ||g||_{p'} \leq 1 \right\},$$

de donde usando la relación (4.11) se obtiene

$$\begin{aligned}
||Hf||_p &= \sup_{g \in L^{p'}} \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot Hg(x) dx \right| : ||g||_{p'} \leq 1 \right\} \\
&\leq ||f||_p \sup_{g \in L^{p'}} \{ ||Hg||_{p'} : ||g||_{p'} \leq 1 \} \leq c_{p'} ||f||_p,
\end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el Teorema de Riesz. □

Observación 4.2.10. En [Duo] se puede ver una demostración alternativa del Teorema 4.2.9 (Riesz), sin utilizar la desigualdad (1,1)-débil.

Observación 4.2.11. Las desigualdades (p,p)-fuerte para $p = 1$ ó $p = \infty$ en general son falsas. Efectivamente, sea $f = \chi_{[0,1]}$. Entonces, $Hf(x) = \frac{1}{\pi}\log\left|\frac{x}{x-1}\right|$, por lo que $Hf \notin L^p$ con $p \in \{1, \infty\}$.

Utilizando los Teoremas de Riesz y Kolmogorov veremos cómo se extiende la transformada de Hilbert para funciones de L^p con $1 \leq p < \infty$.
Sea $f \in L^1$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{S}$ que converge en la norma $||\cdot||_1$, es decir $||f_n - f||_1 \to 0$ cuando $n \to \infty$. Consideramos la sucesión $\{Hf_n\}$. Por el Teorema 4.2.7 (Kolmogorov), se tiene

$$|\{x : |Hf_n - Hf_m| > \varepsilon\}| \leq \frac{C}{\varepsilon}||f_n - f_m||_1.$$

Tomando el límite cuando n, m tienden a infinito obtenemos

$$\lim_{n,m\to\infty} |\{x : |Hf_n - Hf_m| > \varepsilon\}| \leq \lim_{n,m\to\infty} \frac{C}{\varepsilon}||f_n - f_m||_1 = 0$$

teniendo en cuenta que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $||\cdot||_1$, ya que es convergente en L^1. Por lo tanto, $\{Hf_n\}$ es una sucesión de Cauchy en medida. Por ser $\mathbb{R}$ completo con su norma usual, la sucesión $\{Hf_n\}$ es convergente en medida, es decir existe el límite de Hf_n, que definiremos como la transformada de Hilbert de la función f.
Sea $f \in L^p$, con $1 < p < \infty$. Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ tal que $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0$. Por el Teorema 4.2.9 (Riesz), $\{Hf_n\}$ es una sucesión de Cauchy en L^p y por completitud de L^p, convergente en la norma $||\cdot||_p$, a una función $g \in L^p$. Es decir, existe $\lim_{n\to\infty} Hf_n$ en norma que definiremos como la transformada de Hilbert de f.

4.3. Integrales truncadas y convergencia puntual

Hemos definido la transformada de Hilbert como un operador que actúa sobre funciones de L^p para $1 \leq p < \infty$. Por otro lado hay que observar que este operador no se ha definido puntualmente. Por lo tanto, necesitamos introducir un nuevo concepto: las integrales truncadas, y luego tomando el supremo de éstas veremos que este nuevo operador maximal cumple ciertas desigualdades débiles y fuertes que podemos usar para probar que la transformada de Hilbert está bien definida puntualmente.

Definición 4.3.1. Se definen las *integrales truncadas* como

$$H_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}dy = f * \psi_\varepsilon(x)$$

para $f \in L^p$, donde $p \geq 1$.

Observación 4.3.2. observamos que las integrales truncadas están bien definidas para funciones de L^p con $p \geq 1$. En efecto, las funciones $\frac{1}{y}\chi_{\{|y|>\varepsilon\}} \in L^q$ con $1 < q \leq \infty$ y usamos la desigualdad de Hölder.

Veremos que los operadores $H_\varepsilon f$ cumplen la desigualdad (1,1)-débil y la (p,p)-fuerte. En efecto, la desigualdad (1,1)-débil se obtiene como en el Teorema 4.3.1 (Kolmogorov). Para ver la desigualdad (p,p)-fuerte, empezamos probando que $H_\varepsilon f$ cumple la desigualdad (2,2)-fuerte con una constante independiente de ε. Se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\psi_\varepsilon)(\xi) = \lim_{N\to\infty}\int_{\varepsilon<|y|<N} \frac{e^{-2\pi i y\xi}}{y}dy &= \lim_{N\to\infty}\int_{\varepsilon<|y|<N} -i\frac{\sin(2\pi y\xi)}{y}dy \\ &= -2i\mathrm{sgn}\xi \lim_{\mathrm{N}\to\infty}\int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{2\pi \mathrm{N}\xi} \frac{\sin(\mathrm{t})}{\mathrm{t}}\mathrm{dt},\end{aligned} \tag{4.12}$$

de donde obtenemos $|\mathcal{F}(\psi_\varepsilon)| \leq \pi$ para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, utilizando el Teorema 2.6.10 (Plancherel), se tiene

$$\begin{aligned}||H_\varepsilon f||_2 &= ||\mathcal{F}(H_\varepsilon f)||_2 = ||\mathcal{F}(f * \psi_\varepsilon)||_2 \\ &= ||\mathcal{F}(\psi_\varepsilon)\mathcal{F}(f)||_2 \leq ||\mathcal{F}(f)||_2||\mathcal{F}(\psi_\varepsilon)||_\infty \\ &= ||f||_2||\mathcal{F}(\psi_\varepsilon)||_\infty \leq \pi||f||_2,\end{aligned}$$

es decir, se cumple la desigualdad (2,2)-fuerte. La desigualdad (p,p)-fuerte es consecuenca del Teorema 1.2.11 (Marcinkiewicz), para $p \leq 2$ y para $p > 2$ surge por dualidad.

Definición 4.3.3. Se define el *operador maximal*

$$H^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |H_\varepsilon f(x)|.$$

A continuación probaremos la desigualdad (1,1)-débil y la (p,p)-fuerte con $1 < p < \infty$ para el operador H^*. Empezamos demostrando la denominada *desigualdad de Cotlar*:

TEOREMA 4.3.4. *Se tiene*

$$H^* f(x) \leq M(Hf)(x) + cMf(x). \tag{4.13}$$

Demostración. Bastaría demostrar la desigualdad (4.13) para $H_\varepsilon f$ con c independiente de ε, es decir ver si se cumple

$$H_\varepsilon f(x) \leq M(Hf)(x) + cMf(x).$$

Sea $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ no negativa, par, decreciente en $(0,\infty)$ con soporte en $\{x : |x| \leq \frac{1}{2}\}$ y tal que $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = 1$. Sea $\{\phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ la aproximación de identidad donde $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$.

Obviamente, se tiene la siguiente expresión

$$\psi_\varepsilon(y) = \left(\phi_\varepsilon * \text{v.p.}\frac{1}{x}\right)(y) + \left[\frac{1}{y}\chi_{\{|y|>\varepsilon\}} - \left(\phi_\varepsilon * \text{v.p.}\frac{1}{x}\right)\right](y).$$

Sean

$$A(y) = \left(\phi_\varepsilon * \text{v.p.}\frac{1}{x}\right)(y)$$

y

$$B(y) = \left[\frac{1}{y}\chi_{\{|y|>\varepsilon\}} - \left(\phi_\varepsilon * \text{v.p.}\frac{1}{x}\right)\right](y).$$

Sea $f \in L^p$ con $p \geq 1$, entonces por definición $\psi_\varepsilon * f = H_\varepsilon f$. Por otro lado basta ver que $A * f$ está acotada por $M(Hf)$ y $B * f$ por cMf y la desigualdad de Cotlar queda demostrada. Se tiene, por la Proposición 3.3.7

$$\begin{aligned}
|A * f(y)| &= \left|\left(\phi_\varepsilon * \text{v.p.}\frac{1}{x}\right) * f(y)\right| = \left|\phi_\varepsilon * \left(\text{v.p.}\frac{1}{x} * f(y)\right)\right| \\
&= |(\phi_\varepsilon * Hf)(y)| \leq \sup_{\varepsilon>0} |\phi_\varepsilon * Hf| \\
&\leq ||\phi||_1 M(Hf)(y) \leq M(Hf)(y).
\end{aligned}$$

Por otro lado veremos que $B * f$ está acotado por Mf, para $\varepsilon = 1$. Entonces por dilatación, esta acotación será válida para todo $\varepsilon > 0$.

Sea $|y| > 1$, entonces

$$|B(y)| = \left|\frac{1}{y} - \left(\phi_\varepsilon * \text{v.p.}\frac{1}{x}\right)(y)\right| = \left|\frac{1}{y} - \int_{|x|\leq 1/2} \frac{\phi(x)}{y-x}dx\right|$$
$$\leq \int_{|x|\leq 1/2} \phi(x) \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y-x}\right| dx \leq \frac{c}{|y|^2},$$

puesto que para todo $|x| \leq 1/2$, $|y-x| \leq |y|$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$.

Sea $|y| < 1$, entonces $|y-x| \leq 2$ y

$$\begin{aligned}
|B(y)| &= \left|\frac{1}{y}\chi_{\{|y|>1\}}(y) - \left(\phi_\varepsilon * \text{v.p.}\frac{1}{x}\right)(y)\right| \\
&= \left|0 - \lim_{\delta\to 0}\int_{\delta<|x|<2} \frac{\phi(y-x)}{x}dx\right| \\
&\leq \left|\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta<|x|<2} \frac{\phi(y-x)-\phi(y)}{x}dx\right| \\
&\leq ||\phi'||_\infty \lim_{\delta\to 0}\int_{\delta<|x|<2} dx \leq c,
\end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho que la integral de $\frac{1}{x}$ es nula en $\delta < |x| < 2$. Usando la Observación 3.3.8, se tiene

$$B * f(y) \leq |B * f(y)| \leq c_n Mf(x).$$

□

COROLARIO 4.3.5. *El operador H^* cumple la desigualdad (p,p)-fuerte para todo p, $1 < p < \infty$.*

Demostración. La desigualdad (p,p)-fuerte se obtiene inmediatamente del Teorema 4.3.4 puesto que los operadores de Hilbert, H y de Hardy-Littlewood, M cumplen la misma desigualdad. □

TEOREMA 4.3.6. *El operador H^* es de tipo (1,1)-débil.*

Demostración. Sea $f \geq 0$, integrable. Hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund a la altura $\lambda > 0$ como en el Teorema 4.2.7 (Kolmogorov). Además, hacemos la misma descomposición de la función f, es decir, $f = g + h = g + \sum h_j$.

Tenemos que probar la siguiente acotación

$$|\{x : |H^*f(x)| > \lambda\}| \leq \left|\left\{x : |H^*g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x : |H^*h(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

donde la acotación de primer sumando se consigue como en el Teorema de Kolmogorov, usando la desigualdad de Chebychev y la relación (4.9), ya que por el Corolario 4.3.5 se ha obtenido la desigualdad (2,2)-fuerte para el operador H^*.

Veremos a continuación la siguiente acotación

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R} : H^*h(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{c}{\lambda}||f||_1$$

que por $|\Omega^*| \leq 2|\Omega|$ se reduce a demostrar

$$\left|\left\{x \notin \Omega^* : H^*h(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{c}{\lambda}||f||_1.$$

Sea $x \notin \Omega^*$ fijo. Entonces tendremos uno de los siguientes casos:

Primer caso: $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \bigcap I_j = I_j$. En este caso, obviamente se tiene

$$H_\varepsilon h_j(x) = 0. \tag{4.14}$$

Segundo caso: $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \bigcap I_j = \emptyset$. Sea c_j el centro de I_j, entonces por ser $\int_{I_j} h_j(y)dy = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} |H_\varepsilon h_j(x)| &= \left|\int_{I_j}\left(\frac{h_j(y)}{x-y} - \frac{h_j(y)}{x-c_j}\right)dy\right| \\ &\leq \int_{I_j}\left|\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_j}\right| |h_j(y)|dy \leq \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}||h_j||_1. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Tercer caso: $x-\varepsilon \in I_j$ ó $x-\varepsilon \notin I_j$. Entonces $I_j \subset (x-3\varepsilon, x+3\varepsilon)$ puesto que $x \notin \Omega^*$ para todo $y \in I_j$, $|x-y| > \varepsilon/3$. Por lo tanto

$$|H_\varepsilon h_j(x)| \leq \int_{I_j}\frac{|h_j(x)|}{|x-y|}dy \leq \frac{3}{\varepsilon}\int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon}|h_j(y)|dy. \tag{4.16}$$

Para todo $\varepsilon > 0$, sumando en j se obtiene

$$\begin{aligned} |H_\varepsilon h(x)| &\leq \sum_j \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}||h_j||_1 + c\sum_j \frac{3}{\varepsilon}\int_{(x-3\varepsilon,x+3\varepsilon)\cap I_j}|h_j(y)|dy \\ &\leq \sum_j \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}||h_j||_1 + cMh(x), \end{aligned}$$

de donde considerando el supremo sobre todo $\varepsilon > 0$ y usando la desigualdad de Chebychev se tiene

$$
\begin{aligned}
&|\{x \notin \Omega^* : |H^*h(x)| > \frac{\lambda}{2}\}| \\
&\qquad\qquad \leq |\{x \notin \Omega* : \sum_j \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}||h_j||_1 > \frac{\lambda}{4}\}| \\
&\qquad\qquad\quad + |\{x \in \mathbb{R} : Mh(x) > \frac{c\lambda}{4}\}| \\
&\qquad\qquad \leq \frac{4}{\lambda}\sum_j \int_{(I_j^*)^c} \frac{|I_j|}{|x-c_j|} dx||h_j||_1 + \frac{c'}{\lambda}||h||_1 \leq \frac{C}{\lambda}||f||_1,
\end{aligned}
$$

teniendo en cuenta que la función maximal de Hardy-Littlewood, M, cumple la desigualdad (1,1)-débil. □

Observación 4.3.7. El operador H se define puntualmente, es decir

$$\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x) = Hf(x) \text{ en c.t.p.}$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R})$, donde $1 < p < \infty$. En efecto, usamos el Corolario 4.3.5 y el Teorema 3.3.6.

Observación 4.3.8. En el libro de [G-R], se demuestra la existencia del límite puntual para la transformada de Hilbert, utilizando en vez de las integrales truncadas, el Teorema de Fatou.

Observación 4.3.9. La expresión (4.8) ofrece un nuevo punto de vista de la transformada de Hilbert. En efecto, $m(\xi) = -i\text{sgn}\xi \in L^\infty$ es el multiplicador de la transformada de Hilbert y se han obtenido algunos resultados sobre el operador H que provienen del estudio de los multiplicadores.

Capítulo 5

Integrales singulares

La transformada de Hilbert es una integral singular, la más sencilla como ya hemos visto en el Capítulo 4. En este capítulo generalizamos y caracterizamos este concepto.

5.1. Introducción a las integrales singulares

En esta sección introducimos las integrales singulares dadas por convolución.

Definición 5.1.1. Sea K una distribución temperada. El operador

$$Tf = K * f, \tag{5.1}$$

donde $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se denominará *integral singular* si se cumplen las siguiente condiciones:

a) $\hat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$;

b) K coincide en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con una función localmente integrable, que seguiremos denotándola K, y llamaremos *núcleo* asociado al operador T que satisface la condición de Hörmander

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx \leq C_K, \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}^n. \tag{5.2}$$

Observación 5.1.2. La condición b) nos permite expresar (5.1) como

$$Tf(x) = \text{v.p.} K * f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} K(y) f(x-y) dy. \tag{5.3}$$

PROPOSICIÓN 5.1.3. *La condición de Hörmander se cumple si*

$$|\nabla K(x)| \leq \frac{c}{|x|^{n+1}}.$$

Demostración. Usando el Teorema del Valor Medio y la hipótesis, se tiene

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)|dx \leq \int_{|x|>2|y|} |\nabla K(x)||y|dx = |y| \int_{|x|>2|y|} \frac{c}{|x|^{n+1}}dx = c.$$

□

Un caso particular de integrales singulares son los operadores cuyos núcleo asociado es $K_\Omega(y) = \frac{\Omega(y')}{|y|^n}$, donde $\Omega \in L^1(S^{n-1})$, es de media nula y $y' = \frac{y}{|y|}$. Se tiene entonces,

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)dy. \tag{5.4}$$

El operador dado por (5.4) tendría sentido para funciones de la clase de Schwarz, ya que es la convolución de f con la distribución temperada v.p.$\frac{\Omega(y')}{|y|^n}$ dado por

$$\begin{aligned} \left\langle \text{v.p.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}, \phi \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\phi(x)dx \\ &= \int_{|x|<1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}[\phi(x) - \phi(0)]dx + \int_{|x|>1} \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\phi(x)dx, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la media nula de Ω para restar el término $\phi(0)$. Las dos integrales convergen: fácilmente se ve la segunda y la primera converge puesto que $\frac{\phi(x)-\phi(0)}{|x|^n}$ está controlado por $||\nabla\phi||_\infty$.

OBSERVACIÓN 5.1.4. Observamos, en el caso unidimensional, que si $\Omega(y') = \frac{1}{\pi}\text{sgn}y$, (5.4) es simplemente la transformada de Hilbert.

DEFINICIÓN 5.1.5. Sea

$$\omega_\infty(t) = \sup\{|\Omega(u_1) - \Omega(u_2)| : |u_1 - u_2| \leq t, \;\; u_1, u_2 \in S^{n-1}\}.$$

Se dice que Ω cumple la *condición de tipo Dini* si

$$\int_0^1 \frac{\omega_\infty(t)}{t}dt < \infty. \tag{5.5}$$

PROPOSICIÓN 5.1.6. *Si Ω satisface la condición de tipo Dini entonces el núcleo K_Ω cumple la condición de Hörmander.*

Demostración. Queremos ver que se satisface

$$\int_{|x|>2|y|} |K_\Omega(x-y) - K_\Omega(x)|dx < c.$$

Se tiene, por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
|K_\Omega(x-y) - K_\Omega(x)| &= \left| \frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^n} - \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \right| \\
&\leq \left| \frac{\Omega((x-y)') - \Omega(x')}{|x-y|^n} \right| + |\Omega(x')| \left| \frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n} \right|.
\end{aligned}$$

Integramos sobre $\{|x| > 2|y|\}$. Usando la condición de Dini para Ω, e integrando en coordenadas polares obtenemos para el primer sumando

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>2|y|} \left| \frac{\Omega((x-y)') - \Omega(x')}{|x-y|^n} \right| dx &\leq \int_{|x|>2|y|} \frac{\omega_\infty\left(4|y|/|x|\right)}{\left(|x|/2\right)^n} dx \\
&= 2^n |S^{n-1}| \int_0^2 \frac{\omega_\infty(t)}{t} dt \leq c,
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $|(x-y)' - x'| \leq \frac{4|y|}{|x|}$.

Por otro lado, el segundo sumando está acotado por estarlo Ω. Efectivamente, se tiene

$$|\Omega(x')| \left| \frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|x|^n} \right| \leq c \frac{|y|}{|x|^{n+1}},$$

de donde integrando en $\{|x| > 2|y|\}$, se obtiene

$$\int_{\{|x|>2|y|\}} \frac{|y|}{|x|^{n+1}} dx \leq c.$$

$\square$

5.2. Un caso particular de integrales singulares

Nuestro propósito es estudiar las acotaciones de las integrales singulares. Hemos empezado nuestro estudio con los operadores dados por convolución . En este caso observamos que por la condición $a)$ de la Definición 5.1.1 y por el Teorema 2.6.10 (Plancherel), se obtiene

$$||Tf||_2 \leq ||\hat{K}||_\infty ||f||_2, \tag{5.6}$$

es decir, podemos extender T a un operador acotado de L^2. Sin embargo, obtener otras estimaciones es un trabajo que requiere algunas herramientas más. Además, es conveniente empezar con el estudio de las integrales singulares con núcleo asociado $K_\Omega(y) = \frac{\Omega(y')}{|y|^n}$ para poder llegar a generalizar para todo núcleo K que cumple las propiedades $a)$ y $b)$ de la Definición 5.1.1.

PROPOSICIÓN 5.2.1. *La media nula de Ω sobre S^{n-1} es necesaria para la existencia del límite* (5.4)*.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de manera que $f(x) = 1$ en $\bar{B}(0,2)$. Suponiendo $|x| \leq 1$, podemos expresar (5.4) como

$$Tf(x) = \int_{|y|>1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)dy + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|y|<1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} dy,$$

de donde mientras la primera integral converge, para la segunda obtenemos, en coordenadas polares y usando el Teorema de Fubini, el siguiente

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|y|<1} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \int_{S^{n-1}} \frac{\Omega(y')}{r^n} r^{n-1} d\sigma(y) dr \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S^{n-1}} \Omega(y') \int_\varepsilon^1 \frac{1}{r} dr d\sigma(y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \log\frac{1}{\varepsilon} \int_{S^{n-1}} \Omega(y'), \end{aligned}$$

que es finito sólo si Ω es de media nula. □

Ahora vamos a calcular la transformada de Fourier de K_Ω y a continuación buscaremos condiciones para que esté acotada de manera que se cumpla $a)$ de la Definición 5.1.1. Tendremos entonces, por la relación (5.6), la extensión del operador T en L^2.

DEFINICIÓN 5.2.2. Una función f es *homogénea de grado a* si

$$f(\lambda x) = \lambda^a f(x), \tag{5.7}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$.

OBSERVACIÓN 5.2.3. Si ϕ es una función de manera que la siguiente integral sea finita, y sea $\phi(\lambda) = \lambda^{-n}\phi(\lambda^{-1}x)$, entonces se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_\lambda(x)dx = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx.$$

Por la Observación 5.2.3 surge la siguiente definición:

Definición 5.2.4. Una distribución T es *homogénea de grado a* si para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se satisface

$$T(\phi_\lambda) = \lambda^a T(\phi). \tag{5.8}$$

Observación 5.2.5. La distribución dada por (5.4) es homogénea de grado $-n$. En efecto, este resultado se obtiene haciendo un simple cambio de variables.

Proposición 5.2.6. *Si T es una distribución temperada homogénea de grado a, su transformada de Fourier es una distribución homogénea de grado $-n-a$.*

Demostración. Sea T el operador de grado $a > 0$, es decir,

$$T(\phi_\lambda) = \lambda^a T(\phi), \tag{5.9}$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Queremos ver que $\mathcal{F}(T)(\phi_\lambda) = \lambda^{-n-a}\mathcal{F}(T)(\phi)$. Sea $\lambda^{-1} = \mu$, entonces se tiene por la Definición 2.6.7 y la propiedad 5 de la Sección 2.6

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(T)(\phi_\lambda) &= T\mathcal{F}(\phi_\lambda) = T\mathcal{F}(\lambda^{-n}\phi(\lambda^{-1}x)) = \mu^n T(\mathcal{F}\phi(\mu x))\\ &= \mu^n T\mathcal{F}(\phi_\mu) = \mu^{n+a}T\mathcal{F}(\phi) = \lambda^{-n-a}\mathcal{F}(T)\phi.\end{aligned}$$

□

Observación 5.2.7. Podemos usar la Proposición 5.2.6 para calcular la transformada de Fourier de la función $f(x) = |x|^{-a}$ para $\frac{n}{2} < a < n$. Efectivamente, f se descompone en una función $f_1 \in L^1$ y $f_2 \in L^2$, es decir $f_1 = f\chi_{\{|x|<1\}}$ y $f_2 = f\chi_{\{|x|\geq 1\}}$. Así, la transfomada de Fourier de f es una función que pertenece en el espacio vectorial $L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Usando la Proposición 5.2.6, $\hat{f}$ es homogénea de grado $-n+a$, es decir $\hat{f}(x) = c_{a,n}|x|^{a-n}$. Falta calcular los $c_{a,n}$. Sea $\phi(x) = e^{-\pi|x|^2}$. Por el Lema 2.6.4 se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}|x|^{-a}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}(e^{-\pi|x|^2})|x|^{-a}dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}\mathcal{F}(|x|^{-a})dx\\ &= c_{a,n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}|x|^{a-n}dx.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^b dr = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+b}{2}\right),$$

y usando coordenadas polares en (5.10) se tiene

$$c_{a,n} = \frac{\pi^{a-n/2}\Gamma((n-a)/2)}{\Gamma(a/2)}.$$

Teorema 5.2.8. *Sea Ω una función de media nula en S^{n-1}. La transformada de Fourier de* v.p.$\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$ *es la función homogénea de grado 0*

$$m(\xi) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u)\left[\log\frac{1}{|u\cdot\xi|} - i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(u\cdot\xi)\right]d\sigma(u). \tag{5.11}$$

Demostración. Sea $T=$ v.p.$\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$. Vamos a calcular la transformada de Fourier de esta distribución, es decir $\hat{T}(\phi)$, donde $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Se tiene, por la Definición 2.6.7 y por el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\hat{T}(\phi) = T(\hat{\phi}) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<1/\varepsilon}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}\hat{\phi}(y)dy\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<1/\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}\phi(\xi)e^{-2\pi y\cdot\xi}d\xi dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\phi(\xi)\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<1/\varepsilon}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}e^{-2\pi y\cdot\xi}dy\right]d\xi.\end{aligned}$$

Basta ver que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<1/\varepsilon}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}e^{-2\pi y\cdot\xi}dy = m(\xi)$ por lo que $\hat{T}(\phi)=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(\xi)m(\xi)d\xi$, es decir $\hat{T}=m(\xi)$. Teniendo en cuenta la media nula de Ω se tiene

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|<1/\varepsilon}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}e^{-2\pi i y\cdot\xi}dy\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left[\int_\varepsilon^1 (e^{-2\pi i r u\cdot\xi}-1)\frac{dr}{r} + \int_1^{1/\varepsilon} e^{-2\pi r u\cdot\xi}\frac{dr}{r}\right]d\sigma(u)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)(A+Bi)d\sigma(u),\end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula (2.2) (Euler) y

$$\begin{aligned}A &= \int_\varepsilon^1(\cos 2\pi r(u\cdot\xi)-1)\frac{dr}{r} + \int_{1/\varepsilon}^1 \cos 2\pi r(u\cdot\xi)\frac{dr}{r},\\ B &= \int_\varepsilon^{1/\varepsilon}\sin 2\pi r(u\cdot\xi)\frac{dr}{r}.\end{aligned}$$

Se puede calcular, haciendo un cambio de variables, que A tiende a $\log\frac{1}{u\cdot\xi}$ cuando $\varepsilon\to 0$ y B tiende a $\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(u\cdot\xi)$. Por lo tanto, usando el Teorema 1.1.4 (Convergencia

Dominada) se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S^{n-1}}\Omega(u)(A+Bi)d\sigma(u) &= \int_{S^{n-1}}\Omega(u)\left[\log\frac{1}{|u\cdot\xi|}-i\frac{\pi}{2}\text{sgn}(u\cdot\xi)\right]d\sigma(u)\\ &= m(\xi).\end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 5.2.9. Observamos que sólo en el caso que Ω es impar, $m(\xi)$ está acotada, puesto que el producto de una función impar por una función par como es $\log\frac{1}{|\xi\cdot u|}$, es una función impar y este producto será de media nula sobre S^{n-1}. Por lo tanto, hasta ahora sabemos que sólo las integrales singulares con Ω impar se pueden extender sobre funciones de L^2 ya que $||Tf||_2\leq ||\hat{K}_\Omega||_\infty ||f||_2$.

OBSERVACIÓN 5.2.10. Dada una función Ω en S^{n-1} se puede descomponer en sus partes par e impar

$$\Omega_p(u)=\frac{1}{2}(\Omega(u)+\Omega(-u)),\quad \Omega_i(u)=\frac{1}{2}(\Omega(u)-\Omega(-u)).$$

COROLARIO 5.2.11. *Sea Ω de manera que $\Omega_i(u)\in L^1(S^{n-1})$ y $\Omega_p(u)\in L^q(S^{n-1})$ para algún $q>1$. Entonces la transformada de Fourier de* v.p.$\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$ *está acotada.*

Demostración. Teniendo en cuenta el Teorema 5.2.8 y utilizando la observación anterior, se tiene

$$\begin{aligned}m(\xi)=&\int_{S^{n-1}}(\Omega_i(u))\left[\log\frac{1}{|u\cdot\xi|}-i\frac{\pi}{2}\text{sgn}(u\cdot\xi)\right]d\sigma(u)\\ &+\int_{S^{n-1}}(\Omega_p(u))\left[\log\frac{1}{|u\cdot\xi|}-i\frac{\pi}{2}\text{sgn}(u\cdot\xi)\right]d\sigma(u).\end{aligned}$$

La primera integral es finita por la Observación 5.2.9, mientras que la segunda podemos acotarla usando la desigualdad de Hölder, por lo que se tiene $\Omega_p(u)\in L^q(S^{n-1})$, con $q>1$. □

OBSERVACIÓN 5.2.12. En el teorema anterior la condición $\Omega_p(u)\in L^q(S^{n-1})$ se puede sustituir por una condición más débil

$$\Omega_p\in L\log^+ L(S^{n-1}),$$

donde

$$L \log^+ L(S^{n-1}) = \left\{ f : \int_{S^{n-1}} |f(u)| \log^+ |f(u)| d\sigma(u) < \infty \right\}$$

y $\log^+ t = \max(0, \log t)$. Efectivamente, veremos la acotación de

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(u) \log \frac{1}{|u \cdot \xi|} d\sigma(u) = \int_D \Omega(u) \log \frac{1}{|u \cdot \xi|} d\sigma(u) + \int_{D^c} \Omega(u) \log \frac{1}{|u \cdot \xi|} d\sigma(u), \tag{5.12}$$

donde $D = \{u \in S^{n-1} : |\Omega(u)| \geq 1\}$. La primera integral es finita ya que por la desigualdad

$$ab \leq a \log a + e^b, \quad a \geq 1, b \geq 0,$$

se deduce, considerando $a = \Omega(u)$ y $b = \log \frac{1}{|u \cdot \xi|}$,

$$\left| \int_D \Omega(u) \log \frac{1}{|u \cdot \xi|} d\sigma(u) \right| \leq \int_D |\Omega(u)| \log \Omega(u) | d\sigma(u) + \int_D |u \cdot \xi|^{-\frac{1}{2}} d\sigma(u).$$

La segunda integral de (5.12) es finita puesto que Ω está acotada.

5.3. Método de Rotaciones

En esta sección introducimos el Método de Rotaciones que nos servirá para probar la acotación del operador T dado por (5.4) en los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$. Más aún, probaremos la existencia del límite puntual del dicho operador.

Observación 5.3.1. Sea T un operador unidimensional acotado de $L^p(\mathbb{R})$ y sea $u \in S^{n-1}$. Consideramos $M_u = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\}$ y sea $M_u^\perp$ su subespacio ortogonal en $\mathbb{R}^n$. Entonces, cada $x \in \mathbb{R}^n$ se puede expresar de manera única como $x = \lambda u + \bar{x}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in M_u^\perp$.

Definición 5.3.2. Teniendo en cuenta las condiciones de la observación anterior, se definen los *operadores direccionales* de T como

$$T_u f(x) = T f(\cdot u + \bar{x})(\lambda), \tag{5.13}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

Observamos que mientras el operador T es unidimensional, los operadores T_u son n-dimensionales. Lo que intetaremos hacer es, demostrar que ciertas propiedades del operador T se heredan a los T_u. Para ser más precisos, veremos que las integrales singulares $n-$dimensionales se expresan mediante algunos operadores direccionales relacionados con la transformada de Hilbert. Así veremos que, desigualdades que cumple la transformada de Hilbert, las cumplen los operadores direccionados asociados a ésta, y a continuación las integrales singulares. Por lo tanto empezamos definiendo ciertos operadores direccionales.

Definición 5.3.3. Se definen las *transformadas de Hilbert direccionales* como

$$H_u f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\lambda|>\varepsilon} f(x-\lambda u) \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{5.14}$$

Proposición 5.3.4. *En las condiciones de la Observación* 5.3.1*, el operador n-dimensional T_u está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea $f(\cdot u + \bar{x}) = f_u(\lambda)$. Teniendo en cuenta la acotación del operador T en $L^p(\mathbb{R})$ se tiene

$$\begin{aligned} ||T_u f||_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |T_u f(x)|^p dx = \int_{M_u^\perp} \int_{M_u} |T f_u(\lambda)|^p d\lambda d\bar{x} \\ &\leq \int_{M_u^\perp} ||T f_u||_p^p d\bar{x} \leq c \int_{M_u^\perp} ||T||^p ||f_u||_p^p d\bar{x} \\ &= c||T||^p \int_{M_u^\perp} \int_{\mathbb{R}} |f_u(\lambda)|^p d\lambda d\bar{x} \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |f_u(\lambda)|^p d\lambda d\bar{x} = c||f||^p. \end{aligned}$$

□

Proposición 5.3.5. *Sea T un operador unidimensional definido en $L^p(\mathbb{R})$ y sea $\Omega \in L^1(S^{n-1})$. Sean T_u los operadores direccionales asociados a T. Entonces el operador*

$$T_\Omega f(x) = \int_{S^{n-1}} \Omega(u) T_u f(x) d\sigma(u) \tag{5.15}$$

está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Usando la desigualdad integral de Minkowski obtenemos

$$\begin{aligned}||T_\Omega f||_p &= \left|\left|\int_{S^{n-1}} \Omega(u) T_u f(x) d\sigma(u)\right|\right|_p \leq \int_{S^{n-1}} ||\Omega(u)\cdot T_u f||_p d\sigma(u) \\ &\leq \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| ||T_u f(x)||_p \, d\sigma(u) \leq c||f||_p,\end{aligned}$$

teniendo en cuenta la Proposición 5.3.4. □

Observación 5.3.6. El operador T dado por (5.4), con Ω impar se puede expresar en relación con los T_u, que en este caso serían las transformadas de Hilbert direccionales. Efectivamente, usando las coordenadas polares se obtiene

$$\begin{aligned}Tf(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \int_\varepsilon^\infty f(x-ru)\frac{dr}{r} d\sigma(u) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \Omega(u) \int_{|r|>\varepsilon} f(x-ru)\frac{dr}{r} d\sigma(u) \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{S^{n-1}} \Omega(u) H_u f(x) d\sigma(u),\end{aligned}$$

por lo que se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 5.3.7. *Sea $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ una función impar de media nula. Entonces el operador T definido por (5.4) está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$.*

Observación 5.3.8. Usando el corolario anterior, podemos extender las integrales singulares dadas por (5.4) sobre funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$, pero todavía no hemos probado que el límite existe puntualmente. Por esto, introducimos el operador maximal asociado a la integral singular T^*, dado por

$$T^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y) dy \right|. \tag{5.16}$$

Se puede ver que T^* cumple la desigualdad (p,p)-fuerte. En efecto, dicha desigualdad se deduce de la siguiente expresión

$$T^* f(x) \leq \frac{\pi}{2} \int_{S^{n-1}} |\Omega(u)| H_u^* f(x) d\sigma(u),$$

teniendo en cuenta la Proposición 5.3.4 y el Teorema 4.3.5. Por lo tanto, T^* cumple las condiciones del Teorema 3.3.6, de donde se obtiene la existencia en "casi todo punto" del límite (5.4).

5.4. Transformadas de Riesz

Para estudiar las integarles singulares hemos empezado con la transformada de Hilbert (Capítulo 4). Al principio de este capítulo definimos la clase de las integrales singulares que son convolución de un núcleo K que cumple ciertas propiedades, con una función de la clase de Schwarz. Además, hemos visto algunos resultados en el caso que $K = K_\Omega$, de donde con $\Omega(y') = \frac{1}{\pi}\mathrm{sgn}(y)$ se recuperaba la transformada de Hilbert. En esta sección veremos otro ejemplo de las integrales singulares con núcleo K_Ω; definiremos y estudiaremos las transformadas de Riesz. Veremos que estas transformadas son el análogo de la transformada de Hilbert en el caso $n-$dimensional.

Definición 5.4.1. Sea $1 \leq j \leq n$. Se define la *j-ésima transformada de Riesz como*

$$R_j f(x) = c_n \mathrm{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)dy, \tag{5.17}$$

con $c_n = \Gamma(\frac{n+1}{2})\pi^{-\frac{n+1}{2}}$, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Observación 5.4.2. Considerando $n = 1$ en la definición anterior, se puede recuperar la transformada de Hilbert.

Observación 5.4.3. La integral (5.17) tiene sentido incluso para funciones integrables que cumplen una condición Lipshitziana. Para más detalles véase [Gr].

La siguiente proposición explica por qué la constante c_n está elegida de esta manera.

Proposición 5.4.4. *Se tiene*

$$\mathcal{F}(R_j(f))(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}(f)(\xi). \tag{5.18}$$

Demostración. Por la propia definición de las transformadas de Riesz podemos escribir $R_j f(x) = R_j * f(x)$. Para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\langle R_j, \phi\rangle = \left\langle \mathrm{v.p}\frac{x_j}{|x|^{n+1}}, \phi \right\rangle = \frac{1}{1-n}\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}|x|^{-n+1}, \phi \right\rangle. \tag{5.19}$$

Tomando las transformadas de Fourier en ambos lados de (5.19) y usando la sexta propiedad de la transformada de Fourier (Sección 2.6) se tiene

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(R_j), \phi \rangle &= \frac{1}{1-n} \left\langle \mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x_j} |x|^{-n+1}), \phi \right\rangle \\ &= \frac{2\pi i \xi_j}{1-n} \left\langle \mathcal{F}(|x|^{-n+1}), \phi \right\rangle \\ &= -i \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \frac{\xi_j}{|\xi|} \left\langle \frac{\xi_j}{|\xi|}, \phi \right\rangle,\end{aligned}$$

donde hemos usado la la Observación 5.2.7. En efecto, $n/2 < a = n-1 < n$ y

$$\mathcal{F}(|x|^{-a}) = c_{a,n} |x|^{a-n}. \tag{5.20}$$

En el caso que $n = 2$, es decir, a tiende a $n/2$, se puede utilizar de nuevo (5.20), puesto que la transformada de Fourier es una aplicación continua. Se tiene

$$\mathcal{F}(R_j f)(\xi) = \mathcal{F}(R_j * f)(\xi) = \mathcal{F}(R_j)\mathcal{F}(f)(\xi) = -i \frac{\xi_j}{|\xi|} \mathcal{F}(f)(\xi).$$

□

Corolario 5.4.5. *Se tiene*

$$\sum_{j=1}^{n} R_j^2 = -I. \tag{5.21}$$

Demostración. Se demuestra utilizando la Proposición 5.4.4 y el Teorema 2.6.10 (Plancherel). □

5.5. Integrales singulares con núcleo par

Seguimos estudiando el caso paticular de las integrales singulares con núcleo $K = K_\Omega$. Por el Método de Rotaciones, cuando Ω es impar, obtuvimos dos resultados; primero, definir el operador T dado por (5.4) puntualmente, y segundo, obtener una acotación (p,p)-fuerte (Corolario 5.3.7), con $1 < p < \infty$. En esta sección generalizamos estos resultados para todo Ω par o impar. Empezamos considerando Ω una función par. Entonces, utilizando la relación (5.21) se obtiene

$$Tf = -\sum_{j=1}^{n} R_j^2 (Tf) = -\sum_{j=1}^{n} R_j (R_j T) f, \tag{5.22}$$

donde R_jT debería tener núcleo impar ya que se descompone una función impar y otra par. El problema consiste en demostrar que este operador admite una representación puntual y a continuación, con una serie de lemas, probaremos las acotaciones (p,p)-fuertes del operador (5.4), con $1 < p < \infty$.

OBSERVACIÓN 5.5.1. Sea

$$K_\varepsilon(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^n}\chi_{\{|x|>\varepsilon\}}, \tag{5.23}$$

donde $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ con $q > 1$, entonces se obtiene para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto

$$R_j(K_\varepsilon * f) = (R_jK_\varepsilon) * f. \tag{5.24}$$

Efectivamente, basta observar que $K_\varepsilon \in L^r(\mathbb{R}^n)$, con $1 < r \leq q$ y tomar transformadas de Fourier a ambos lados.

Usando la Observación 5.5.1 podemos expresar el operador T, con núcleo K_Ω dado por (5.4) como

$$Tf = -\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^n R_j[(R_jK_\varepsilon) * f]. \tag{5.25}$$

LEMA 5.5.2. *En las condiciones de la Observación* 5.5.1*, existe* $\tilde{K}_j(x)$ *impar, homogénea de grado* $-n$ *tal que* $\lim_{\varepsilon\to 0} R_jK_\varepsilon(x) = \tilde{K}_j(x)$ *uniformemente sobre todo compacto que no contiene al origen.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ de manera que $0 < \delta < \varepsilon < \eta < |x|/2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
R_jK_\varepsilon(x) - R_jK_\eta(x) &= \lim_{\delta\to 0} c_n \int_{|x-y|>\delta} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}[K_\varepsilon(y) - K_\eta(y)]dy \\
&= c_n \int_{\varepsilon<|y|<\eta} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}dy \\
&= c_n \int_{\varepsilon<|y|<\eta} \left[\frac{x_j - y_j}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_j}{|x|^{n+1}}\right]\frac{\Omega(y')}{|y|^n}dy,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la media nula de Ω. Aplicando el Teorema de Valor Medio y la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned}
|R_jK_\varepsilon(x) - R_jK_\eta(x)| &\leq \frac{c}{|x|^{n+1}} \int_{\varepsilon<|y|<\eta} \frac{\Omega(y')}{|y|^n}dy \\
&\leq \frac{c}{|x|^{n+1}}||\Omega||_1 \sup_{\varepsilon<|y|<\eta}\left\{\frac{1}{|y|^{n-1}}\right\} \qquad (5.26) \\
&\leq \frac{c}{|x|^{n+1}}||\Omega||_1\eta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{R_jK_\varepsilon(x)\}$ es una sucesión de Cauchy de $\mathbb{R}^n$ y por ser $\mathbb{R}^n$ completo con su norma usual, la sucesión esta es convergente, además uniformemente en $|x| > 2\eta$. Sea $\lim_{\varepsilon\to 0} R_jK_\varepsilon(x) = \tilde{K}_j(x)$ que es impar y homogénea de grado $-n$ por serlo R_jK_ε. $\square$

Observación 5.5.3. Observamos que la existencia del límite puntual en el lema anterior nos permite obtener la existencia del límite puntual del operador T dado por (5.4) cuando Ω es par, algo que no pudimos obtener por el Método de las Rotaciones. Efectivamente, la existencia del $\tilde{K}_j$, impar, usando la transformada de Riesz R_j sobre éste y tomando sumas sobre $j = 1, \dots, n$ nos define el operador T dado por (5.4) puntualmente. Es decir,

$$\begin{aligned} Tf(x) &= -\sum_{j=1}^n R_j(R_jT)f(x) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^n R_j(R_jK_\varepsilon) * f(x) \\ &= -\sum_{j=1}^n R_j \lim_{\varepsilon\to 0}(R_jK_\varepsilon) * f(x) = -\sum_{j=1}^n \tilde{K}_j * f(x), \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que las sumas son finitas.

Lema 5.5.4. *El núcleo $\tilde{K}_j$ definido en el Lema 5.5.2 verifica*

$$\int_{S^{n-1}} |\tilde{K}_j(x')| d\sigma(x') \leq c_q ||\Omega||_q. \tag{5.27}$$

Además, si $\tilde{K}_{j,\varepsilon}(x) = \tilde{K}_j(x)\chi_{\{|x|>\varepsilon\}}$ entonces,

$$\Delta_\varepsilon := R_jK_\varepsilon - \tilde{K}_{j,\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

$$||\Delta_\varepsilon||_1 \leq ||\Omega||_q. \tag{5.28}$$

Demostración. Por ser $\tilde{K}_j$ homogénea de grado n, es decir

$$\tilde{K}_j(x') = \tilde{K}_j\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^n \tilde{K}_j(x),$$

se tiene usando las coordenadas polares y el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \int_{1<|x|<2} \tilde{K}_j(x)dx &= \int_{1<|x|<2} |x|^{-n}\tilde{K}_j(x')dx \\ &= \int_1^2 \int_{S^{n-1}} \frac{\tilde{K}_j(x')}{r^n} r^{n-1} d\sigma(x')dr \\ &= \log 2 \int_{S^{n-1}} \tilde{K}_j(x')d\sigma(x'). \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} |\tilde{K}_j(x')| d\sigma(x') &= \log\frac{1}{2}\int_{1<|x|<2} |\tilde{K}_j(x')|dx \\ &\le \log\frac{1}{2}\int_{1<|x|<2} (|\tilde{K}_j(x) - R_jK_{1/2}(x)| + |R_jK_{1/2}(x)|)dx.\end{aligned} \tag{5.29}$$

Se tiene para $|x|>1, \eta = 1/2$, usando (5.26) y tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$

$$|\tilde{K}_j(x) - R_jK_{1/2}(x)| \le c\frac{||\Omega||_1}{|x|^{n+1}},$$

de donde integrando en $\{1<|x|<2\}$ y usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\int_{1<|x|<2} |\tilde{K}_j(x) - R_jK_{1/2}(x)|dx \le c||\Omega||_q, \tag{5.30}$$

donde $q>1$. Para ver (5.27), falta acotar $\int_{1<|x|<2} |R_jK_{1/2}(x)|dx$ por $||\Omega||_q$, que se obtiene usando de nuevo la desigualdad de Hölder, es decir

$$\int_{1<|x|<2} |R_jK_{1/2}(x)|dx \le c||R_jK_{1/2}||_q \le c||K_{1/2}||_q \le c||\Omega||_q.$$

Si probamos que $||\Delta_1||_1 < \infty$, observando que $\Delta_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\Delta_1(\varepsilon^{-1}x)$, la relación (5.28) queda demostrada. Se tiene

$$\begin{aligned}||\Delta||_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |R_jK_1(x) - \tilde{K}_{j,1}(x)|dx \\ &\le \int_{|x|\le 2} |R_jK_1(x)|dx + \int_{1\le|x|\le 2} |\tilde{K}_j(x)|dx + \int_{|x|\ge 2} |\Delta_1(x)|dx.\end{aligned} \tag{5.31}$$

La primera integral de (5.31), usando la desigualdad de Hölder, se puede acotar por $||R_jK_1||_q \le c||\Omega||_q$, puesto que $||K_1||_q \le c||\Omega||_q$, de nuevo por la desigualdad de Hölder. Para la segunda integral hacemos el mismo razonamiento que en (5.29) y (5.30). La tercera integral está bien definida ya que integramos fuera del cero. □

Teorema 5.5.5. *Sea Ω una función definida en S^{n-1} de media nula tal que su parte impar está en $L^1(S^{n-1})$ y su parte par en $L^q(S^{n-1})$ para algún $q>1$. Entonces, la integral singular dada por (5.4) está acotada en $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1<p<\infty$.*

Demostración. En el caso que Ω es impar, el resultado se obtiene por el Corolario 5.3.7. Por tanto, sea Ω par. El operador T dado por (5.4) se expresa como en (5.25), es decir

$$Tf = -\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{n} R_j[(R_jK_\varepsilon) * f].$$

Veremos que $\sum_{j=1}^{n} R_j[(R_jK_\varepsilon) * f]$ está acotado e independiente de ε. Teniendo en cuenta el Lema 5.5.4 escribimos

$$(R_jK_\varepsilon) * f = (\Delta_\varepsilon + \tilde{K}_{j,\varepsilon}) * f.$$

Para cada uno de los sumandos obtenemos las siguientes acotaciones. Por un lado se tiene

$$||\Delta_\varepsilon * f||_p \leq c||\Delta_\varepsilon||_1||f||_p \leq ||\Omega||_q||f||_p.$$

Por otro lado usando el Corolario 5.3.7, puesto que $\tilde{K}_j$ es impar se tiene

$$\begin{aligned} ||\tilde{K}_{j,\varepsilon} * f|| &\leq c||\tilde{K}_{j,\varepsilon}||_1||f||_p \\ &= c\int_{|x|>\varepsilon} |\tilde{K}_j(x)|dx||f||_p \\ &= c||\Omega||_q||f||_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la acotación de R_j en la norma $||\cdot||_p$, obtenemos por la Desigualdad Integral de Minkowski y teniendo en cuenta que las sumas son finitas, lo siguiente

$$\begin{aligned} ||K_\varepsilon * f||_p &= \left|\left|\sum_{j=1}^{n} R_j[(R_jK_\varepsilon) * f]\right|\right|_p \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} ||R_j[(R_jK_\varepsilon) * f]||_p \leq c||f||_p, \end{aligned}$$

que es independiente de ε. Por lo tanto tomando límite cuando ε tiende hacia 0, se obtiene

$$||Tf||_p \leq c||f||_p,$$

con $1 < p < \infty$. □

5.6. El Teorema de Calderón-Zygmund

Teniendo en cuenta el Teorema 5.5.5 y siguiendo la línea del estudio de la transformada de Hilbert, nos preguntamos si el operador T dado por (5.4) cumple la desigualdad $(1, 1)$-débil. La respuesta es afirmativa. Para verlo probaremos el Teorema de Calderón-Zygmund que no sólo verifica la desigualdad (1,1)-débil para el operador T con núcleo K_Ω, sino para toda integral singular T que viene dada por convolución (5.3). Además el mismo teorema nos permite extender T sobre toda función de $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$.

Teorema 5.6.1. *(Calderón-Zygmund). Sea T una integral singular, dada por (5.3) y K el núcleo asociado. Entonces,*

$$|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda}||f||_1, \tag{5.32}$$

$$||Tf||_p \leq c_p||f||_p, \quad 1 < p < \infty, \tag{5.33}$$

es decir, se cumplen la desigualdad (1,1)-débil y (p,p)-fuerte, respectivamente.

Demostración. Primero veamos la desigualdad (1,1)-débil. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ y sea $\lambda > 0$. Hacemos la descomposición de Calderón-Zygmund a la altura λ como en el Teorema 4.2.7 (Kolmogorov). Denotamos $\{Q_j\}$ la sucesión de cubos que obtenemos por el Teorema 3.4.7 (Descomposición de Calderón-Zygmund) y Q_j^* su padre. Sea $\Omega = \bigcup_j Q_j$, denotaremos $\Omega^* = \bigcup_j Q_j^*$. Descomponemos $f = g + h$, donde g, h se definen como en la demostración del Teorema 4.2.7, considerando en vez de los intervalos I_j los cubos diádicos Q_j. Se tiene entonces,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : |Tg(x)| > \lambda/2\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |Th(x)| > \lambda/2\}|,$$

de donde, usando la desigualdad de Chebychev, se obtiene la acotación

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tg(x)| > \lambda/2\}| \leq \frac{c}{\lambda}||f||_1.$$

Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |Th(x)| > \lambda/2\}| &\leq |\Omega^*| + |\{x \notin \Omega^* : |Th(x)| > \lambda/2\}| \\ &= \frac{c}{\lambda}||f||_1 + \frac{c}{\lambda}\int_{(\Omega^*)^c} |Th(x)|dx, \end{aligned}$$

por lo que si vemos que $\int_{(\Omega^*)^c} |Th(x)|dx \leq c||f||_1$, la acotación (1,1)-débil queda demostrada. Se tiene,

$$\begin{aligned} \int_{(\Omega^*)^c} |Th(x)|dx &\leq \int_{(\Omega^*)^c} \sum_{j=1}^{n} |Th_j(x)|dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{(\Omega^*)^c} |Th_j(x)|dx. \end{aligned}$$

Por la condición (5.2) (Hörmander) podemos expresar Th_j de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Th_j(x) &= \int_{Q_j} K(x-y)h_j(y)dy \\ &= \int_{Q_j} [K(x-y) - K(x-c_j)]h_j(y)dy, \end{aligned}$$

donde c_j es el centro de Q_j y hemos usado la media nula de h_j. Por el Teorema de Fubini obtenemos

$$\int_{(\Omega^*)^c} |Th_j(x)|dx \leq \int_{Q_j} |h_j(y)| \left(\int_{(Q_j^*)^c} |K(x-y) - K(x-c_j)|dx \right) dy \leq c||h_j||_1,$$

donde hemos usado de nuevo la media nula de h_j. Sumando en j obtenemos

$$\sum_j^n \int_{(\Omega^*)^c} |Th_j(x)|dx \leq c||f||_1.$$

La hipótesis b) de la Definición 5.1.1 nos permite extender el operador T sobre funciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$, es decir se obtiene la desigualdad (2,2)-fuerte. Usando el Teorema 1.2.11 (Marcinkiewicz) obtenemos la desigualdad (p,p)-fuerte para $1 < p \leq 2$. Para $p > 2$ usamos la dualidad, teniendo en cuenta que el núcleo asociado al operador adjunto T^* es $K^*(x) = K(-x)$ por lo que se satisfacen a) y b) de la Definición 5.1.1. □

Hasta ahora, todos los resultados que hemos obtenido están basados en la condición $\hat{K} \in L^\infty$. Por ejemplo, la acotación (p,p)-fuerte del operador T, que acabamos de ver. A continuación buscaremos condiciones sobre la distribución K, equivalentes al $\hat{K} \in L^\infty$.

Definición 5.6.2. Se definen los *núcleos truncados* como

$$K_{\varepsilon,R}(x) := K(x)\chi_{\{\varepsilon<|x|<R\}}(x),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 5.6.3. *Sea* $K \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *tal que*

$$\left| \int_{a<|x|<b} K(x)dx \right| \leq c_1 \quad 0 \leq a \leq b; \tag{5.34}$$

$$\int_{a<|x|<2a} |K(x)|dx \leq c_2 \quad a > 0; \tag{5.35}$$

$$\int_{|x|>2y} |K(x-y) - K(x)|dx \leq c \quad \textit{para todo } y \in \mathbb{R}^n. \tag{5.36}$$

Entonces $|\hat{K}_{\varepsilon,R}(\xi)| \leq c$, *independiente de* ε *y* R.

Observación 5.6.4. La hipótesis (5.35) equivale a

$$\int_{|x|<a} |x||K(x)|dx \leq ca, \tag{5.37}$$

con $a > 0$. En efecto, si se satisface (5.35), entonces se tiene

$$\int_{|x|<a} |x||K(x)|dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}a<|x|<2^{-k}a} |x||K(x)|dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} c_2 = ca,$$

teniendo en cuenta que $\sup_{2^{-k-1}a<|x|<2^{-k}a} |x| < 2^{-k}a$. Por otro lado, si se satisface (5.37), entonces

$$\int_{a<|x|<2a} |K(x)|dx \leq \int_{a<|x|<2a} \frac{|x|}{a}|K(x)|dx \leq \int_{|x|<2a} \frac{|x|}{a}|K(x)|dx = 2c = c_2,$$

teniendo en cuenta que $\frac{|x|}{a} > 1$, por lo que se obtiene la primera desigualdad.

Demostración. Sea ξ fijo, entonces

$$\begin{aligned} \hat{K}_{\varepsilon,R}(\xi) &= \int_{\varepsilon<|x|<R} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\ &= \int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx + \int_{|\xi|^{-1}<|x|<R} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx. \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} A &:= \int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \\ B &:= \int_{|\xi|^{-1}<|x|<R} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Sumando y restando $\int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}}$, A se puede expresar de la siguiente manera

$$A = \int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)dx + \int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)(e^{-2\pi i x\cdot\xi} - 1)dx.$$

Teniendo en cuenta $|e^{i\theta}-1| \le c|\theta|$, con $|\theta| \le 2\pi$ se obtiene

$$\begin{aligned}
|A| &= \left| \int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)dx + \int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)(e^{-2\pi i x\cdot\xi}-1)dx \right| \\
&\le \left| \int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)dx \right| + \int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}} |K(x)||e^{-2\pi i x\cdot\xi}-1|dx \\
&\le \left| \int_{\varepsilon<|x|<|\xi|^{-1}} K(x)dx \right| + c2\pi|\xi| \int_{|x|<|\xi|^{-1}} |K(x)||x|dx,
\end{aligned}$$

de donde por (5.34) y la Observación 5.6.4 se tiene

$$|A| \le c(c_1+c_2).$$

Por otro lado, haciendo el cambio de variables x por $x-z$, donde $z=\frac{1}{2}\frac{\xi'}{|\xi|}$, B se convierte en

$$\begin{aligned}
B &= \int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<r} K(x-z)e^{-2\pi i(x-z)\cdot\xi}dx \\
&= -\int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<r} K(x-z)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

puesto que $e^{2\pi i z\cdot\xi}=-1$. Sumando en cada lado de (5.39) B dado por (5.38), obtenemos

$$\begin{aligned}
2|B| &= \left| \int_{|\xi|^{-1}<|x|<R} K(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx - \int_{|\xi|^{-1}<|x-z|<R} K(x-z)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \right| \\
&\le \int_{|\xi|^{-1}<|x|} |[K(x)-K(x-z)]e^{-2\pi i x\cdot\xi}|dx + \int_{\frac{1}{2}|\xi|^{-1}<|x|<\frac{3}{2}|\xi|^{-1}} |K(x)e^{-2\pi i x\cdot z}|dx \\
&\quad + \int_{R-\frac{1}{2}|\xi|^{-1}<|x|<R+\frac{3}{2}|\xi|^{-1}} |K(x)e^{-2\pi i x\cdot z}|dx,
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
2|B| \le & \int_{|\xi|^{-1}<|x|} |K(x)-K(x-z)|dx \\
& + \int_{\frac{1}{2}|\xi|^{-1}<|x|<\frac{3}{2}|\xi|^{-1}} |K(x)|dx \\
& + \int_{R-\frac{1}{2}|\xi|^{-1}<|x|<R+\frac{3}{2}|\xi|^{-1}} |K(x)|dx.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

La primera integral de (5.40) se acota por c, utilizando (5.36) y teniendo en cuenta que $|\xi|^{-1} < 2z$; mientras que la segunda y la tercera integral se acotan por $2c_2$, teniendo en cuenta que, al ser $|\xi|^{-1} < R$, se tiene $r+\frac{1}{2}|\xi|^{-1} < 3\left(R-\frac{1}{2}|\xi|^{-1}\right)$ y por lo tanto podemos usar la relación (5.35). $\square$

COROLARIO 5.6.5. *Si K satisface las hipótesis anteriores (5.34),(5.35) y (5.36), entonces se tienen*

$$||K_{\varepsilon,R} * f||_p \le c_p||f||_p, \quad 1 < p < \infty; \tag{5.41}$$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |K_{\varepsilon,R} * f| > \lambda\}| \le \frac{c}{\lambda}||f||_1. \tag{5.42}$$

Demostración. Para $p = 2$ la desigualdad (2,2)-fuerte se obtiene usando el Teorema 2.6.10 (Plancherel). Es decir

$$||K_{\varepsilon,R} * f||_2 = ||\widehat{K_{\varepsilon,R} * f}||_2 = ||\hat{K}_{\varepsilon,R}\hat{f}||_2 \le c||\hat{f}||_2 \le c||f||_2.$$

Para probar la desigualdad $(p,p)-$fuerte basta ver la desigualdad (1,1)-débil, porque el resto se obtiene por el Teorema de Marcinkiewicz para $p \le 2$ y por dualidad para $p > 2$. La desigualdad (1,1)-débil se demuestra usando la hipótesis de la Proposición 5.6.3 de donde se obtiene

$$\int_{|x|>2|y|} |K_{\varepsilon,R}(x-y) - K_{\varepsilon,R}(x)|dx \le c$$

es independiente de ε, R. En efecto,

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|>2|y|} |K_{\varepsilon,R}(x-y) - K_{\varepsilon,R}(x)|dx \\
&\quad = \int_{|x|>2|y|} |K(x-y)\chi_{\{\varepsilon<|x-y|<R\}} - K(x)\chi_{\{\varepsilon<|x|<R\}}|dx \\
&\quad \le \int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)||\chi_{\{\varepsilon<|x|<R\}}|dx \\
&\quad \le \int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)|dx \le c.
\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 5.6.6. *La distribución temperada* v.p.K *existe si y sólo si existe*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|x|<1} K(x)dx. \tag{5.43}$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que K existe. Sea $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de manera que sea indénticamente 1 en $B(0,1)$. Entonces tenemos la siguiente expresión

$$\text{v.p.}K(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|x|<1} K(x)dx + \int_{|x|>1} K(x)\phi(x)dx.$$

Puesto que la segunda integral existe siempre, debe existir la primera, es decir

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|x|<1} K(x)dx$$

converge.

($\Leftarrow$) Supongamos que la condición (5.43) se satisface. Entonces se tiene

$$\text{v.p.}K(\phi)=\int_{|x|<1} K(x)(\phi(x)-\phi(0))dx+\int_{|x|>1} K(x)\phi(x)dx.$$

La primera integral existe ya que

$$|\phi(x)-\phi(0)|\leq |x|||\nabla\phi||_\infty,$$

por lo que la distribución temperada K también existe. □

Observación 5.6.7. Observamos que si existe $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0<|x|<1} K(x)dx$ y se cumplen las condiciones de la Proposición 5.6.3, entonces por el Corolario 5.6.5 se obtiene el siguiente resultado: El operador T dado por

$$Tf(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon} K(y)f(x-y)dy$$

se puede extender en L^p, con $1<p<\infty$. Además, T es de tipo (1,1)-débil.

5.7. Operadores de Calderón-Zygmund generalizados

Hasta ahora hemos estudiado las integrales singulares dadas por convolución. El beneficio era la extensión de ellas en $L^2(\mathbb{R}^n)$ obtenida por la acotación de $\hat{K}$. En esta sección definiremos una clase de integrales singulares más generalizada para ver que la teoría de las integrales singulares de convolución se puede ampliar.

Definición 5.7.1. Sea $K:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Delta\to\mathbb{C}$, donde $\Delta=\{(x,x): x\in\mathbb{R}^n\}$ la diagonal de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Diremos que K es un *núcleo estándar* si existe δ tal que

$$|K(x,y)|\leq\frac{c}{|x-y|^n};\tag{5.44}$$

$$|K(x,y)-K(x,y')|\leq c\frac{|y-y'|}{|x-y|^{n+\delta}}\quad\text{si } |x-y|>2|y-y'|;\tag{5.45}$$

$$|K(x,y)-K(x',y)|\leq c\frac{|x-x'|}{|x-y|^{n+\delta}}\quad\text{si } |x-y|>2|x-x'|;\tag{5.46}$$

OBSERVACIÓN 5.7.2. Observamos que las 2 últimas condiciones de la definición anterior son del tipo Lipshitz.

DEFINICIÓN 5.7.3. Se define T como un *operador de Calderón-Zygmund generalizado* si

a) T está acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

b) Existe un núcleo estándar K tal que para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, de soporte compacto

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy$$

siempre que $x \notin \operatorname{sop} f$.

TEOREMA 5.7.4. *Sea T un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sea $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \to \mathbb{C}$, de manera que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, de soporte compacto, para $x \notin \operatorname{sop} f$, se define el operador*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy. \tag{5.47}$$

Si las condiciones siguientes

$$\int_{|x-y|>2|y-y'|} |K(x,y) - K(x,y')|dx \leq c \tag{5.48}$$

$$\int_{|x-y|>2|x-x'|} |K(x,y) - K(x',y)|dx \leq c \tag{5.49}$$

se satisfacen, entonces el operador T, dado por (5.47) cumple la desigualdad (1,1)-débil y (p,p)-fuerte con $1 < p < \infty$.

Las condiciones (5.48) y (5.49) se llamarán condiciones de Hörmander.

Demostración. Véase [M]. □

OBSERVACIÓN 5.7.5. El Teorema 5.7.4 implica que un operador de Calderón-Zygmund generalizado T, es de tipo (p,p)-fuerte y (1,1)-débil. En efecto, basta observar que si el núcleo K asociado al operador T es estándar, entonces cumple las condiciones de Hörmander.

Lo que queda por ver es la existencia del límite puntual del operador de Calderón-Zygmund T, dado por

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y)f(y)dy. \tag{5.50}$$

Observación 5.7.6. Sea

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x,y) f(y) dy,$$

que, siendo T un núcleo estándar, tiene sentido para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Observamos que puede ocurrir que $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f(x)$ no exista o que sea distinto de $Tf(x)$. Efectivamente, veremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Sea $K(x) = |x|^{-n-it}$. La función $|x|^{-n-it}$ es localmente integrable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Además, se tiene para $0 < a < b < \infty$,

$$\left| \int_{a<|x|<b} \frac{dx}{|x|^{n+it}} \right| = \left| |S^{n-1}| \frac{b^{-it} - a^{-it}}{-it} \right| \leq \frac{2}{t} |S^{n-1}| = C_1,$$

por lo que K satisface la condición (5.34) de la Proposición 5.6.3. Además, integrando en coordenadas polares se tiene

$$\int_{a<|x|<2a} \frac{dx}{|x|^n} \leq b^{n-1} \log 2,$$

es decir se cumple la desigualdad (5.35) de la Proposición 5.6.3. Por otro lado se tiene $|\nabla K(x)| \leq \frac{|n+it|}{|x|^{n+1}}$ por lo que usando la Proposición 5.1.3 se satisface la condición de Hörmander (5.36). Por tanto usando el Colorario 5.6.5 se obtiene $||K_{\varepsilon,R} * f||_p \leq c||f||_p$. Sin embargo no existe el límite puntual de las integrales truncadas, puesto que no podemos considerar el límite de la siguiente integral

$$\int_{\varepsilon<|x|<1} \frac{dx}{|x|^{n+it}} = |S^{n-1}| \frac{1 - \varepsilon^{-it}}{-it}$$

cuando ε tiende hacia 0.

Para ver si $\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f(x) = Tf(x)$ para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ estudiamos el operador maximal

$$T^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon f(x)|.$$

Este operador cumple la desigualdad (1,1)-débil y (p,p)-fuerte. Por lo tanto, usando el Teorema 3.3.6 y la densidad de $\mathcal{S}$ en los L^p con $1 \leq p < \infty$, se obtiene la existencia del límite puntual de (5.50).

El Corolario siguiente nos da las desigualdades (1,1)-débil y (p,p)-fuerte para el operador T^* .

COROLARIO 5.7.7. *Si T es un operador de Calderón-Zygmund, entonces T^* cumple las desigualdades (1,1)-débil y (p,p)-fuerte, con $1 < p < \infty$.*

Demostración. Se demuestra utilizando el lema de Kolmogorov y una desigualdad análoga a la de Cotlar, que a continuación se enuncian. □

LEMA 5.7.8. *(Kolmogorov). Sea L un operador que cumple la desigualdad (1,1)-débil. Sean $0 < \eta < 1$ y E un conjunto de medida finita. Entonces, existe c_η tal que*

$$\int_E |Lf(x)|^\eta dx \leq c|E|^{1-\eta}||f||_1^\eta.$$

Demostración. Se tiene utilizando la Proposición 1.2.2

$$\begin{aligned}
\int_E |Lf(x)|^\eta dx &= \eta \int_0^\infty \lambda^{\eta-1}|\{x \in E : |Lf(x)| > \lambda\}|d\lambda \\
&\leq \eta \int_0^\infty \lambda^{\eta-1} \text{mín}\left(|E|, \frac{c}{\lambda}||f||_1\right) d\lambda \\
&= \eta \int_0^{c||f||_1/|E|} \lambda^{\eta-1}|E|d\lambda + \eta \int_{c||f||_1/|E|}^\infty c\lambda^{\eta-2}||f||_1 d\lambda \\
&= c|E|^{1-\eta}||f||_1^\eta,
\end{aligned}$$

donde la desigualdad se obtiene por ser L de tipo (1,1)-débil. □

TEOREMA 5.7.9. *Sea T un operador de Calderón-Zygmund. Entonces para todo $0 < \eta \leq 1$ se tiene*

$$T^*f(x) \leq c_\eta[(M(Tf)^\eta(x))^{1/\eta} + Mf(x)], \tag{5.51}$$

donde M denota la función maximal de Hardy-Littlewood.

Demostración. Véase [Duo]. □

Capítulo 6

El espacio de Hardy H^1 y su dual BMO

En el capítulo anterior probamos las desigualdades (p, p)-fuerte para las integrales singulares en el caso que $1 < p < \infty$. En este capítulo, primero, definiremos un subespacio vectorial de $L^1(\mathbb{R}^n)$, cuya imagen por cualquier integral singular estará en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y segundo veremos que su espacio dual contiene las imagenes de la integrales singulares que actúan sobre las funciones acotadas, sustituyendo de esta manera las desigualdades (1,1)-fuerte y (∞, ∞)-fuerte que en general no son válidas para estos operadores.

6.1. Introducción a los espacios H^1 y BMO

Definición 6.1.1. Se define el *espacio de Hardy*, como

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n), \forall j = 1, \dots, n\},$$

Observación 6.1.2. Todo operador T dado por (5.1) está acotado de H^1 a L^1.

Definición 6.1.3. sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Definimos la *media* de f sobre el cubo Q y denoteremos f_Q

$$f_Q = \frac{1}{Q} \int_Q f(x) dx.$$

Además se define la *función maximal aguda* como

$$M^{\#} f(x) = \sup_Q \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy : x \in Q \right\}.$$

Observación 6.1.4. Cada integral mide la oscilación media de f sobre el cubo Q.

Definición 6.1.5. Se define el espacio BMO como

$$BMO = \{f : M^{\#}f \in L^{\infty}\}.$$

Además, definimos

$$||f||_{*} = ||M^{\#}f||_{\infty}.$$

Se dice que f tiene oscilación media acotada cuando la función $M^{\#}$ está acotada.

Observación 6.1.6. En realidad, $||\cdot||_{*}$ no puede ser una norma. Efectivamente, todas las funciones constantes en "casi todo punto" tienen oscilación nula. Por lo tanto, consideramos el espacio cociente BMO por las constantes, que se denotará de nuevo BMO.

Proposición 6.1.7. *Se tiene la desigualdad puntual*

$$M^{\#}f(x) \leq cMf(x). \tag{6.1}$$

Demostración. Usando la desigualdad triangular, se tiene para todo cubo Q

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx &= \frac{1}{|Q|}\int_Q \left| f(x) - \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy \right| dx \\
&\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy \frac{1}{|Q|}\int_Q dx \\
&= 2\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|dx,
\end{aligned}$$

de donde, tomando el supremo sobre todos los cubos Q, se tiene

$$M^{\#}f(x) \leq cM'f(x) \leq cMf(x),$$

donde M' denota la función maximal de Hardy-Littlewood con cubos en vez de con bolas y la última desigualdad se obtiene usando la relación (3.2). □

Proposición 6.1.8. *i) La norma $||\cdot||_{*}$ es equivalente a la norma definida como*

$$\sup_Q \inf_{c\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - c|dx.$$

ii) Se tiene

$$M^{\#}(|f|)(x) \leq 2M^{\#}f(x). \tag{6.2}$$

Demostración. i) Por un lado, teniendo en cuenta la definición del ínfimo, se tiene

$$\sup_Q \inf_{c\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-c|dx \leq \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx \tag{6.3}$$

Por otro lado, usando la desigualdad triangular obtenemos

$$\begin{aligned}\int_Q |f(x)-f_Q|dx &\leq \int_Q |f(x)-c|dx + \int_Q |c-f_Q|dx \\ &\leq 2\int_Q |f(x)-c|dx,\end{aligned} \tag{6.4}$$

para todo $c \in \mathbb{C}$. Tomando el ínfimo en c a la izquierda, dividiendo por $|Q|$ y considerando el supremo a ambos lados, la relación (6.4) se convierte en

$$\frac{1}{2}||f||_\# \leq \sup_{|Q|} \inf_{c\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_{|Q|} |f(x)-c|dx, \tag{6.5}$$

es decir, por (6.3) y (6.4) hemos obtenido

$$\frac{1}{2}||f||_* \leq \sup_{|Q|} \inf_{c\in\mathbb{C}} \frac{1}{|Q|}\int_{|Q|} |f(x)-c|dx \leq ||f||_*,$$

ii) Se tiene

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q ||f(x)|-|f_Q||dx \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)-f_Q|dx,$$

de donde tomando el supremo sobre Q se obtiene la desigualdad (6.2). □

Teorema 6.1.9. *Sea T un operador acotado en L^2, cuyo núcleo $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta \to \mathbb{C}$ satisface (5.49). Si f es una función acotada de soporte compacto, entonces $Tf \in BMO$ y*

$$||Tf||_* \leq c||f||_\infty.$$

Demostración. Sea Q un cubo de $\mathbb{R}^n$ con centro c_Q y sea $\tilde{Q}$ el cubo del mismo centro y lado $2\sqrt{n}$ veces el de Q. Hacemos la descomposición $f = f_1 + f_2$, donde $f_1 = f\chi_{\tilde{Q}}$ y $f_2 = f\chi_{\tilde{Q}^c}$. Sea $c = Tf_2(c_Q)$, utilizando la acotación de T en L^2 se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf(x)-c|dx &\leq \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|dx + \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_2(x)-Tf_2(c_Q)|dx \\ &\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_1(x)|^2dx\right)^{1/2} + \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_2(x)-Tf_2(c_Q)|dx \\ &\leq c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f_1(x)|^2dx\right)^{1/2} + \frac{1}{|Q|}\int_Q |Tf_2(x)-Tf_2(c_Q)|dx.\end{aligned}$$

Ahora basta acotar el último sumando. Por la condición (5.49) se tiene

$$\begin{aligned}\int_Q |Tf_2(x) - Tf_2(c_Q)|dx &\leq \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q \left|\int_{\tilde{Q}^c} [K(x,y) - K(c_Q,y)]f(y)dy\right| dx\right) \\ &\leq \frac{1}{|Q|}\left(\int_Q \int_{\tilde{Q}^c} |K(x,y) - K(c_Q,y)|dy||f||_\infty dx\right) \leq c||f||_\infty.\end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre Q se obtiene

$$||Tf||_* \leq c||f||_\infty.$$

□

Observación 6.1.10. Este teorema se refiere a operadores más generales que las integrales singulares. Por lo tanto, si T es una integral singular definida sobre L^∞, entonces su imagen está en BMO. Además este teorema satisface el deseo de encontrar un espacio para la imagen de las funciones acotadas. El único problema es que por no ser L_c^∞ (el espacio de la funciones acotadas de soporte compacto) denso en L^∞ no podemos extender el operador T a todo L^∞ por continuidad. En este caso, consi-

deramos una función acotada y definiremos un operador que cumpla las condiciones del Teorema 6.1.9. Veremos que este operador está bien definido para funciones acotadas y será la extensión en L^∞ de las integrales singulares que habíamos definido para las funciones de L^2. Efectivamente, sea Q un cubo y $\tilde{Q}$ otro cubo del mismo centro y lado $2\sqrt{n}$ de Q. Descomponemos $f = f_1 + f_2$, donde $f_1 = f\chi_{\tilde{Q}}$ y $f_2 = f\chi_{\tilde{Q}^c}$. Por ser $f_1 \in L_c^\infty$ se tiene que $f \in L^2$, de donde por la acotación de T en L^2 se obtiene que $Tf_1 \in L^2$. Por otro lado definimos el operador T como

$$Tf(x) = Tf_1(x) + \int_{\mathbb{R}^n} [K(x,y) - K(0,y)]f_2(y)dy.$$

La última integral converge ya que se acota por

$$\sup_Q |f| \cdot \int_{\tilde{Q}^c} |K(x,y) - K(0,y)|dy \leq ||f||_\infty \int_{|y|>2|x|} |K(x,y) - K(0,y)|dy = c||f||_\infty,$$

donde la primera desigualdad se obtiene porque $\tilde{Q}^c \subset \{|y| > 2|x|\}$, y la segunda utilizando la relación (5.49). Se puede ver que si descomponemos $f = f_1 + f_2$, donde cambiamos los Q y $\tilde{Q}$, entonces las imágenes de $Tf(x)$ se diferencian por una constante independiente de x. Esto no es un problema puesto que el nuevo espacio BMO se ha considerado como el cociente del BMO con las constantes.

Observación 6.1.11. De *ii*) se deduce que si $f \in BMO$, también $|f| \in BMO$, de donde $L^\infty \subset BMO$. Podemos ver que la inclusión "$\subset$" es estricta. Efectivamente, sea $f(x) = \text{sgn}x \in L^\infty(\mathbb{R})$. Consideramos la transformada de Hilbert y obtenemos

$$Hf(x) = \frac{1}{\pi}\text{v.p}\frac{1}{x} * f(x) = c\log|x|.$$

Usando la observación anterior, $Hf \in BMO$. Es decir, hemos encontrado una función, $\log|x| \in BMO$ que no pertenece en $L^\infty(\mathbb{R})$.

Enunciamos el siguiente lema, ("de los buenos lambdas"), de donde se obtiene una desigualdad, con la que probamos un teorema de interpolación.

Lema 6.1.12. *Para todo $\gamma > 0$ se tiene*

$$|\{x : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \gamma\lambda\}| \leq 2^\eta |\{x : M_d f(x) > \lambda\}|, \tag{6.6}$$

donde $\lambda > 0$.

Demostración. Se demuestra utilizando la descomposición de Calderón-Zygmund. Para más detalles, véase [Duo]. □

Lema 6.1.13. *Sea $1 \leq p_0 \leq p$ y sea $f \in L^{p_0}$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_d f(x)|^p dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |M^\# f(x)|^p dx.$$

Demostración. Utilizando la Observación 1.2.3 podemos expresar $||M_d f||_p^p$ como

$$||M_d f||_p^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_{M_d f}(\lambda)d\lambda,$$

donde $M_d f$ es la función maximál diádica. Sea

$$I_N = p\int_0^N \lambda^{p-1}\mu_{M_d f}(\lambda)d\lambda,$$

que es finita puesto que

$$I_N \leq \frac{p}{p_0}N^{p-p_0}\int_0^N p_0\lambda^{p_0-1}\mu_{M_d f}(\lambda)d\lambda,$$

y $||M_d f||_{p_0}^{p_0} \leq c||f||_{p_0}^{p_0}$, donde $f \in L^{p_0}$ por hipótesis. Ahora, utilizando el Lema 6.1.12 se tiene

$$\begin{aligned} I_N &= 2^p \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1}|\{x : M_d f(x) > 2\lambda\}|d\lambda \\ &= 2^p \int_0^{N/2} p\lambda^{p-1}(|\{x : M_d f(x) > 2\lambda, M^\# f(x) \leq \gamma\lambda\}| + |\{x : M^\# f(x) > \gamma\lambda\}|)d\lambda \\ &\leq 2^p I_N + \frac{2^p}{\gamma^p} \int_0^{\gamma N/2} p\lambda^{p-1}|\{x : M^\# f(x) > \lambda\}|d\lambda. \end{aligned}$$

Para $\gamma = 2^{-(p+n+1)}$, obtenemos

$$I_N \leq \frac{2^{p+1}}{\gamma^p} \int_0^{\gamma N/2} p\lambda^{p-1}|\{x : M^\# f(x) > \lambda\}|d\lambda.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} ||M_d f||_p^p = \lim_{N\to\infty} I_N &\leq \lim_{N\to\infty} \frac{2^{p+1}}{\gamma^p} \int_0^{\gamma N/2} p\lambda^{p-1}|\{x : M^\# f(x) > \lambda\}|d\lambda \\ &= c\int_0^{\infty} p\lambda^{p-1}|\{x : M^\# f(x) > \lambda\}|d\lambda = c||M^\# f||_p^p. \end{aligned}$$

□

Ahora, probaremos el teorema de interpolación.

Teorema 6.1.14. *Sea T un operador lineal acotado en L^{p_0} para algún p_0 tal que $1 < p_0 < \infty$ y acotado de L^∞ en BMO. Entonces se obtiene la desigualdad (p,p)-fuerte para el operador T cuando $p_0 < p < \infty$.*

Demostración. Consideramos la composición $M^\# \circ T$, un operador sublineal que está acotado en L^{p_0} por serlo ambos operadores $M^\#$ y T. Por otro lado, este operador está acotado en L^∞ puesto que por hipótesis

$$||M^\#(Tf)||_\infty = ||Tf||_{BMO} \leq c||f||_\infty.$$

Por el Teorema 1.2.11 (Marcinkiewicz), $M^\# \circ T$ está acotado en L^p si $p_0 < p < \infty$. Sea $f \in L^p$ de soporte compacto, entonces $f \in L^{p_0}$ con $p_0 < p$ y por hipótesis $Tf \in L^{p_0}$. Por el Lema 6.1.13 se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_d Tf(x)|^p dx \leq c\int_{\mathbb{R}^n} |M^\# Tf(x)|^p dx,$$

de donde usando la notación de la subsección 3.4.1 se tiene

$$Tf(x) = \lim_{k\to\infty} |E_k Tf(x)| \leq \sup_k |E_k Tf(x)| = M_d(Tf)(x),$$

en "casi todo punto". Por lo tanto,

$$\begin{aligned} ||Tf||_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |M_d(Tf)(x)|^p dx \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} |M^{\#}(Tf)(x)|^p dx \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = c||f||_p^p. \end{aligned}$$

□

Observación 6.1.15. La acotación del operador T dado por (5.1), del espacio L^∞ en BMO sustituye la desigualdad (∞,∞)-fuerte. Esto se justifica por el teorema anterior, puesto que obtenemos un resultado análogo al del Teorema 1.2.11 (Marcinkiewicz), sutsituyendo la desigualdad (∞,∞)-fuerte con la acotación de L^∞ en BMO.

Teorema 6.1.16. *El dual de $H^1(\mathbb{R}^n)$ es el espacio BMO.*

Demostración. Véase [St2]. □

Bibliografía

[A] J. Arias de Reyna, *Pointwise Convergence of Fourier Series*, Lecture Notes in Mathematics, vol. **1785**, Springer, Berlin, 2002.

[B-Sh] C. Bennett y R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Inc., Florida, 1988.

[C-Z] A.P Calderón y A. Zygmund, *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85-139.

[Duo] J.L. Duoandikoetxea Zuazo, *Análisis de Fourier*, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 1990.

[G-R] J. García-Cuerva y J.L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland, Inc., New York, 1985.

[Gar] A.M. Garsia, *Topics in Almost Everywhere Convergence*, Markham, Chicago, 1970.

[Gr] L. Grafakos, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, Inc., New Jersey, 2004.

[Guz] M. de Guzmán, *Real Variable Methods in Fourier Analysis*, North-Holland, Inc., New York, 1981.

[H-L] G.H. Hardy y J.E Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math. **54** (1930), 81-116.

[Ka] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, J. Wiley, New York, 1968.

[M] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs II*, Hermann, Paris, 1990.

[Ru1] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, Great Britain, 1970.

[Ru2] W. Rudin, *Análisis Funcional*, Editorial Reverté, España, 1979.

[S] C. Sadosky, *Interpolation of Operators and Singular Integrals*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1979.

[St1] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, New Jersey, 1970.

[St2] E.M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 1993.

[St3] E.M. Stein, *Singular Integrals*, Notices of the AMS **45** (1998), 1130-1140.

[S-W] E.M. Stein y G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, New Jersey, 1990.

[Tor] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, Inc., Indiana 1986.

[W] N. Wiener, *The ergodic theorem*, Duke Math. J. **5** (1939), 1-18.

[Zyg] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.