

Anàlisi de Fourier i Aplicacions

Pau Rabassa Sans

6 de Juny de 2004

Introducció

Això es un treball academicament dirigit sobre l'assignatura de Anàlisi Harmònica, està realitzat per mi, Pau Rabassa Sans i dirigit pel professor F. Javier Soria de Diego. El treball va "sorgir" en substitució de l'assignatura de Anàlisi Harmònica de la Universitat. Vaig rebre classes de teòria, tres hores setmanals durant aproximadament dos mesos (de mitjans de setembre fins a mitjants de novembre). Després d'aquest període vaig decidir centrar-me en les aplicacions de l'Anàlisi Harmònica, i vaig començar a buscar informació en diferents llibres, fent consultes més o menys regulars amb el professor Soria. Aquests període a anat desde mitjants de novembre fins a principis de juny (vaig decidir presentarme a segona convocatoria per qüestió de comoditat), he recopilat informació de diferents llibres, ampliant alguns temes i reduint alguns altres. Els dos llibres que he seguit basicament són el llibre de Folland ([3]), i el de Walker ([13]); el llibre de Papoulis ([7]) també tracte sobre aplicacions de l'integral de Fourier però se centra bàsicament en el tractament de senyals, i al final vaig decidir no incloure res sobre aquest tema. També vaig utilitzar el llibre de Kline ([5]), per la part històrica del treball. Els altres llibres que figuren a la bibliografia els he utilitzat com a referència i ajuda per a resultats que se surten del temari de l'assignatura. També he realitzat alguns programes molt sencills per a fer els dibujos que s'inclouen en el treball.

El treball se centre en algunes de les aplicacions de l'Anàlisi de Fourier, bàsicament, en la solució explícita de l'equació de la corda vibrant i de l'equació de la calor. Se suposen coneixements bàsics sobre anàlisi diferencial i integral, anàlisi real i complexe, i també sobre anàlisi funcional i equacions diferencials. Quan utilitzo algún resultat concret sobre algun d'aquest temes, o bé el demostro, o bé donc una referència ón es pot trobar la demostració.

En primer capítol se introduexen conceptes bàsics sobre els coeficients de Fourier necessaris per desenvolupar el segon capítol. Definim els coeficients de Fourier sobre els reals i sobre els complexos, després es dona alguns resultats sobre la convergència de la sèrie de Fourier d'una funció. Per últim en aquest primer capítol, veiem com extender els conceptes i resultats anterior

a funcions que estiguin definides en un interval $[-L, L]$ en lloc de l'interval $[-\pi, \pi]$.

En el segon capítol utilitzem les sèries de Fourier per solucionar dos equacions en derivades parcial, que són el problema de la corda vibrant i l'equació del calor. Primer ens fiquem en les hipòtesis més sencilles d'aquest dos problemes. Després, canviem les hipòtesis de tindre coneixer les funcions inicials del problema per coneixer-les només en un número finit de punts, les solucions clarament no són úniques, i veiem dues maneres diferents de resoldre el problema. Finalment tornem al problema inicial però canvian aquest cop la hipòtesis de la equació en derivades parcials ampliant-la amb una funció que represente les forces que actuen sobre el sistema.

El tercer capítol es tracten els conceptes bàsics de integral de Fourier, necessaris per veure en el quart capítol les aplicacions d'aquesta. Introduim el concepte de convolucions i integral de Fourier sobre \mathbb{R} i sobre \mathbb{R}^n , així com algunes propietats bàsiques, per acabar veient el teorema de la transformada inversa a \mathbb{R} i com a corol·lari la unicitat de la transformada de Fourier de una funció.

En el quart capítol resolem també dues equacions en derivades parcials, l'equació del calor, i el problema de Dirichlet sobre el semipla superior. La diferència de les equacions d'aquest capítol amb les de l'anterior, són que aquest cop el domini de definició de les funcions frontera s'estenen a un domini infinit; i el problema es soluciona aquest cop amb l'integral de Fourier. També veiem una fenomen òptic que se coneix com a difració de Fraunhofer, que per estudiar els efectes d'aquest fenomen s'utilitzen propietats molt bàsiques de la transformada de Fourier a \mathbb{R}^2 .

El cinquè i últim capítol, és un repàs històric de l'anàlisi de Fourier. Comença amb els orígens que són anteriors a Fourier. Els orígens que estan relacionats amb els problemes de la corda vibrant, i de l'equació del calor que tractem als capitols 2 i 4. Després veiem quines van ser les aportacions de Fourier, i com amb les aportacions dels segle XIX i XX pren forma com a una branca de les matemàtiques.

Índex

Introducció	iii
1 Introducció a les sèries de Fourier	1
1.1 Conceptes bàsics	1
1.2 Convergència	6
1.3 Comentaris	11
2 Aplicacions de les sèries de Fourier	17
2.1 Vibració de cordes	17
2.1.1 Problema lliure de forces	17
2.1.2 Solució d'Alembert	20
2.2 Equació de la calor	22
2.3 Problemes reduït a una número finit de punts	25
2.3.1 Solució amb polinomis interpolados	26
2.3.2 Solució com a sistema lineal	29
2.4 Problemes ampliats	38
2.4.1 Vibració de cordes	38
2.4.2 Equació de la calor	46
3 Introducció a la integral de Fourier	49
3.1 Convolucions	49
3.2 Transformada de Fourier	52
3.3 Transformada de Fourier a \mathbb{R}^n	58
4 Aplicacions de la Integral de Fourier	59
4.1 Equació de Laplace	59
4.2 Equació de la calor	63
4.3 Difracció de Fraunhofer	63
5 Història	71
5.1 Finals del segle XVIII: Els origens	71

5.2	Inicis del segle XIX: El treball de Fourier	73
5.3	Mitjans del segle XIX	75
5.4	Finals de segle XIX principis de segle XX	76

Capítol 1

Introducció a les sèries de Fourier

En aquest capítol introduïm els conceptes de sèrie de Fourier i veurem alguns resultats senzills de convergència.

1.1 Conceptes bàsics

Definició 1.1.1 Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una funció, direm que f és periòdica de període L si $f(x + L) = f(x)$.

Definició 1.1.2 Definim com a sistema trigonomètric sobre els reals de període 2π al conjunt

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(nx), \cos(nx), \dots$$

Definició 1.1.3 El sistema trigonomètric complex és $\{e^{-ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Donada $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi)$ definim els coeficients de Fourier complexos per $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$

Veiem la relació entre el sistema trigonomètric complex i el real.

Consirerem una funció $p : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, suposem que es suma finita de polinomis trigonomètrics complexos $p_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt}$, llavors tenim

$$\begin{aligned}
p_N(t) &= c_0 + \sum_{k=1}^N (c_k (\cos(kt) + i \sin(kt)) + c_{-k} (\cos(-kt) + i \sin(-kt))) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^N (c_k + c_{-k}) \cos(kt) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kt) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^N (\operatorname{Re}(c_k) + \operatorname{Re}(c_{-k})) \cos(kt) + i(\operatorname{Im}(c_k) + \operatorname{Im}(c_{-k})) \cos(kt) \\
&\quad + i(\operatorname{Re}(c_k) - \operatorname{Re}(c_{-k})) \sin(kt) + (-\operatorname{Im}(c_k) + \operatorname{Im}(c_{-k})) \sin(kt).
\end{aligned}$$

Imposant que p és una funció sobre els reals, tenim $\operatorname{Im}(c_k) = -\operatorname{Im}(c_{-k})$ i $\operatorname{Re}(c_k) = \operatorname{Re}(c_{-k})$ i per tant, $p_N(t) = c_0 \sum_{k=1}^N 2\operatorname{Re}(c_k) \cos(kt) - 2\operatorname{Im}(c_k) \sin(kt)$.

La conclusió és que quan tenim una sèrie trigonomètrica sobre els reals, podem suposar per comoditat com una sèrie sobre els complexos.

Recordatori 1.1.4 Denotem per $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ al conjunt de funcions 2π -periòdiques de quadrat integrable. Si considerem el producte escalar sobre aquest espai definit per:

$$(f, g) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

llavors $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$ és espai de Hilbert amb aquest producte escalar.

Altres coses que ens seràn útil recordar son:

- La integral sobre un interval simètric d'una funció imparell és zero.
- Donades una funció parell i una altra imparell el seu producte és funció imparell.
- Les identitats trigonomètriques:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\sin(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)
\end{aligned}$$

Per tant:

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$$

Teorema 1.1.5 *El sistema trigonomètric real i complex de període 2π és una base ortogonal sobre $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$.*

Demostració. Veiem primer que és sistema ortogonal:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dx = 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n \pi \sqrt{2}} (\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)) = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left[\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n \pi \sqrt{2}} (\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)) = 0$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(2nx) + \cos(0)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(0) - \cos(2nx)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(2nx) - \sin(0)) dx = 0$$

Ara demostrarem la completeness del sistema trigonomètric complex.

Utilitzarem el teorema de Stone-Weierstrass, que ens diu que els polinomis són densos en $(\mathcal{C}(-\pi, \pi), \|\cdot\|_\infty)$. Denotem per $\mathcal{C}_C(-\pi, \pi)$ el conjunt de funcions continues de suport compacte en $(-\pi, \pi)$, on el suport de una funció és l'adherència del conjunt de punts on la funció és diferent de zero. També utilitzarem que $\mathcal{C}_C(-\pi, \pi)$ és un subconjunt dens en $(\mathcal{L}^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$.

Donat $p(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt}$ ho podem associar a un polinomi complex,

$$P(z) = \sum_{k=-N}^N c_k z^k, \quad \text{amb } z = e^{it}.$$

Sigui $f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$, existeix $g \in \mathcal{C}_C(-\pi, \pi)$ tal que $\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$; i com $g \in \mathcal{C}(-\pi, \pi)$ existeix un polinomi P tal que $\|g - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Per finalitzar només cal observar que

$$\|h\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|h\|_\infty dt = \|h\|_\infty.$$

Per tant,

$$\|f - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_\infty < \varepsilon.$$

□

Donada una funció f 2π -periòdica volem escriure f com una sèrie trigonomètrica, es a dir:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)$$

Així, si formalment fem producte escalar als dos costats de la igualtat amb la funció $\cos(nx)$ ó $\sin(nx)$, obtindriem:

$$(\cos(n \cdot), f) = (\cos(n \cdot), A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)) = A_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(\sin(n \cdot), f) = (\sin(n \cdot), A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)) = B_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(1, f) = (\cos(1x), A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)) = A_0$$

Això ens induex a definir els coeficients de Fourier (reals) de una funció 2π -periòdica f com:

Definició 1.1.6

$$A_n := (f, \cos(n \cdot)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$B_n := (f, \sin(n \cdot)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$A_0 := (f, 1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Ara, donada una funció 2π -periòdica tenim una assignació:

$$f(x) \rightsquigarrow \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$$

Com a notació denotem per:

$$\begin{aligned} S[f] &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)), \\ S_N[f] &= A_0 + \sum_{n=1}^N(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)) \end{aligned}$$

Observació Si f és una funció parell, llavors $B_n=0$ per a tot n , i si és imparell, llavors $A_n=0$ per a tot n inclòs el zero.

Definició 1.1.7 Els coeficients de Fourier complexos d'una funció 2π -periòdica es defineixen com:

- $\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-ikt) dt$

Veiem la relació entre els coeficient de Fourier reals i complexos

Proposició 1.1.8 Tenim:

- $\widehat{f}(0) = \frac{A_0}{2}$
- $\widehat{f}(k) = \frac{A_k - iB_k}{2}$
- $\widehat{f}(-k) = \frac{A_k + iB_k}{2}$

Demostració.

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(0) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{A_0}{2}$$

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-ikt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(-nt) + i \sin(-nt)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt - i \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{A_k - iB_k}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(ikt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(nt) + i \sin(nt)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt + i \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{A_k + iB_k}{2} \end{aligned}$$

□

1.2 Convergència

Ens interesserà saber quines condicions locals i/o globals hem d'imposar a f en x_0 perquè $f(x_0) = S[f](x_0)$ i també les condicions globals per a que $f(x) = S[f](x)$ per a tot x del interval. Per això, veiem alguns resultats sobre convergència.

Recordem un resultat de càlcul funcional:

Teorema 1.2.1 (Fisher-Riesz) *Sigui H un espai de Hilbert, i $e_k, k \in I$ sistema ortogonal de H , llavors són equivalents:*

1. *El sistema ortogonal és complet.*
 2. $x = \sum_{k \in I} \widehat{x}(k)e_k$ en H , $\forall x \in H$
 3. $\|x\|_H = \|\widehat{x}\|_2$, on $\|\widehat{x}\|_2 = (\sum_{k \in I} |\widehat{x}|^2)^{1/2}$
 4. $(x, y)_H = (\widehat{x}, \widehat{y})_2$, es a dir: $(x, y)_H = \sum_{k \in I} \widehat{x}(k)\widehat{y}(k)$
- A (3) i (4) se les coneix com a igualtats de Parseval.

La demostració es pot trobar en qualsevol llibre general d'anàlisi funcional, per exemple el llibre de Introducció a l'Anàlisi Funcional de Cerdà, ([1]).

Hem vist a la secció anterior que el sistema trigonomètric era complet sobre $L^2(-\pi, \pi)$. Així donada $f \in L^2(-\pi, \pi)$ tenim:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(x) + b_k \sin(x)) \right) \right\|_2 = 0$$

i també tenim que $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) < \infty$.

Recordem un resultat sencil sobre sèries de potències, que el necessitarem pel pròxim teorema:

Proposició 1.2.2 *Sigui $f_n \in C^1(a, b)$ una successió de funcions diferenciables, suposem que $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n = g$ uniformement (observem que g és contínua, ja que és límit de funcions contínues) i $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = a$, llavors $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ uniformemente i $f' = g$.*

Per la demostració d'aquesta proposició mirar pàgina 355 del llibre de Introducció a l'Anàlisi Matemàtica de Ortega, ([8]).

Teorema 1.2.3 1. $f \in C^n(-\pi, \pi) \Rightarrow \widehat{f}(k) = o(|k|^{-n})$, $k \in \mathbb{Z}$

$$2. \widehat{f}(k) = o(|k|^{-n}) \Rightarrow \widehat{f}(k) = O(|k|^{-n}) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^{n-2}(-\pi, \pi)$$

$$3. f \in \mathcal{C}^\infty(-\pi, \pi) \Leftrightarrow \widehat{f}(k) = o(|k|^{-n}) \forall n \in \mathbb{N}$$

$$4. f \in \mathcal{C}^n(-\pi, \pi) \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| |k|^{n-1} < \infty$$

$$5. \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| |k|^n < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{C}^n(-\pi, \pi)$$

Demostració. Suposem primer que $f \in \mathcal{C}^n(-\pi, \pi)$, volem veure que

$$\begin{cases} (1) \widehat{f}(k) = o(|k|^{-n}) \\ (4) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| |k|^{n-1} < \infty \end{cases}$$

Primer veiem la relació entre els coeficients de Fourier i les seves derivades: (suposem k diferent de zero, i $f \in \mathcal{C}^1(-\pi, \pi)$)

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\left[f(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt \right) = \frac{1}{ik} \widehat{f}'(k)$$

Així en general, si $f \in \mathcal{C}^n(-\pi, \pi)$:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(ik)^n} \widehat{f^{(n)}}(k)$$

Si veiem que $f \in \mathcal{C}(-\pi, \pi) \Rightarrow f(k) = o(1)$ amb la relació anterior haurem vist (1). $f \in \mathcal{C}(-\pi, \pi) \Rightarrow f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$, aplicant les igualtats de Parseval, tenim $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty \Rightarrow |\widehat{f}(k)| = o(1)$.

Ara aplicant lo anterior i la desigualtat de Hölder tenim:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| |k|^{n-1} &= |\widehat{f}(0)| \delta_{0n} + \sum_{|k| \geq 1} \frac{|\widehat{f}(k)| |k|^n}{|k|} = |\widehat{f}(0)| \delta_{0n} + \sum_{|k| \geq 1} \frac{|\widehat{f^{(n)}}(k)|}{|k|} \\ &\leq |\widehat{f}(0)| \delta_{0n} + \left(\sum_{|k| \geq 1} |\widehat{f^{(n)}}(k)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|k| \geq 1} \frac{1}{|k|^2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

on δ_{0n} és igual a 1 si $n = 0$, i igual a 0 si $n \neq 0$.

$\sum_{|k| \geq 1} \frac{1}{|k|^2}$ és sempre finit. Com $f^{(n)}$ és contínua, i és dos cops integrable perquè l'interval és de mesura finita, aplicant les igualtats de Parseval

$$\sum_{|k| \geq 1} |\widehat{f^{(n)}}(k)|^2 < \infty;$$

Per tant queda vist (4).

Veiem ara (5), $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| |k|^n < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{C}^n(-\pi, \pi)$, ho fem per hipòtesi d'inducció:

Cas $n = 1$:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| |k| < \infty \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < \infty$$

Sigui $S_N[f](x) = \sum_{k=-N}^N \widehat{f}(k) e^{ikx}$, com $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < \infty$ llavors $S_N[f](x)$ tendeix a $f(x)$ uniformement, i com $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| |k| < \infty$ llavors $S'_N[f](x) = \sum_{k=-N}^N ik \widehat{f}(k) e^{ikx}$ és uniformement convergent a un funció g , aquesta funció g (que serà continua per ser limit uniforme de funcions contínues), per la Proposició 1.2.2 tenim que: $f' = g$, per tant, $f \in \mathcal{C}^1(-\pi, \pi)$

Suposem el cas $n - 1$ cert:

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| |k|^n < \infty \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| |k|^{n-1} < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{C}^{n-1}(-\pi, \pi)$, ara fem el canvi $f^{(n-1)} = g$, tenim $\widehat{g}(k) = (ik)^{n-1} \widehat{f}(k)$, per tant,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(k)| |k| < \infty$$

aplicant el cas $n=1$, tenim que $f^{(n-1)} = g \in \mathcal{C}^1(-\pi, \pi)$, per tant $f \in \mathcal{C}^n(-\pi, \pi)$. Queda vist (5).

Per veure (2), sota la hipòtesi de $\widehat{f}(k) = O(|k|^{-n})$ tenim que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| |k|^{n-2}$ es comporta com $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{-2}$, per tant és convergent, per tant, $f \in \mathcal{C}^{n-2}(-\pi, \pi)$.

Finalment (5) és immediat de (1) i (2).

□

Veiem ara un resultat sobre la convergència puntual de les sèries de Fourier:

Definició 1.2.4 *Direm que una funció f és contínua a troços en un interval $[a, b]$ si f és contínua en $[a, b]$ exepte en un número finit de punts, x_1, \dots, x_n , tals que, existeix límit per la dreta ($f(x_i+)$) i per l'esquerra ($f(x_i-)$). Denotarem el conjunt de funcions continues a troços en $[a, b]$ per $PC[a, b]$.*

Definició 1.2.5 *Direm que una funció f és regular a troços en un interval $[a, b]$ se f i f' són continues a troços en $[a, b]$. Denotarem el conjunt de funcions regulars a troços en $[a, b]$ per $PS[a, b]$.*

Volem estudiar la convergència de $S_N[f](x)$, per això observem primer:

$$\begin{aligned} S_N[f](x) &= \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in(x-\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in(\theta-x)} d\theta. \end{aligned}$$

Fem el canvi $\phi = \theta - x$ obtenim:

$$\begin{aligned} S_N[f](x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(x+\phi) e^{in\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\phi) \sum_{n=-N}^N e^{in\phi} d\phi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\phi) D_N(\phi) d\phi. \end{aligned}$$

on $D_N(\phi) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in\phi} d\phi$ i s'anomena nucli de Dirichlet.

Veiem una expressió equivalent:

$$\begin{aligned} D_N(\phi) &= \frac{1}{2\pi} e^{-iN\phi} \sum_{n=0}^N 2N e^{in\phi} = \frac{1}{2\pi} e^{-iN\phi} \frac{e^{i(2N+1)\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1/2)\phi} - e^{-i(N+1/2)\phi}}{e^{i\phi/2} - e^{i\phi/2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((N+1/2)\phi)}{\sin(1/2\phi)} \end{aligned}$$

Lema 1.2.6

$$\int_{-\pi}^0 D_N(\phi) d\phi = \int_0^\pi D_N(\phi) d\phi = \frac{1}{2}$$

Demostració.

$$\begin{aligned} D_N(\phi) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N (e^{in\phi} + e^{-in\phi}) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \cos(n\phi) \Rightarrow \\ \int_0^\pi D_N(\phi) d\phi &= \left[\frac{\phi}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(n\phi)}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'altre integral és immediata ja que $D_N(\phi)$ és una funció parell. \square

Teorema 1.2.7 (Criteri de Dirichlet) Sigui f una funció regular a troços, $f \in PS[a, b]$. Llavors $\lim_{n \rightarrow \infty} S_N[f](x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$.

Demostració. Tenim

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}f(x-) &= f(x-) \int_{-\pi}^0 D_N(\phi)d\phi \\ \frac{1}{2}f(x+) &= f(x+) \int_0^\pi D_N(\phi)d\phi \\ S_N[f](x) &= \int_{-\pi}^\pi f(x+\phi)D_N(\phi)d\phi\end{aligned}$$

Així:

$$\begin{aligned}S_N[f](x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] &= \int_{-\pi}^0 (f(x+\phi) - f(x-)) D_N(\phi)d\phi \\ &+ \int_0^\pi (f(x+\phi) - f(x+)) D_N(\phi)d\phi = \int_{-\pi}^0 (f(x+\phi) - f(x-)) \frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi} - 1} \\ &+ \int_0^\pi (f(x+\phi) - f(x+)) \frac{e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi}}{e^{i\phi} - 1}\end{aligned}$$

Definim:

$$g(\phi) = \begin{cases} \frac{f(x+\phi) - f(x+)}{e^{i\phi} - 1} & \text{si } \phi \in [0, \pi] \\ \frac{f(x+\phi) - f(x-)}{e^{i\phi} - 1} & \text{si } \phi \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Si $\phi \neq 0$ llavors $g(\phi)$ és regular a troços. Estudiem en el zero (apliquem l'Hôpital):

$$g(0+) = \lim_{\phi \rightarrow 0+} \frac{f(x+\phi) - f(x+)}{e^{i\phi} - 1} = \lim_{\phi \rightarrow 0+} \frac{f'(x+\phi)}{ie^{i\phi}} = \frac{f'(x+)}{i}$$

Analogament:

$$g(0-) = \frac{f'(x-)}{i}$$

Com g és continua a troços i estem integrant sobre un interval de mesura finita, g dos cops integrable. Per tant:

$$S_N[f](x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 g(\phi)(e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi})d\phi$$

$$+\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g(\phi)(e^{i(N+1)\phi} - e^{-iN\phi})d\phi = \widehat{g}(N+1) - \widehat{g}(-N)$$

$$\lim_{|N| \rightarrow \infty} \widehat{g}(N) = 0 \Rightarrow \lim_{|N| \rightarrow \infty} S_N[f](x) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$$

□

1.3 Comentaris

El primer que comentarem és com extendre les sèries de Fourier en funcions de període $2L$. Observem que si f és una funció de període $2L$, $\tilde{f}(x) = f(\pi x/L)$ és una funció 2π periòdica. Per definir els coeficients de Fourier de f , els definim com els coeficients de Fourier de \tilde{f} . Explícitament:

Definició 1.3.1 *Donada una funció $f \in L^2(-L, L)$ $2L$ periòdica, definim els seus coeficients de Fourier com:*

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{nx}{L}\right) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{nx}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

Així tots els resultats sobre funcions 2π -periòdiques es poden extendre a funcions $2L$ -periòdiques.

Donada una funció definida en un interval $(0, L)$, la podem extender a $(-L, L)$ com a funció parell o imparell:

Definició 1.3.2 *Extensió parell:*

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, L] \\ f(-x) & \text{si } x \in [-L, 0] \end{cases}$$

Definició 1.3.3 *Extensió imparell:*

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, L] \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-L, 0] \end{cases}$$

Per tant, aplicant la sèrie de Fourier segons prenem l'extensió parell o la imparell serà en termes de $\sin(nx)$ o de $\cos(nx)$.

Veiem ara quines condicions hem d'imposar sobre f en 0 i L per a que les extensions $2L$ -periòdiques \tilde{f}_p i \tilde{f}_i siguin contínues o n cops diferenciables a tot \mathbb{R} .

Nota En la següent discussió sobre continuïtat i difenciabilitat, quan parlem de $f^{(n)}(0+)$ o $f^{(n)}(L-)$ es suposa que existeix.

Observem primer que donada una funció f , la seva extensió parella (f_p) és contínua en el 0, ja que, $f_p(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} f_p(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f_p(-x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f_p(x) = f_p(0+) = f(0+)$. Per veure que l'extensió periòdica parella (\tilde{f}_p) és contínua en els punts de la forma $k \cdot L$ on $k \in \mathbb{Z}$, quan k és parell per la periodicitat és contínua si ho és en el 0; si k és imparell necessitem $\tilde{f}_p(L-) = \tilde{f}_p(L+)$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_p(L-) &= \lim_{x \rightarrow L-} \tilde{f}_p(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \tilde{f}_p(L+x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \tilde{f}_p(-L-x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \tilde{f}_p(-L+x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \tilde{f}_p(L+x) = \tilde{f}_p(L+)\end{aligned}$$

En canvi, si considerem l'extensió imparell f_i , tenim que

$$f_i(0-) = -f_i(0+) = -f(0+),$$

així f_i és contínua en 0 si $f(0+) = 0$. Per veure que l'extensió periòdica imparell (\tilde{f}_i)és contínua en $k \cdot L$ amb $k \in \mathbb{Z}$, com abans si k imparell és contínua si ho és en el zero, és a dir, si $f(0+) = 0$, si k parell és contínua si $\tilde{f}_i(L-) = \tilde{f}_i(L+)$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_i(L+) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \tilde{f}_i(L+x) = \lim_{x \rightarrow 0+} -\tilde{f}_i(-L-x) = -\lim_{x \rightarrow 0+} \tilde{f}_i(L-x) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0-} \tilde{f}_i(L+x) = -\tilde{f}_i(L-)\end{aligned}$$

Per tant, necessitem $f(L-) = 0$

Per estudiar la difenciabilitat veiem la següent relació entre funcions parells i imparells i les seves derivades.

Proposició 1.3.4 *Donada una funció diferenciable f sobre $(0, L)$, tenim que si f és parell llavors f' és imparell, i si f és imparell llavors f' és parell.*

Demostració.

$$\begin{aligned}f(-x) &= f(x) \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x-h) - f(-x+h)}{2h} = -f'(-x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(-x-h) + f(-x+h)}{2h} = f'(-x) \end{aligned}$$

□

Ara notem per f_p i f_i les extencions periòdiques parelles i imparelles respectivament.

Així suposem que $f \in C^1(0, L)$, f_i serà continua en el 0 si $f(0+) = 0$, si es contínua en el zero f'_i també serà contínua en el zero perquè f'_i és una funció parell.

En canvi si $f \in C^1(0, L)$ sabem que f_p serà contínua en el zero, però f'_p serà continua en el zero si $f'(0+) = 0$. Si a més $f \in C^2(0, L)$ i $f'(0+) = 0$ llavors f''_p també serà contínua en zero. Ès pot fer el mateix raonament en L . Així les propietats de diferenciabilitat en general ès poden resumir en la següent proposició:

Proposició 1.3.5 *Suposem que $f \in C^n(0, L)$, llavors:*

- $f_p \in C^n(\mathbb{R})$ si $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(L) = 0$ per tot k imparell entre zero i n (ambdós inclosos).
- $f_i \in C^n(-L, L)$ si $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(L) = 0$ per tot k parell entre zero i n (ambdós inclosos).

Exemple Ara ens centrarem en el cas que la funció f sigui un polinomi p restringit al interval $(0, L)$. Calculem els coeficients de Fourier de la seva extensió periòdica parell (A_n) i de la seva extensió periòdica imparell (B_n) .

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L p(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \frac{L}{n\pi} \left(\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) p(x) \right]_0^L - \int_0^L p'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \\ &= \frac{2}{L} \frac{L}{n\pi} (\sin(n\pi)p(L) - \sin(0)p(0)) - \frac{2}{L} \frac{L}{n\pi} \int_0^L p'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{-2}{L} \frac{L}{n\pi} \int_0^L p'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

De moment ens quedem amb aquesta expressió de A_n . Mirem què obtenim quan integrem $p(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)$.

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L p(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) dx \\
 &= \frac{2}{L n \pi} \left(\left[-\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) p(x) \right]_0^L + \int_0^L p'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \\
 &= \frac{2}{L n \pi} (\cos(0)p(0) - \cos(n\pi)p(L)) + \frac{2}{L n \pi} \int_0^L p'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
 &= \frac{2}{L n \pi} (p(0) - (-1)^n p(L)) - \frac{2}{L} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \int_0^L p''(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.
 \end{aligned}$$

Aplicant això tenim:

$$A_n = \frac{-2}{L} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 (p'(0) - (-1)^n p'(L)) - \frac{2}{L} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 \int_0^L p''(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

i aplicant-ho iterativament tenim:

Proposició 1.3.6

$$A_n = \frac{2}{L} \left(- \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 (p'(0) - (-1)^n p'(L)) + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^4 (p^{(3)}(0) - (-1)^n p^{(3)}(L)) + \dots \right)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \left(\left(\frac{L}{n\pi}\right) (p(0) - (-1)^n p(L)) - \left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 (p^{(2)}(0) - (-1)^n p^{(2)}(L)) + \dots \right)$$

Per a que l'extensió parell o imparell periòdica de p tingui un cert grau de diferenciabilitat, per una banda sabem que depen de $p^{(k)}(0)$ i de $p^{(k)}(L)$ per les proposicions anteriors. Observem que amb les formules obtingudes també podem discutir el grau de diferenciabilitat per la relació que té amb ordre dels coeficients de Fourier.

Un altre tema a comentar és el **fenomen de Gibbs**. Hem vist que quan tenim una funció f amb una discontinuitat de salt en un punt, la seva sèrie

de Fourier convergeix en norma quadràtica, i també hem vist que tenim convergència puntual, $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N[f](x_0) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$. Veiem (a través d'un exemple) com es comporta $S_N[f](x)$ quan fixem un N . Considerem:

$$f = -\mathcal{X}_{[-\pi, 0]} + \mathcal{X}_{[0, \pi]}$$

Com f és imparell tenim $A_n = 0$ per a tot n , i

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx) dx = \frac{-2}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1)$$

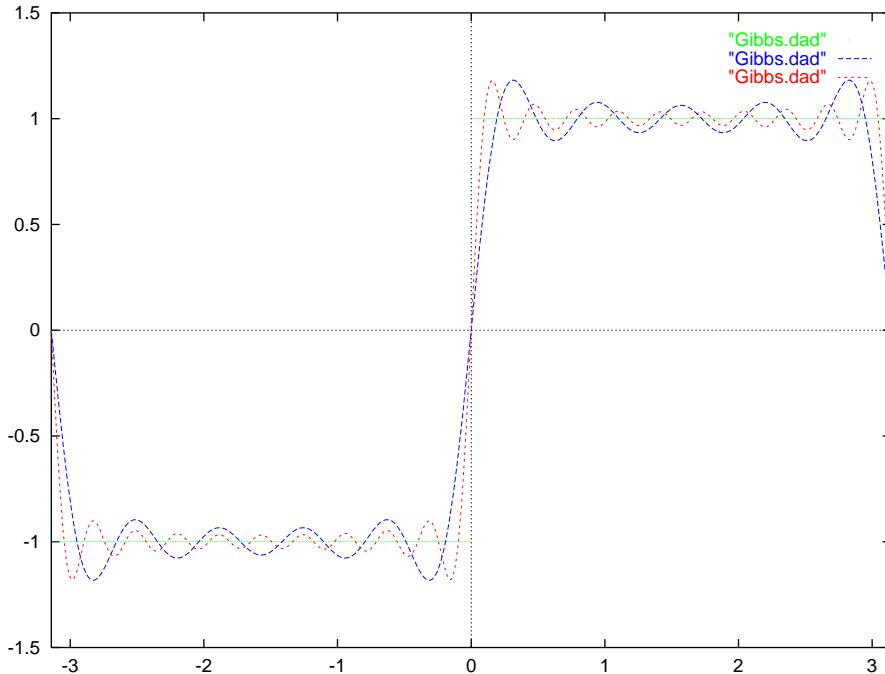


Figura 1.1: gràfiques de $f(x)$ i $S_N[f](x)$ per $N = 10, 20$

En la figura s'observa la funció f i $S_N[f](x)$, per a diferents N . A mesura que augmentem N veiem que en els punts lluny del punt de dicontinuitat, la gràfica de $S_N[f](x)$ s'ajusta més a la gràfica de f , però també observem que existeix un punt (cada cop més a prop del punt de dicontinuitat) on la diferència entre f i $S_N[f](x)$ és aproximadament la mateixa. Això passa sempre que aproximem una funció f amb discontinuitat de salt per $S_N[f](x)$, i aquesta propietat és coneix com a fenomen de Gibbs.

Capítol 2

Aplicacions de les sèries de Fourier

2.1 Vibració de cordes

2.1.1 Problema lliure de forces

Considerem una corda elàstica de longitud L , fixada en els extrem. Suposem també que la corda té densitat ρ i tensió T constant. Si no actuen forces sobre la corda obtenim que el moviment de la corda està determinat per la següent equació en derivades parcials:

- $y_{tt} = c^2 y_{xx}$ (on $c^2 = T/\rho$)
- $y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \forall t$ (extrems fixos)
- $y(x, 0) = f(x)$ (posició inicial)
- $y_t(x, 0) = g(x)$ (velocitat inicial)

Per a resoldre l'equació ho fem pel mètode de variables separades, és a dir, suposem que la solució és de la forma $y(x, t) = X(x)T(t)$, per a que sigui solució de l'equació ha de complir:

$$T''(t)X(x) = c^2 X''(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{c^2 X''(x)}{X(x)}$$

Com això s'ha de complir per a tot x i t , tenim que $\exists \lambda$ constant tal que:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda = \frac{c^2 X''(x)}{X(x)}$$

Per tant, ara tenim dues equacions diferencials:

$$\lambda T(t) = T''(t)$$

$$\lambda X(x) = c^2 X''(x)$$

Ens quedem ara amb l'equació $X(x) = c^2 X''(x)$, com $y(0, t) = y(L, t) = 0$ per a tot t ($y(0, t) = X(0)T(t)$ i $y(L, t) = X(L)T(t)$), tenim condicions inicials $X(0) = X(L) = 0$. Mirem les solucions en funció de λ :

$\lambda > 0$:

$$X(x) = A \exp(\sqrt{\lambda}x/c) + B \exp(-\sqrt{\lambda}x/c)$$

Imposant les condicions inicials $X(0) = 0 \Rightarrow A = -B$, per tant $X(x) = 2A \sinh(\frac{\sqrt{(\lambda)x}}{c})$, i $X(L) = 0 \Rightarrow A = 0$. I la solució és $y(x, t) = 0$. Però aquesta solució no ens interesa.

$\lambda = 0$:

$$X(x) = Ax + B$$

Imposem $X(0) = 0$ i $X(L) = 0$ i tenim un altre cop $X(x) = 0$.

$\lambda < 0$:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x/c) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x/c)$$

Ara imposem $X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$, i imosant $X(L) = 0 \Rightarrow B \sin(\sqrt{-\lambda}L/c) = 0 \Rightarrow B = 0$ (que no ens interesa) ó $\sqrt{-\lambda}L/c = n\pi \Rightarrow \lambda = (cn\pi/L)^2$.

Anomen $\lambda_n = -(cn\pi/L)^2$, per a cada λ_n tenim una solució:

$$X_n(x) = \sin(nc\pi x/L).$$

Mirant ara l'equació $T(t) = \lambda_n T''(t) = (cn\pi/L)^2 T''(t)$, té solucions

$$T_n(t) = A_n \cos(nc\pi t/L) + B_n \sin(nc\pi t/L)$$

Així tenim solucions

$$y_n(x, t) = (A_n \sin(nc\pi t/L) + B_n \cos(nc\pi t/L)) \sin(nc\pi x/L)$$

de l'equació inicial en derivades parcials. Una solució en general $y(x, t)$ serà convinació lineal d'aquestes:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^N (A_n \cos(nc\pi t/L) + B_n \sin(nc\pi t/L)) \sin(n\pi x/L)$$

Ara, per a determinar els coeficients A_n i B_n , $n = 1, \dots, N$ imosem les condicions de possició i velocitat inicial:

$$y(x, 0) = f(x) \Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\pi x/L)$$

Fem producte escalar a banda i banda de la igualtat amb $\sin(n\pi x/L)$; i obtenim:

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = A_n \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = A_n \frac{L}{2}$$

Per tant,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Si derivem en la solució $y(x, t)$ terme a terme del sumatori i avaluem en $t = 0$ obtenim:

$$y_t(x, 0) = \sum_{n=1}^N \frac{nc\pi}{L} B_n \sin(n\pi x/L)$$

$$y_t(x, 0) = g(x) \Rightarrow g(x) = \sum_{n=1}^N \frac{nc\pi}{L} B_n \sin(n\pi x/L)$$

Per tant, fent producte escalar com abans amb $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ obtenim:

$$B_n = \frac{2}{nc\pi} \int_0^L g(x) \sin(n\pi x/L) dx$$

Ens interesserà saber quines condicions hem d'imposar sobre f i g per a que la solució sigui convergent quan N tendeix a infinit, per exemple, si $f \in \mathcal{C}^1[0, L]$ i g és continua, llavors $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ són absolutament convergents, i per tant la solució serà:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nc\pi t/L) + B_n \sin(nc\pi t/L)) \sin(n\pi x/L).$$

Per discutir la regularitat de la solució en funció de la regularitat de les funcions f i g és millor fer-ho amb la solució de d'Alembert.

2.1.2 Solució d'Alembert

Considerem la solució $y(x, t)$ del problema anterior, la vibració de la corda lliure de forces, escrit de la forma:

$$y(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

on

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ w(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

Sabem que $\cos(\theta)\sin(\phi) = 1/2(\sin(\theta+\phi) + \sin(\theta-\phi))$; i utilitzant també que $A_n = 2/L \int_0^L f(s) \sin(n\pi s/L) ds$, i que $F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi s/L)$ és la sèrie de Fourier de l'extensió periòdica imparell de f . Així:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/2A_n (\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right))$$

$$v(x, t) = 1/2(F(x+ct) + F(x-ct)).$$

Mirem ara de fer algo semblant amb la $w(x, t)$, aquí utilitzem $\sin(\theta)\sin(\phi) = 1/2(\cos(\theta+\phi) - \cos(\theta-\phi))$.

Sabem també $B_n = 2/(nc\pi) \int_0^L g(s) \sin(n\pi s/L) ds$, fent el canvi

$$b_n = \int_0^L g(s) \sin(n\pi s/L) ds.$$

Combinant aquest dos resultats obtenim:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2c} \left(\frac{L}{n\pi} b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right) - \frac{L}{n\pi} b_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right) \right)$$

Observem ara que si $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi s}{L}\right)$, és a dir, que $G(s)$ és l'extensió periòdica de g , llavors integrant terme a terme tenim:

$$\int_y^x G(s) ds = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

Aplicant això obtenim:

$$w(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds$$

I finalment tenim que la solució del problema de vibració de la corda es pot escriure explicitament com:

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \left[(F(x + ct) + F(x - ct)) + \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds \right]$$

Amb aquesta expresió de la solució és facil discutir la regularitat de la solució. Per a que $y(x, t)$ sigui solució del problema hauria de ser dos cops diferenciable respecte x i respecte t , per a poder complir la equació en derivades parcials. Sabem que si $f \in C^3(0, L)$, $f'(0) = f'(L) = 0$ i $f'''(0) = f'''(L)$, llavors F serà $C^2[0, L]$. Si $f \in C^2(0, L)$ i $g'(0) = g'(L)$, llavors G serà $C^1[0, L]$. Sota aquestes condicions doncs, la solució $y(x, t)$ sera dos cops continuament diferenciable respect el temp i la posició.

La solució de d'Alembert ens permet també discutir la convergència puntual de la sèrie. Per exemple, si f és dos cops diferenciable amb $f'(0) = f'(L) = 0$, f'' és regular a troços, i g és un cop diferenciable amb $g'(0) = g'(L) = 0$, amb g' regular a troços. Podem assegurar que $y(t, x)$ serà convergent en tot punt; però només podrem assegurar convergència puntual de $y_{tt}(x, t)$ i $y_{xx}(x, t)$ respecte el temps i la possició.

Exemple 2.1.1 Considerem una corda elàstica de longitud L amb els extrems fixats, en posició inicial subjectada pel centre a altura h . Ens interessa estudiar el moviment de la corda al deixar-la. És a dir, el següent problema de vibració:

- $y_{tt} = c^2 y_{xx}$
- $y(0, t) = y(L, t) = 0$
- $y(x, 0) = \begin{cases} \frac{2hx}{L} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{-2h(x-L)}{L} & \text{si } \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$
- $y_t(x, 0) = 0$.

Solució. Com $y_t(x, 0) = 0$ llavors $B_n = 0$ per a tot n .

$$A_n = \frac{4h}{L^2} \int_0^{1/2L} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \frac{4h}{L^2} \int_{1/2L}^L (x - L) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Així la solució de l'equació és:

$$y(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\left(\frac{(2n+1)c\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{L} x\right)$$

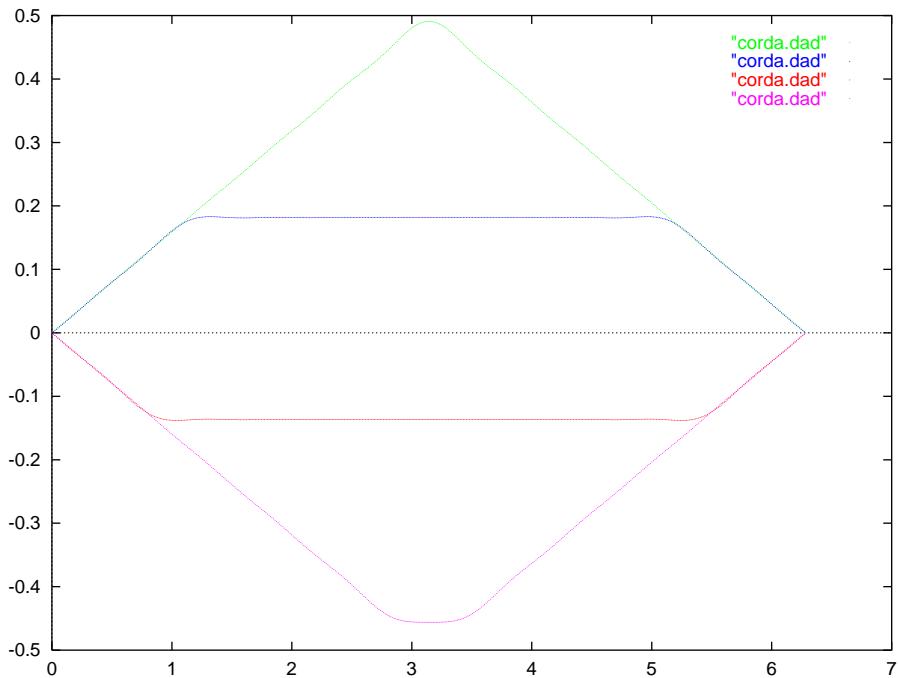


Figura 2.1: Corda corresponent a l’Exemple 2.1.1 per a diferents temps

La funció inicial f és contínua en l’interval $[0, L]$ i diferenciable en tots els punts excepte en $\frac{L}{2}$, així la solució serà diferenciable quan $\frac{(x \pm ct)L}{\pi} \neq \frac{L}{2}$, és a dir, quan $x \pm ct \neq \frac{\pi}{2}$. En la representació de la funció s’observa que el punt de no diferenciacibilitat que en el instant inicial està en $L/2$ es desplaça simètricament en el interval $[0, L]$ respecte el temps.

□

2.2 Equació de la calor

Considerem ara una barra cilíndrica de longitud L , amb una temperatura inicial donada. Suposem també per simplificar el problema que la temperatura en els extrems és fixa igual a zero. El comportament de la calor ve donada per la següent equació en derivades parcials:

- $u_t = a^2 u_{xx}$
- $u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t$
- $u(x, 0) = f(x)$

Per resoldre l'equació en derivades parcials ho fem com en el problema de la vibració de cordes per separació de variables:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \Rightarrow u_{xx} = X''(x)T(t) = u_t = T'(t)X(x)$$

Fem servir la constant de separació i obtenim les dues equacions diferencials:

$$X''(x) = \frac{\lambda}{a}X(x)$$

i

$$T'(t) = \lambda T(t)$$

Les condicions inicials $u(0, t) = u(L, t) = 0 \forall t$ es tradueixen amb $X(0) = X(L) = 0$. L'equació diferencial per la funció X és igual que en el problema de vibració de cordes i, per tant, té solució

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

per als valors $\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

Així, l'equació diferencial per la funció T té solucions:

$$T_n(t) = B_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

Per tant, ara tenim solucions particulars de l'equació en derivades parcials inicials $u_n(x, t) = B_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ i així una la solució general:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Per al càlcul dels B_n imosant la posició inicial:

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

per tant

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Observació Si considerem la solució $u(x, t)$ com a funció de x està expressada com a sèrie trigonomètrica, on $b_n = B_n \exp(-(\frac{n\pi}{L})^2 t)$ i si $t > 0$ i els coeficients B_n estan acotats, tenim que $b_n = o(n^k) \forall k < 0$, per tant, la solució $u(x, t)$ és infinitament diferenciable respecte x . Veiem un exemple que ilustra aquest fet:

Exemple 2.2.1 Considerem el problema de propagació de la calor amb una funció inicial:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2hx}{L} & \text{si } x \in [0, L/2] \\ \frac{2h(x-L)}{L} & \text{si } x \in [L/2, L] \end{cases}$$

Solució. Calculem els coeficient B_n associats a l'equació.

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{2hx}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \frac{2h(x-L)}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{4h}{L^2} \int_0^{L/2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{4h}{L^2} \int_{L/2}^L 2h(x-L) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Calculem les integrals per separat. Integrant per parts, derivem x i integrem $\sin(\frac{n\pi x}{L})$:

$$\begin{aligned} \int_0^{L/2} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \left[-x \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_0^{L/2} + \int_0^{L/2} \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{L^2}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

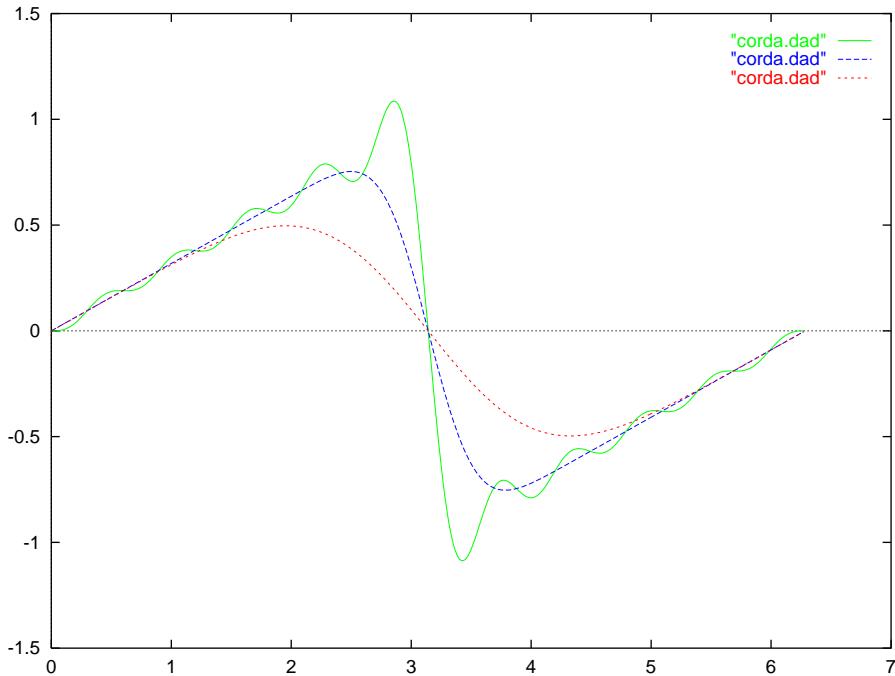
Ara derivem $(x-L)$ i integrem $\sin(\frac{n\pi x}{L})$:

$$\begin{aligned} \int_{L/2}^L (x-L) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \left[-(x-L) \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{L/2}^L + \int_{L/2}^L \frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{L^2}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{L^2}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Així:

$$\begin{aligned} B_n &= -\frac{L^2}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{L^2}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{L^2}{2n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{L^2}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{L^2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

En la figura s'observen la solucions del problema truncant la suma infinita a un cert N . Com a funció de x fixat un t_0 , quan $t_0 = 0$ la funció es

Figura 2.2: grafiques de $u(x, t_0)$ amb $t_0 = 0, 0.05, 0.30$

discontínua i el gràfic mostra una aproximació de la sèrie de Fourier de una funció discontinua, per tant es dona el fenomen de Gibbs, en canvi per els temps estrictament positius funció és completament regular.

□

2.3 Problemes reduït a una número finit de punts

Ara considerem que en els problemes anteriors de la corda vibrant i de la equació de la calor en lloc de coneixer les funcions inicials f i g , coneixem els valors de f i g en $n - 1$ punts més els valors en 0 i L que valen 0 , el que farem en aquesta secció és, considerem el polinomi interpolador de Lagrange en els $n + 1$ punts coneguts, i calculem la solució del problema utilitzant els polinomis interpoladors com a funcions inicials.

- $y_{tt} = c^2 y_{xx}$ (on $c^2 = T/\rho$)
- $y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \forall t$ (extrems fixos)

- $y(x_i, 0) = c_i$ (posició inicial) $i = 0, 1, 2, \dots, n$
- $y_t(x_i, 0) = d_i$ (velocitat inicial) $i = 0, 1, 2, \dots, n$

Amb $c_0 = c_n = d_0 = d_n = 0$. Comencem amb el problema de la corda vibrant. Sabem que la solució al problema serà:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nc\pi t/L) + B_n \sin(nc\pi t/L)) \sin(n\pi x/L)$$

on

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ B_n &= \frac{2}{nc\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

2.3.1 Solució amb polinomis interpolados

Veiem una manera de calcular els coeficients A_n utilitzant polinomis interpoladors.

Sigui I el polinomi interpolador de Lagrange associat a f en els punts x_i per $i = 0, 1, \dots, n$

$$I(x) = \sum_{k=0}^n c_k I_k(x)$$

on

$$I_k(x) = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i)} = e_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i)$$

La nostra intenció es utilitzar el polinomi I en el lloc de f en la fórmula:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L I(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Com I es un polinomi de grau n , i la integral que estem calculant coincideix amb la integral per calcular els coeficients de Fourier la extensió periòdica imparèl de I , utilitzant la Proposició 1.3.6 tenim:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L I(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \left(\left(\frac{L}{n\pi} \right) (I(0) - (-1)^n I(L)) - \left(\left(\frac{L}{n\pi} \right)^3 (I^{(2)}(0) - (-1)^n I^{(2)}(L)) + \dots \right) \right) \end{aligned}$$

Veiem ara com calcular les derivades de I (apliquem $c_0 = c_n = 0$):

$$I(x) = \sum_{k=0}^n c_k I_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k I_k(x)$$

per tant:

$$I^{(r)}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k I_k^{(r)}(x).$$

Com

$$I_k(x) = e_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x - x_i) \Rightarrow I'_k(x) = e_k \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1 \neq k}}^n \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k, j_1}}^n (x - x_i) \right)$$

repetint el procés

$$I_k^{(2)}(x) = e_k \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1 \neq k}}^n \left(\sum_{\substack{j_2=0 \\ j_2 \neq k, j_1}}^n \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k, j_1, j_2}}^n (x - x_i) \right) \right)$$

i en general

$$I_k^{(r)}(x) = e_k \sum_{\substack{j_1=0 \\ j_1 \neq k}}^n \left(\sum_{\substack{j_2=0 \\ j_2 \neq k, j_1}}^n \left(\dots \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k, j_1, j_2, \dots, j_r}}^n (x - x_i) \right) \dots \right) \right)$$

Aquestes expressions permeten calcular numèricament les derivades del polinomi interpolador a partir dels punts de interpolació i del valor de f en cada punt, i en conseqüència els coeficient de A_n de la solució del problema. Per calcular els coeficient B_n , és fan els mateixos calculs amb el polinomi interpolador, pero el valor final de B_n s'ha d'ajustar multiplicant per $\frac{L}{n\pi c}$.

Centrem-nos ara en el cas particular de interpolar tres punts, més els extrems. Sigui I el polinomi interpolador f en aquest tres punts.

$$I(x) = c_1 I_1(x) + c_2 I_2(x) + c_3 I_3(x)$$

$$I_k(x) = e_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^4 (x - x_i) = e_k (x^4 + \dots)$$

així

$$I_k^{(4)}(x) = 24e_k$$

per tant

$$I^{(4)}(x) = 24(e_1c_1 + e_2c_2 + e_3c_3).$$

I aplicant la formula anterior i agrupant termes tenim

$$\begin{aligned} I''_1(x) &= 2e_1((x - x_3)(x - L) + (x - x_2)(x - L) + (x - x_2)(x - x_3) \\ &\quad + x(x - x_3) + x(x - L) + x(x - x_2)) \end{aligned}$$

i de la mateixa manera

$$\begin{aligned} I''_2(x) &= 2e_2((x - x_3)(x - L) + (x - x_1)(x - L) + (x - x_1)(x - x_3) \\ &\quad + x(x - x_3) + x(x - L) + x(x - x_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I''_3(x) &= 2e_3((x - x_1)(x - L) + (x - x_2)(x - L) + (x - x_2)(x - x_1) \\ &\quad + x(x - x_1) + x(x - L) + x(x - x_1)) \end{aligned}$$

Resumint si tenim el problema,

- $y_{tt} = c^2y_{xx}$ (on $c^2 = T/\rho$)
- $y(0, t) = y(L, t) = 0 \forall t$ (extrems fixos)
- $y(x_i, 0) = c_i$ (posició inicial) $i = 1, 2, 3$
- $y_t(x_i, 0) = d_i$ (velocitat inicial) $i = 1, 2, 3$

L'algorisme per calcular una solució del problema definida per tot t i x un cop diferenciable respecte x i t és:

1. $e_k = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (x_k - x_i)}$
2. $I_1''(0) = 2e_1(x_3L + x_2L + x_2x_3)$
 $I_1''(L) = 2e_1((L - x_2)(L - x_3) + L(L - x_3) + L(L - x_2))$
 $I_2''(0) = 2e_2(x_3L + x_1L + x_1x_3)$
 $I_2''(L) = 2e_2((L - x_1)(L - x_3) + L(L - x_3) + L(L - x_1))$
 $I_3''(0) = 2e_3(x_1L + x_2L + x_2x_1)$
 $I_3''(L) = 2e_3((L - x_2)(L - x_1) + L(L - x_1) + L(L - x_2))$
3. $I^{(2)}(0) = c_1I_1''(0) + c_2I_2''(0) + c_3I_3''(0)$
 $I^{(2)}(L) = c_1I_1''(L) + c_2I_2''(L) + c_3I_3''(L)$
 $J^{(2)}(0) = d_1I_1''(0) + d_2I_2''(0) + d_3I_3''(0)$
 $J^{(2)}(L) = d_1I_1''(L) + d_2I_2''(L) + d_3I_3''(L)$
 $I^{(4)}(0) = 24(c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3)$
 $J^{(4)}(0) = 24(d_1e_1 + d_2e_2 + d_3e_3)$
4. $A_n = \frac{2}{L} \left(\frac{L}{n\pi} \right)^3 [I^{(2)}(0) - (-1)^n I^{(2)}(L) - \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 I^{(4)}(0)(1 - (-1)^n)]$
 $B_n = \frac{2}{nc\pi} \left(\frac{L}{n\pi} \right)^3 [J^{(2)}(0) - (-1)^n J^{(2)}(L) - \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 J^{(4)}(0)(1 - (-1)^n)]$
5. $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nc\pi t/L) + B_n \sin(nc\pi t/L)) \sin(n\pi x/L)$

Veiem ara algunes solucions del problema de cordes per diferents valors de c_i i d_i .

Observem que per al problema de la calor els calculs son totalment analogs, amb la diferència que només interpolem una funció f en n punts, en lloc de interpolar f i g .

2.3.2 Solució com a sistema lineal

Veiem un altre manera de resoldre el problema:

1. $y_{tt} = c^2 y_{xx}$ (on $c^2 = T/\rho$)
2. $y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \forall t$ (extrems fixos)
3. $y(x_i, 0) = c_i$ (posició inicial) $i = 1, 2, \dots, n$

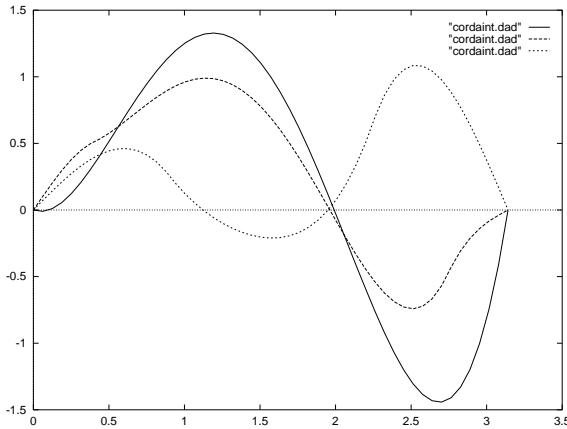


Figura 2.3: gràfiques de $u(x, t_0)$ per diferents temps amb $c_1 = c_2 = 1$ i $c_3 = -1$, $d_i = 0 \forall i$

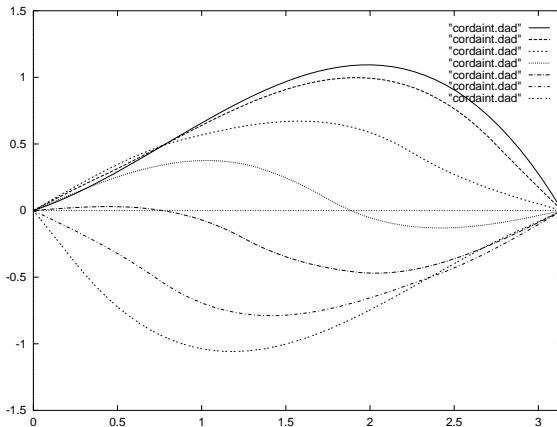


Figura 2.4: grafiques de $u(x, t_0)$ per diferents temps amb $c_1 = 0.5$, $c_2 = c_3 = 1$, $d_i = 0 \forall i$

4. $y_t(x_i, 0) = d_i$ (velocitat inicial) $i = 1, 2, \dots, n$

ón ara $x_1 \neq 0$ i $x_n \neq L$.

Sota les hipòtesis (1) i (2) podem repetir els arguments de la secció 2.1.1, per deduir que les solucions del problema son de la forma:

$$y_k(x, t) = \left(A_k \cos \left(\frac{kc\pi t}{L} \right) + B_k \sin \left(\frac{kc\pi t}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right).$$

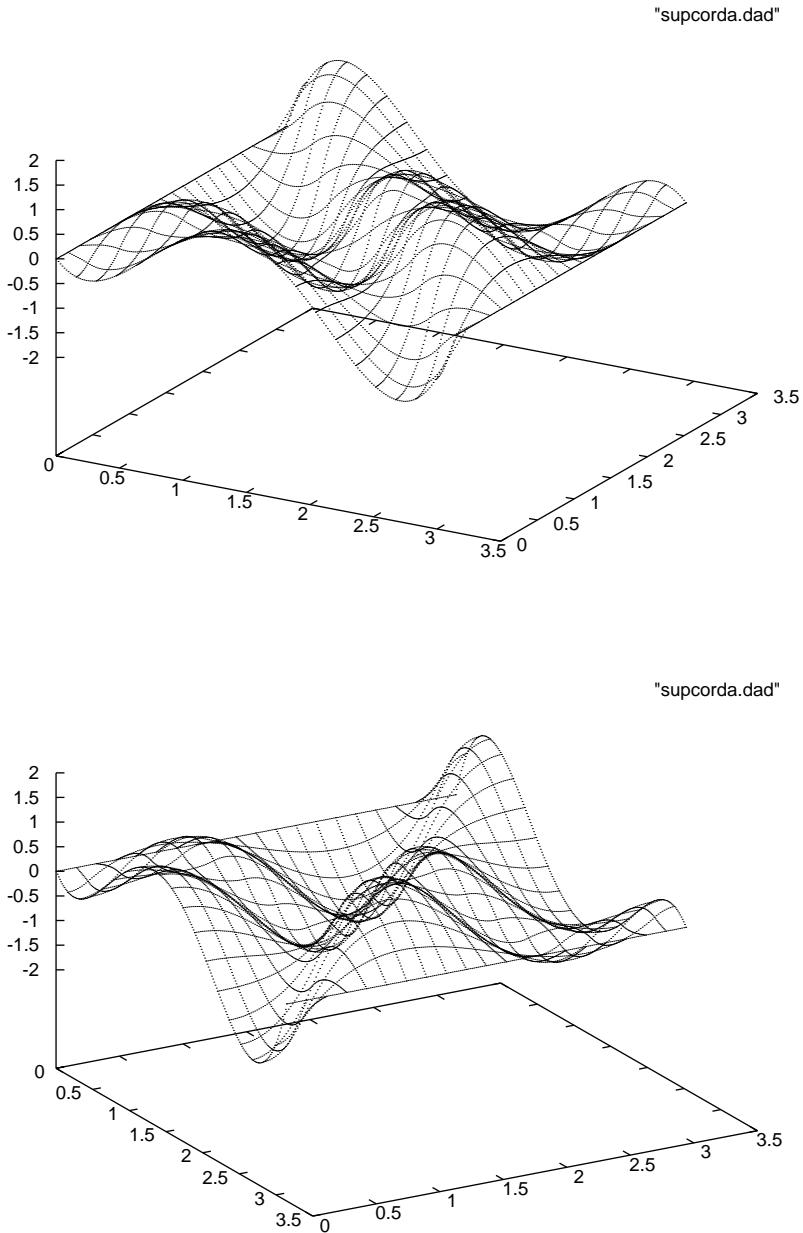
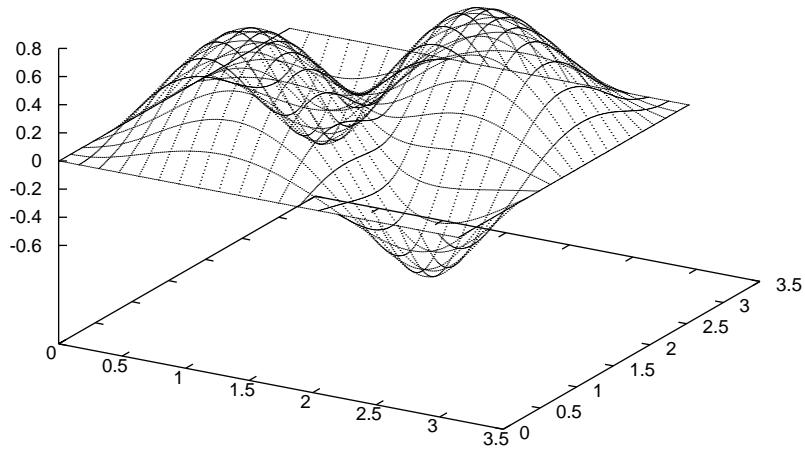


Figura 2.5: gràfiques de $u(x, t)$ amb $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 1$ i $c_3 = -1$, $d_i = 0$

Suposem que la solució del problema $y(x, t)$ és combinació de les n primeres solucions $y_k(x, t)$, es a dir

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^n \left(A_k \cos \left(\frac{kc\pi t}{L} \right) + B_k \sin \left(\frac{kc\pi t}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{k\pi x}{L} \right).$$

"supcorda.dad"



"supcorda.dad"

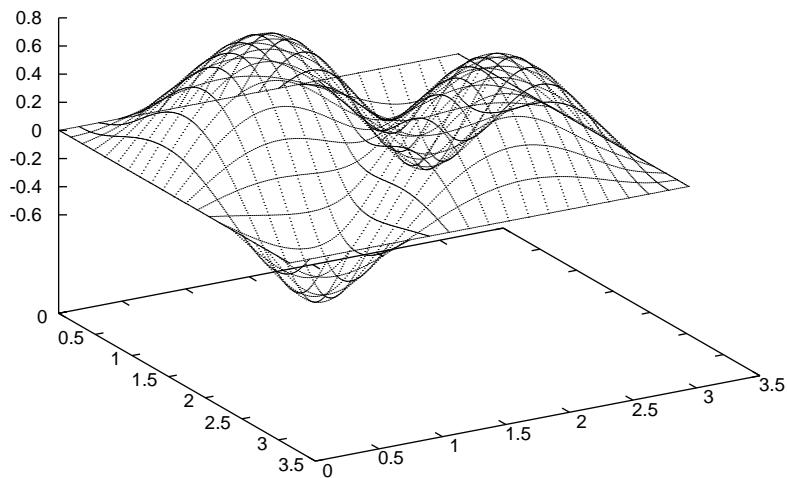


Figura 2.6: gràfiques de $u(x, t)$ amb $c_i = 0 \forall i$ i $d_1 = d_3 = 1$ i $d_2 = -1$

Si imosem la condició (3) obtenim

$$c_i = y(x_i, 0) = \sum_{k=1}^n y(x_k, 0) = \sum_{k=1}^n A_k \sin\left(\frac{k\pi x_i}{L}\right)$$

"supcalor.dad"

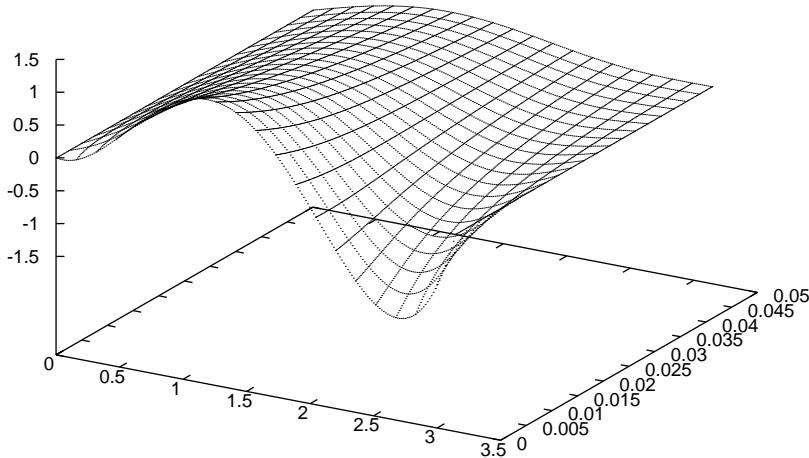


Figura 2.7: gràfiques solució de l'equació del calor amb $c_1 = c_2 = 1$ i $c_3 = -1$, $d_i = 0$

Ara tenim un sistema de n equacions i n incognites per a determinar els coeficients A_k . Que expressat de forma matricial és:

$$\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) & \sin\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) & \dots & \sin\left(\frac{\pi x_n}{L}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi 2 x_1}{L}\right) & \sin\left(\frac{\pi 2 x_2}{L}\right) & \dots & \sin\left(\frac{\pi 2 x_n}{L}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin\left(\frac{\pi n x_1}{L}\right) & \sin\left(\frac{\pi n x_2}{L}\right) & \dots & \sin\left(\frac{\pi n x_n}{L}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

I anàlogament,

$$y_t(x, 0) = \sum_{k=1}^n \frac{k c \pi}{L} B_k \sin\left(\frac{k \pi x}{L}\right)$$

$$d_i = y(x_i, 0) = \sum_{k=1}^n B_k \frac{k c \pi}{L} \sin\left(\frac{k \pi x_i}{L}\right)$$

Que expressat de forma matricial es:

$$\frac{c\pi}{L} \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi x_1}{L}) & \sin(\frac{\pi x_2}{L}) & \dots & \sin(\frac{\pi x_n}{L}) \\ 2\sin(\frac{\pi 2x_1}{L}) & 2\sin(\frac{\pi 2x_2}{L}) & \dots & 2\sin(\frac{\pi 2x_n}{L}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n\sin(\frac{\pi nx_1}{L}) & n\sin(\frac{\pi nx_2}{L}) & \dots & n\sin(\frac{\pi nx_n}{L}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Si ens centrem com avans en el cas de interpolar tres punts equiespaiats ($x_i = \frac{iL}{4}$), per simplificar podem suposar $c = 1$ i $g(x_i) = 0$. Els coeficients estan determinats per:

$$\begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{3\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \sin(\pi) & \sin(\frac{3\pi}{2}) \\ \sin(\frac{3\pi}{4}) & \sin(\frac{3\pi}{4}) & \sin(\frac{9\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Sigui

$$M_2 := \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{3\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \sin(\pi) & \sin(\frac{3\pi}{2}) \\ \sin(\frac{3\pi}{4}) & \sin(\frac{3\pi}{4}) & \sin(\frac{9\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Observem que $A^2 = 2Id$:

$$(M_2)^2 := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Així,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Com veiem el càlcul de coeficients es molt menys costós. En la figura 2.8 es comparen les dues solucions que hem calculat. I en la figura 2.9 s'observa la superficie que obtenim amb aquesta nova solució.

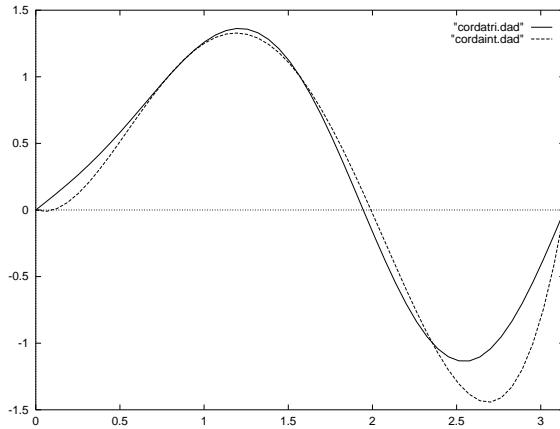


Figura 2.8: Comparació de les gràfiques de les dues solucions diferents per $c_1 = c_2 = 1$ i $c_3 = -1$

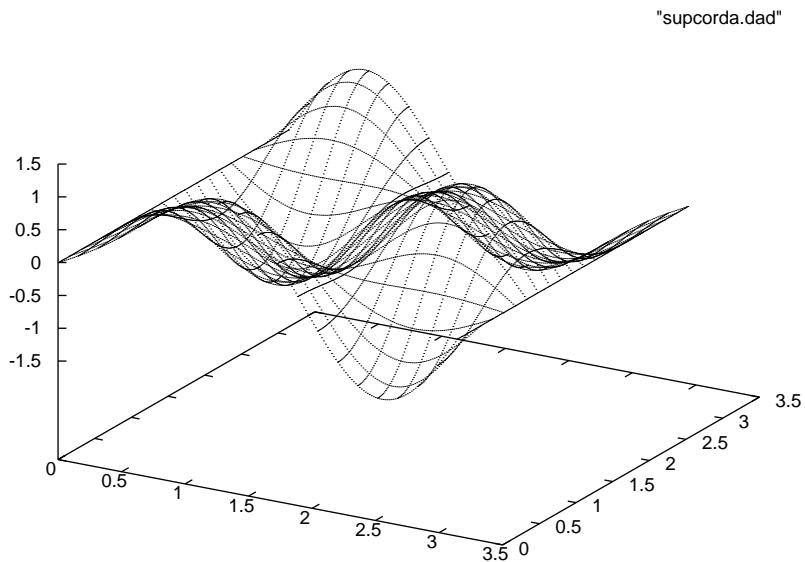


Figura 2.9: gràfiques de $u(x, t)$ amb $c_1 = c_2 = 1$ i $c_3 = -1$

Proposició 2.3.1 La propietat anterior és pot generalitzar, es a dir, sigui

$$M_n = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{1\pi}{n+1}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) & \dots & \sin\left(\frac{n\pi}{n+1}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi 2}{n+1}\right) & \sin\left(\frac{4\pi}{n+1}\right) & \dots & \sin\left(\frac{2n\pi}{n+1}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) & \sin\left(\frac{2n\pi}{n+1}\right) & \dots & \sin\left(\frac{n^2\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix}$$

llavors $(M_n)^2 = \frac{n+1}{2} Id$.

Demostració. Suposem $(M_n)^2 = (m_{lj})$, tenim

$$m_{lj} = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi kl}{N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi kj}{N+1}\right),$$

suposem primer que $l \neq j$. Si expresem el sinos com a combinació d'exponentials complexes $\left(\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)$ tenim

$$\begin{aligned} m_{lj} &= \sum_{k=1}^n \left(e^{i\frac{\pi lk}{n+1}} - e^{-i\frac{\pi lk}{n+1}} \right) \left(e^{i\frac{\pi jk}{n+1}} - e^{-i\frac{\pi jk}{n+1}} \right) \\ &= \frac{-1}{4} \sum_{k=1}^n \left(e^{i\frac{\pi(l+j)k}{n+1}} - e^{i\frac{\pi(l-j)k}{n+1}} - e^{-i\frac{\pi(l+j)k}{n+1}} + e^{-i\frac{\pi(l-j)k}{n+1}} \right) \\ &= \frac{-1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\left[e^{i\frac{\pi(l+j)}{n+1}} \right]^k - \left[e^{i\frac{\pi(l-j)}{n+1}} \right]^k - \left[e^{-i\frac{\pi(l+j)}{n+1}} \right]^k + \left[e^{-i\frac{\pi(l-j)}{n+1}} \right]^k \right) \end{aligned}$$

ara, fem el canvi $x = e^{i\frac{\pi(l+j)}{n+1}}$ i $y = e^{i\frac{\pi(l-j)}{n+1}}$, i sumem les sèries geomètriques que surten

$$m_{lj} = \frac{-1}{4} \left(\frac{x - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{y - y^{n+1}}{1 - y} - \frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{y^{n+1}}}{1 - \frac{1}{y}} + \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^{n+1}}}{1 - \frac{1}{x}} \right).$$

Ara si $l + j$ és parell, $l - j$ també ho és i

$$x^{n+1} = e^{i\frac{\pi(l+j)(n+1)}{n+1}} = (-1)^{l+j} = 1$$

$$y^{n+1} = e^{i\frac{\pi(l-j)(n+1)}{n+1}} = (-1)^{l-j} = 1$$

per tant

$$m_{lj} = \frac{-1}{4} \left(\frac{x - 1}{1 - x} - \frac{y - 1}{1 - y} - \frac{\frac{1}{y} - 1}{1 - \frac{1}{y}} + \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 - \frac{1}{x}} \right) = \frac{-1}{4} (-1 + 1 + 1 - 1) = 0.$$

Si $l + j$ és imparell, $l - j$ també ho és i

$$x^{n+1} = e^{i\frac{\pi(l+j)(n+1)}{n+1}} = (-1)^{l+j} = -1$$

$$y^{n+1} = e^{i\frac{\pi(l-j)(n+1)}{n+1}} = (-1)^{l-j} = -1$$

per tant

$$m_{lj} = \frac{-1}{4} \left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{y+1}{1-y} - \frac{\frac{1}{y}+1}{1-\frac{1}{y}} + \frac{\frac{1}{x}+1}{1-\frac{1}{x}} \right)$$

observem que

$$\frac{\frac{1}{x}+1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+x}{x-1} = -\frac{1+x}{1-x},$$

de la mateixa manera

$$\frac{\frac{1}{y}+1}{1-\frac{1}{y}} = -\frac{1+y}{1-y}$$

concluem doncs

$$m_{lj} = 0 \quad \forall j \neq l.$$

Veiem ara el valor dels elements diagonals

$$m_{jj} = \sum_{k=1}^n \sin^2 \left(\frac{\pi k j}{n+1} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} - \cos \left(\frac{2\pi k j}{n+1} \right) \right) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{2\pi k j}{n+1} \right).$$

Fem arguments com avans apliquem $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, farem el canvi $z = e^{i\frac{2\pi j}{N+1}}$ i utilitzarem que $z^{n+1} = 1$ quan convingui

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{2\pi k j}{n+1} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[e^{i\frac{2\pi j}{N+1}} \right]^k + \left[e^{-i\frac{2\pi j}{N+1}} \right]^k = \frac{1}{2} \left(\frac{x - x^{n+1}}{1-x} + \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^{n+1}}}{1-\frac{1}{x}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{1-x} + \frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{2}(-1-1) = -1. \end{aligned}$$

Per tant

$$m_{jj} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{2\pi k j}{n+1} \right) = \frac{n+1}{2}$$

□

Si tenim el problema:

1. $y_{tt} = c^2 y_{xx}$ (on $c^2 = T/\rho$)
2. $y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \forall t$ (extrems fixos)
3. $y\left(\frac{i}{n+1}L, 0\right) = c_i$ (posició inicial) $i = 1, 2, \dots, n$
4. $y_t(x, 0) = 0$ (velocitat inicial nul·la) $i = 1, 2, \dots, n$

Sabem que una solució del problema és

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^n \left(A_k \cos \left(\frac{k c \pi t}{L} \right) + B_k \sin \left(\frac{k c \pi t}{L} \right) \right) \sin \left(\frac{k \pi x}{L} \right).$$

Com $g(x) = 0$, tenim $B_k = 0$. Sigui $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top$ el vector de termes independents, i $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)^\top$ és vector de incognites. Satisfan el següent sistema

$$M_n A = c,$$

com $(M_n)^2 = \frac{n+1}{2} Id$, multiplicant per M_n als dos costats de la igualtat

$$\frac{n+1}{2} A = M_n(c) \Rightarrow A = \frac{2}{n+1} M_n(c)$$

2.4 Problemes ampliats

2.4.1 Vibració de cordes

Ara considerem el problema de vibració de cordes com a 2.1.1, però en amb una modificació en l'equació en derivades parcials, que representa el efecte de forces actuants sobre la corda. El problema a resoldre és:

- $y_{tt} + \frac{F(x,t)}{\rho} = c^2 y_{xx}$
- $y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \forall t$ (extrems fixos)
- $y(x, 0) = f(x)$ (posició inicial)
- $y_t(x, 0) = g(x)$ (velocitat inicial)

Suposem que existeix una solució $y(x, t)$ i que aquesta és dos cops continuament diferenciable respecte x i t . Fixat t , tenim que la seva sèrie de Fourier respecte x convergeix.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right), \quad B_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, t) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx.$$

Estudiem $B_n(t)$, si integrem per parts la integral i apliquem les condicions frontera,

$$\begin{aligned} B_n(t) &= -\frac{2}{n\pi} \left[y(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{x=0}^{x=L} + \frac{2}{n\pi} \int_0^L y_x(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} (y(0, t) + (-1)^n y(L, t)) + \frac{2}{n\pi} \int_0^L y_x(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^L y_x(x, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Ara integrem per parts un altre cop, tenim

$$\begin{aligned} B_n(t) &= -\frac{2L}{(n\pi)^2} \left[y_x(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{x=0}^{x=L} - \frac{2L}{(n\pi)^2} \int_0^L y_{xx}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{2L}{(n\pi)^2} \int_0^L y_{xx}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Com $y(x, t)$ és solució del problema, satisfa l'equació en derivades parcials tenim $y_{xx}(x, t) = \frac{1}{c^2} \left[y_{tt}(x, t) - \frac{F(x, t)}{c^2 \rho} \right]$, així

$$\begin{aligned} B_n(t) &= -\frac{2L}{(n\pi)^2} \int_0^L \frac{1}{c^2} \left[y_{tt}(x, t) - \frac{F(x, t)}{c^2 \rho} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \left(\frac{L}{nc\pi} \right)^2 \left[\frac{2}{L} \int_0^L y_{tt}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \frac{2}{L} \int_0^L \frac{F(x, t)}{\rho} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]. \end{aligned}$$

Anomenem $F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{F(x, t)}{\rho} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$. Per estudiar l'altre integral necessitem la següent proposició:

Proposició 2.4.1 (Continuitat i diferenciabilitat sota signe d'integral)
Si $\frac{\partial}{\partial t} h(x, t)$ és continua en el rectangle $R = \{(x, t) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, llavors $\int_a^b h(x, t) dx$ és diferenciable respecte t i

$$\frac{d}{dt} \int_a^b h(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} h(x, t) dx$$

Aquest és un resultat general de càlcul integral, per a la demostració de la proposició mirar en la pagina 69 del llibre de Càlcul Integral de Cerdà, ([1]).

Ara apliquem la proposició a l'integral i tenim

$$\frac{2}{L} \int_0^L y_{tt}(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{2}{L} \int_0^L y(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) = B_n''(t)$$

Per tant, tenim que $B_n(t)$ compleix la següent equació diferencial

$$B_n''(t) + \left(\frac{nc\pi}{L}\right)^2 B_n(t) = F_n(t), \quad (n = 1, 2, \dots)$$

De les condicions $y(x, 0) = f(x)$ i $y_t(x, 0) = g(x)$, deduim les condicions inicials per l'equació diferencial de $B_n(t)$

$$B_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n$$

$$B_n'(0) = \frac{2}{L} \int_0^L y_t(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = b_n$$

Ara necessitem una proposició d'equacions diferencial

Proposició 2.4.2 *Suposem que tenim l'equació diferencial*

$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad x(0) = x_0$$

on $x \in \mathbb{R}^n$, A és una matriu $n \times n$, i b una funció de \mathbb{R} a \mathbb{R}^n . Llavors la solució de l'equació diferencial ϕ és:

$$\phi(t, x_0) = \Phi(t) \left(x_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds \right)$$

ón $\Phi(t) = \exp(At)$

Demostració. Sabem que el sistema

$$\dot{y} = Ay, \quad y(0) = y_0$$

té solució $\psi(t, y_0) = \exp(At)y_0$. Suposem que la solució és de la forma

$$x(t) = \exp(At)c(t)$$

derivem respecte dels temps als dos costats tenim

$$Ax(t) + b(t) = \dot{x}(t) = A \exp(At)c(t) + \exp(At)\dot{c}(t) = Ax(t) + \exp(At)\dot{c}(t),$$

així

$$\dot{c}(t) = \exp(At)^{-1}b(t) \Rightarrow c(t) = c_0 + \int_0^t \exp(As)^{-1}b(s)ds$$

i la condició inicial

$$x_0 = x(0) = \exp(A0)c_0 = c_0$$

Per tant la solució és

$$x(t) = \exp(At)c(t) = \exp(At) \left(x_0 + \int_0^t \exp(As)^{-1}b(s)ds \right)$$

□

Utilitzem això per resoldre el nostre problema,

$$B_n''(t) + \left(\frac{nc\pi}{L}\right)^2 B_n(t) = F_n(t), \quad (n = 1, 2, \dots)$$

amb condicions inicials

$$B_n(0) = a_n, B_n'(0) = b_n.$$

Fem el canvi $x = x(t) = B_n(t)$, $y = y(t) = B_n'(t)$, i per comodotitat $\omega_n = \left(\frac{nc\pi}{L}\right)$ tenim el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_n(t) \end{pmatrix}$$

Calculem l'exponencial de la matriu, primer fiquem la matriu en forma de Jordan,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_n \\ -\omega_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \end{pmatrix}$$

ara l'exponencial

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{pmatrix}t\right) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega_n} \end{pmatrix} \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & \omega_n \\ -\omega_n & 0 \end{pmatrix}t\right) \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_n t) & \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \\ -\omega_n \sin(\omega_n t) & \cos(\omega_n t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i l'inversa

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{pmatrix}t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_n t) & -\omega_n \sin(\omega_n t) \\ \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} & \cos(\omega_n t) \end{pmatrix}$$

per tant la solució és

$$\begin{pmatrix} B_n(t) \\ B'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_n t) & \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \\ -\omega_n \sin(\omega_n t) & \cos(\omega_n t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(\omega_n s) & \frac{\sin(\omega_n s)}{\omega_n} \\ -\omega_n \sin(\omega_n s) & \cos(\omega_n s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_n s) & -\omega_n \sin(\omega_n s) \\ \frac{\sin(\omega_n s)}{\omega_n} & \cos(\omega_n s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F_n(s) \end{pmatrix} ds$$

Així finalment

$$B_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} - \cos(\omega_n t) \left(\int_0^t \frac{\sin(\omega_n s)}{\omega_n} F_n(s) ds \right)$$

$$+ \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \left(\int_0^t \cos(\omega_n s) F_n(s) ds \right),$$

ón

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{F(x, t)}{\rho} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \omega_n = \left(\frac{n c \pi}{L}\right).$$

I recordem que la solució del problema de cordes és

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Exemple 2.4.3 (Resonància) Suposem que tenim un problema de forces ampliat en que la força que actua sobre la corda, és periòdic en el temps, amb una certa freqüència ω , de la forma $F(x, t) = F(x) \sin(\omega t)$. Anem a estudiar les solucions en funció de la freqüència ω .

Solució. Els coeficients a_n i b_n depenen de la posició i la velocitat inicial que són desconegudes.

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Anem a calcular les funcions $B_n(t)$ en funció de $F(x)$. Primer calculem les funcions $F_n(t)$

$$F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{F(x, t)}{\rho} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{F(x) \sin(\omega t)}{\rho} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= c_n \sin(\omega t), \quad \text{on} \quad c_n := \frac{2}{L} \int_0^L \frac{F(x)}{\rho} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

ara,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\sin(\omega_n s)}{\omega_n} F_n(s) ds &= \frac{c_n}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n s) \sin(\omega s) ds \\ &= \frac{c_n}{2\omega_n} \left(\int_0^t \cos((\omega_n - \omega)s) - \int_0^t \cos((\omega_n + \omega)s) \right) \\ &= \begin{cases} \frac{c_n}{2\omega_n} \left(\frac{\sin((\omega_n - \omega)t)}{\omega_n - \omega} - \frac{\sin((\omega_n + \omega)t)}{\omega_n + \omega} \right) & \text{si } \omega_n \neq \omega \\ \frac{c_n}{2\omega_n} \left(t - \frac{1}{2\omega_n} \sin(2\omega_n t) \right) & \text{si } \omega_n = \omega \end{cases} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \int_0^t \cos(\omega_n s) F_n(s) ds &= c_n \int_0^t \sin(\omega_n s) \sin(\omega s) ds \\ &= \frac{c_n}{2} \left(\int_0^t \sin((\omega_n - \omega)s) - \int_0^t \sin((\omega_n + \omega)s) \right) \\ &= \begin{cases} \frac{c_n}{2} \left(\frac{1 - \cos((\omega_n - \omega)t)}{\omega_n - \omega} + \frac{\cos((\omega_n + \omega)t) - 1}{\omega_n + \omega} \right) & \text{si } \omega_n \neq \omega \\ \frac{c_n}{2} \left(\frac{1}{2\omega_n} \cos(2\omega_n t) - 1 \right) & \text{si } \omega_n = \omega \end{cases} \end{aligned}$$

Per tant ja podem escriure explicitament les funcions $B_n(t)$:

si $\omega \neq \omega_n$

$$\begin{aligned} B_n(t) &= a_n \cos(\omega_n t) + b_n \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} - \cos(\omega_n t) \left(\int_0^t \frac{\sin(\omega_n s)}{\omega_n} F_n(s) ds \right) \\ &\quad + \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \left(\int_0^t \cos(\omega_n s) F_n(s) ds \right) \\ &= a_n \cos(\omega_n t) + b_n \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \\ &\quad - \frac{c_n}{2\omega_n} \left(\frac{\sin((\omega_n - \omega)t)}{\omega_n - \omega} - \frac{\sin((\omega_n + \omega)t)}{\omega_n + \omega} \right) \cos(\omega_n t) \\ &\quad + \frac{c_n}{2} \left(\frac{1 - \cos((\omega_n - \omega)t)}{\omega_n - \omega} + \frac{\cos((\omega_n + \omega)t) - 1}{\omega_n + \omega} \right) \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}, \end{aligned}$$

si $\omega = \omega_n$

$$\begin{aligned} B_n(t) = & a_n \cos(\omega_n t) + b_n \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \\ & - \frac{c_n}{2\omega_n} \left(t - \frac{1}{2\omega_n} \sin(2\omega_n t) \right) \cos(\omega_n t) \\ & + \frac{c_n}{2} \left(\frac{1}{2\omega_n} \cos(2\omega_n t) - 1 \right) \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}. \end{aligned}$$

La solució del problema de cordes és

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

Per comoditat anomenem

$$\begin{aligned} K_n(t) = & - \frac{c_n}{2\omega_n} \left(\frac{\sin((\omega_n - \omega)t)}{\omega_n - \omega} - \frac{\sin((\omega_n + \omega)t)}{\omega_n + \omega} \right) \cos(\omega_n t) \\ & + \frac{c_n}{2} \left(\frac{1 - \cos((\omega_n - \omega)t)}{\omega_n - \omega} + \frac{\cos((\omega_n + \omega)t) - 1}{\omega_n + \omega} \right) \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}, \end{aligned}$$

i el terme resonant

$$\begin{aligned} R_n(t) = & - \frac{c_n}{2\omega_n} \left(t - \frac{1}{2\omega_n} \sin(2\omega_n t) \right) \cos(\omega_n t) \\ & + \frac{c_n}{2} \left(\frac{1}{2\omega_n} \cos(2\omega_n t) - 1 \right) \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}. \end{aligned}$$

Si existeix un n_0 tal que $\omega = \omega_{n_0}$, escrivim la solució com

$$\begin{aligned} y(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \\ & \sum_{n=1, n \neq n_0}^{\infty} K_n(t) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + R_{n_0}(t). \end{aligned}$$

Sigui H la extensió imparell periòdica de f , i sigui G la extensió imparell periòdica de g , ara utilitzan la solució de D'Alembert, tenim

$$\begin{aligned} y(x, t) = & \frac{1}{2} \left(H(x + ct) + H(x - ct) + \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds \right) \\ & + \sum_{n=1, n \neq n_0}^{\infty} K_n(t) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + R_{n_0}(t). \end{aligned}$$

Fins ara hem suposat que aquesta suma era convergent per arribar a la expressió de les solucions que hem obtingut. Ara amb aquesta expressió de la solució, podem mirar les condicions que hem de imposar per a que tingui sentit aquesta solució. Les condicions sobre f i g ja les hem discutit a la solució de d'Alembert, secció 2.1. Mirem les condicions sobre F .

Si $\omega = \omega_{n_0}$, per algú n_0 , com és només un terme, això no ens efectua a la discussió de la convergència del sumatori. Per aquesta discussió podem suposar doncs, que $\omega \neq \omega_n$ per tot n .

Observem que com $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$, i les funcions cosinus i sinus estan acotades per tot temps. Així tenim que

$$K_n(t) = O(n^{-2})O(c_n),$$

on c_n són coeficients de Fourier imparells de la funció $F(x)/\rho$. Per tant, si F és regular a troços, per exemple, la solució serà continua, sempre que les condicions sobre f i g permetin que sigui continua.

També cal comentar, que els termes $K_n(x, t)$ estan acotats per tot x i t . Però, en canvi, si existeix terme resonant R_{n_0} aquest fa que la solució no estigui acotada quan t augmenta. La idea és, que quan la freqüència (ω) de la força és un harmònic (ω_n), provoca resonància, entenent per resonància el fet de no tindre solucions acotades.

□

Exemple 2.4.4 Suposem que tenim una petita modificació del problema de vibració de cordes, que és suposar que un extrem no és fix, sinó que oscila periòdicament am una certa freqüència ω . El problema a resoldre és:

- $y_{tt} = c^2 y_{xx}$
- $y(0, t) = 0, \quad y(L, t) = \cos(\omega t) \quad \forall t$ (extrems fixos)
- $y(x, 0) = f(x)$ (posició inicial)
- $y_t(x, 0) = g(x)$ (velocitat inicial)

Veiem com podem transformar el problema a un problema de forces ampliades.

Solució. Observem primer que per a que les condicions frontera siguin coherents necessitem $f(L) = y(L, 0) = \cos(0) = 1$ i $f(0) = 0$. Ara fem el canvi

$$v(x, t) = y(x, t) - f(x) \cos(\omega t).$$

Mirem les condicions frontera d'aquest sistema.

$$v(0, t) = y(0, t) - f(0) \cos(\omega t) = 0$$

$$v(L, t) = y(L, t) - f(L) \cos(\omega t) = \cos(\omega t) - \cos(\omega t) = 0$$

$$v(x, 0) = y(x, 0) - f(x) \cos(0) = f(x) - f(x) = 0$$

$$v_t(x, 0) = y_t(x, 0) + \omega f(x) \sin(0) = g(x)$$

Ara només cal veure quina equació en derivades parcials satisfà $v(x, t)$.

$$\begin{aligned} v_{tt} &= y_{tt}(x, t) + \omega^2 f(x) \cos(\omega t) = c^2 y_{xx}(x, t) - \omega^2 f(x) \cos(\omega t) \\ &= v_{xx}(x, t) + (f''(x) + c^2 f(x)) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Per tant el problema inicial $y(x, t)$ és equivalent a un problema de forces ampliat $u(x, t)$. \square

2.4.2 Equació de la calor

Ara resolem la equació del calor amb una força actuan sobre el sistema.

- $u_t = ku_{xx} + F(x, t)$
- $u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t$ (extrems fixos)
- $u(x, 0) = f(x)$ (posició inicial)

El mètode de resolució és bastant semblant a l'anterior. Suposem que fixat t , la sèrie de Fourier de la solució $u(x, t)$ respecte x convergeix, i de la mateixa manera $F(x, t)$.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ amb } B_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ F(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ amb } F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Ara aplicant la equació en derivades parcials als dos desenvolupament en sèries de Fourier tenim

$$\sum_{n=1}^{\infty} B'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n^2\pi^2 k}{L^2} B_n(t) + F_n(t) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Igualant terme a terme en el desenvolupament de la sèrie de Fourier, per a cada n tenim la equació diferencial de primer ordre

$$B'_n(t) + \frac{n^2\pi^2 k}{L^2} B_n(t) = F_n(t).$$

Per a la condició inicial tenim de cada ecuació diferencial tenim

$$B_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n.$$

Es pot veure multiplicant per els dos costats l'equació diferencial per $\exp\left(\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}\right)$, l'equació diferencial és equivalent a resoldre

$$\frac{d}{dt} \left[B_n(t) \exp\left(\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}\right) \right] = F_n(t) \exp\left(\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}\right).$$

Finalment integrem respecte el temps als dos costat i apliquem la condició inicial $B_n(0) = a_n$ i tenim

$$B_n(t) = \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}\right) \left[a_n + \int_0^t F_n(s) \exp\left(\frac{n^2\pi^2 ks}{L^2}\right) ds \right].$$

I la solució serà

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

on

$$F_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Capítol 3

Introducció a la integral de Fourier

3.1 Convvolucions

Definició 3.1.1 Donades dues funcions f i g sobre \mathbb{R} definim el seu producte de convolució ($f * g$) com:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dy$$

quan la integral estigui definida.

Veiem ara una proposició util per veure casos on la integral estarà definida.

Proposició 3.1.2 1. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ i g acotada, o bé f acotada i $g \in L^1(\mathbb{R})$, llavors $f * g$ està definit.

2. Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ llavors $f * g$ està definit.

3. Si f continua a troços, i g acotada amb suport compacte, llavors $f * g$ està definit.

Demostració. Veiem primer (1). g acotada $\Rightarrow |g| < M$, per tant

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)g(y)|dy \leq M \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)|dy = M \int_{\mathbb{R}} |f(y)|dy < \infty$$

i l'altre cas es fa igual. Per veure (2) utilitzant la desigualtat de Cauchy-Schwarz tenim

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)g(y)|dy \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x - y)|^2 dy} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |g(x - y)|^2 dy} = \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty.$$

Finalment (3), utilitzant que g és acotada ($|g| < M$) i de suport compacte K .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dy &= \int_K |f(x-y)g(y)| \leq M \int_K |f(x-y)| \\ &\leq \mu(K) \sup_{x \in K} |f(x)| < \infty \end{aligned}$$

□

Proposició 3.1.3 *Algunes propietats bàsiques de l'operació de convolució són:*

- $f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h)$, per a tot a i b reals.
- $f * g = g * f$
- $f * (g * h) = (f * g) * h$

Demostració. La linealitat del producte de convolució es dedueix de la linealitat de l'integral.

$$\begin{aligned} (f * (ag + bh))(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y)(ag + bh)(y) dy \\ &= a \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy + b \int_{\mathbb{R}} f(x-y)h(y) dy \\ &= (af * g + bf * h)(x). \end{aligned}$$

Per veure la propietat commutativa fem el canvi de variable $z = x - y$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(z)g(x-z) dz = (g * f)(x).$$

I per veure la propietat associativa fem un canvi en l'ordre d'integració

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x-y)h(y) dy = \int_{\mathbb{R}} (g * f)(x-y)h(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x-y-z)f(z) dz h(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x-z-y)h(y) dy f(z) dz = \int_{\mathbb{R}} (g * h)(x-z)f(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} (g * h)(x-z)f(z) dz = (f * (g * h))(x). \end{aligned}$$

□

Veiem com se relacionen el producte de convolució i les derivades de una funció.

Teorema 3.1.4 *Suposem que f es diferenciable i que les convolucions $f * g$ i $f' * g$ estan ben definides. Llavors $f * g$ és diferenciable i $(f * g)' = f' * g$. Igualment, si g és diferenciable, llavors $(f * g)' = f * g'$.*

Demostració. Aplicant derivada sota el signe de integral tenim

$$\begin{aligned}(f * g)'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}(f(x-y)g(y))dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f'(x-y)g(y)dy = (f' * g)(x).\end{aligned}$$

I si g és diferenciable aplicant $f * g = g * f$ ens reduïm al cas anterior. □

Per al pròxim teorema introduim la contracció de una funció

$$g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}g\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Observem que

$$\int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\epsilon}g\left(\frac{x}{\epsilon}\right)dx = \int_{\mathbb{R}} g(y)dy.$$

I més preciassament

$$\int_a^b g_\epsilon(x)dx = \int_{\frac{a}{\epsilon}}^{\frac{b}{\epsilon}} g(y)dy.$$

Teorema 3.1.5 *Sigui $g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} g(y)dy = 1$, i sigui $\alpha = \int_{-\infty}^0 g(y)dy$ i $\beta = \int_0^\infty g(y)dy$. Suposem que f es continua a troços, i que, o bé f és acotada, o bé g té suport compacte, així que $(f * g)(x)$ està definit per a tot $x \in \mathbb{R}$. Llavors per a tot x tenim*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f * g_\epsilon)(x) = \alpha f(x+) + \beta f(x-).$$

En particular, si f és continua en x , llavors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f * g_\epsilon)(x) = f(x).$$

Demostració. Tenim

$$(f * g_\epsilon)(x) - \alpha f(x+) - \beta f(x-) = \int_{-\infty}^0 [f(x-y) - f(x+)] g_\epsilon(y) dy + \int_0^\infty [f(x-y) - f(x-)] g_\epsilon(y) dy$$

Si veiem que $\int_0^\infty [f(x-y) - f(x-)] g_\epsilon(y) dy$ tendeix a zero quan ϵ tendeix a zero, la altre part també ho farà ja que és el mateix resultat aplicat a $-f(x)$.

Fixem un $\delta > 0$, com f és continua a troços, sabem que existeix una constant $c > 0$ tal que $|f(x-y) - f(x-)| < \delta$ per a tot $0 < y < c$, així

$$\begin{aligned} \left| \int_0^c [f(x-y) - f(x-)] g_\epsilon(y) dy \right| &\leq \delta \int_0^c |g_\epsilon(y)| dy = \delta \int_0^{\frac{c}{\epsilon}} |g(y)| dy \\ &\leq \delta \int_0^\infty |g(y)| dy. \end{aligned}$$

Veiem que la part de la integral entre c i infinit també tendeix a zero. Si suposem que f està acotada ($|f| \leq M$), llavors

$$\left| \int_c^\infty [f(x-y) - f(x-)] g_\epsilon(y) dy \right| \leq 2M \int_c^\infty |g_\epsilon(y)| dy = 2M \int_{\frac{c}{\epsilon}}^\infty |g(y)| dy,$$

que, com $g \in L^1(\mathbb{R})$, tendeix a zero quan ϵ tendeix a zero. En el cas de que g sigui de suport compacte, en lloc de f acotada, la integral de c a infinit es igual a l'integral en $[c, \infty) \cap \text{suport}(g)$, que és compacte, per tant f està acotada en el domini de integració, i es reduïm al cas anterior. \square

Un altre resultat semblant és:

Teorema 3.1.6 *Sigui $g \in L^1(\mathbb{R})$ acotada i tal que $\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1$. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, llavors $(f * g)(x)$ està definit per a tot x , i $f * g_\epsilon$ convergeix en norma a f quan $\epsilon \rightarrow 0$.*

3.2 Transformada de Fourier

Definició 3.2.1 *Donada una funció f integrable en \mathbb{R} , definim la seva transformada de Fourier (que denotarem per \widehat{f}), com*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

Segons el context també es pot denotar per $\mathcal{F}[f(x)] = \widehat{f}(\xi)$.

Observem que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ llavors \widehat{f} està ben definida

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-i\xi x}| |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty,$$

i encara és més, com

$$|e^{-i\mu x} f(x) - e^{-i\xi x} f(x)| \leq 2|f(x)|$$

podem aplicar el teorema de la convegència dominada i per tant

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \xi} |\widehat{f}(\mu) - \widehat{f}(\xi)| &\leq \lim_{\mu \rightarrow \xi} \int_{\mathbb{R}} |e^{-i\mu x} f(x) - e^{-i\xi x} f(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\mu \rightarrow \xi} |(e^{-i\mu x} - e^{-i\xi x}) f(x)| dx = 0. \end{aligned}$$

Per tant \widehat{f} és continua.

Proposició 3.2.2 *Algunes propietats de la transformada de Fourier son (suposem $f \in L^1(\mathbb{R})$):*

$$1. \quad \begin{cases} \mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-ia\xi} \widehat{f}(\xi) \\ \mathcal{F}[e^{iax} f(x)] = \widehat{f}(\xi - a) \end{cases}$$

2. Si $\delta > 0$, i $f_\delta(x) := \frac{f(x/\delta)}{\delta}$, llavors

$$\widehat{f}_\delta(\xi) = \widehat{f}(\delta\xi) \text{ i } \mathcal{F}[f(\delta x)] = [\widehat{f}]_\delta(\xi).$$

3. Si f és regular a troços i $f' \in L^1(\mathbb{R})$, llavors

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\xi \widehat{f}(\xi)$$

i si $xf(x)$ és integrable, llavors

$$\mathcal{F}[xf(x)] = i\widehat{f}'(\xi).$$

4. Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, llavors

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}.$$

Demostració.

Comencem per (1), fem el canvi de variable $y = x - a$

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x-a) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} e^{-i\xi a} f(y) dy = e^{-i\xi a} \hat{f}(\xi)$$

$$\mathcal{F}[e^{iay} f(x)] = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{iay} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\xi-a)x} f(x) dx = \hat{f}(\xi - a).$$

Per veure (2) fem el canvi de variable $\frac{x}{\delta} = y$

$$\hat{f}_{\delta}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x/\delta) (dx/\delta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\delta\xi y} f(y) dy = \hat{f}(\delta\xi).$$

L'altre part és fa igual.

Per (3), observem primer que com $f' \in L^1(\mathbb{R})$ el límit quan x tendeix a infinit existeix ja que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(0) + \int_0^\infty f'(x) dx$ i a més és zero perquè f és integrable. De la mateixa manera $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Ara integraran per parts i utilitzant això tenim

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f'(x) dx = \left(\begin{array}{l} dv = f'(x) dx \quad v = f(x) \\ u = e^{-i\xi x} \quad du = -i\xi e^{-i\xi x} dx \end{array} \right) \\ &= [f(x)e^{-i\xi x}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} -i\xi e^{-i\xi x} f(x) dx = i\xi \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Per a l'altre part, com $xf(x)$ és integrable, i $xe^{-i\xi x} = i \frac{d}{d\xi}(e^{-i\xi x})$ podem intercanviar el signe d'integral amb el de derivació

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[xf(x)] &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} xf(x) dx = i \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\xi}(e^{-i\xi x} f(x)) dx \\ &= i \frac{d}{d\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) \right) = i \hat{f}'(\xi). \end{aligned}$$

Finalment per veure (4), intercanviem l'ordre de integració primer, i després fem el canvi $z = x - y$

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} (f * g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x-y) dx g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi(y+z)} f(z) dz g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi z} f(z) dz \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} g(y) dy = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

□

Exemple 3.2.3 Calclem la transformada de Fourier de la funció escalò

$$\mathcal{X}_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Solució.

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{X}_a}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_a(x) e^{-i\xi x} dx = \int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx \\ &= \left[\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{-a}^a = \frac{e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}}{-i\xi} = 2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.4 (Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, llavors

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$$

Demostració. Suposem primer que f és una funció simple, és a dir, suma finita de funcions escalò,

$$f(x) = \sum_{j=1}^k c_j \phi_j(x), \text{ ón } \phi_j(x) = \mathcal{X}_{a_j}(x - x_j),$$

Per l'exemple anterior i aplicant la Proposició 1.2.2, tenim $\widehat{\phi_j}(\xi) = 2e^{-ix_j\xi} \frac{\sin(a_j\xi)}{\xi}$, per tant

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \sum_{j=1}^k |c_j| |\widehat{\phi_j}(\xi)| \leq \sum_{j=1}^k |c_j| 2 |e^{-ix_j\xi}| \frac{|\sin(a_j\xi)|}{|\xi|} \leq \max_{j=1,\dots,k} (a_j) \frac{2k}{|\xi|}.$$

Si f no és una funció simple, sabem que existeix una successió $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx = 0$.

$$\sup_{\xi} |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx$$

que tendeix a zero quan n tendeix a infinit, per tant f_n tendeix a f uniformement. Per tant $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$

□

Exemple 3.2.5 Sigui $f(x) = e^{-ax^2/2}$ la funció gaussiana, calclem la transformada de Fourier de f .

Solució. Observem que la funció f compleix d'equació diferencial $f'(x) + axf(x) = 0$. Si apliquem la transformada de Fourier a l'equació anterior aplican la Proposició 1.2.2 tenim

$$i\xi\widehat{f}(\xi) + ia[\widehat{f}]'(\xi) = 0$$

la solució de l'equació diferencial es una altre gaussiana, $\widehat{f}(\xi) = Ce^{-\xi^2/2a}$. Per a determinar C , evaluem \widehat{f} en zero.

$$C = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2/2} dx = \sqrt{2/a} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Per tant $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\xi^2/2a}$

□

Veiem ara sota quines condicions a partir de la transformada de Fourier de una funció podem recuperar a la funció original.

Teorema 3.2.6 (Transformada inversa) Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$ i continua a troços, tal que $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$ per a tot x . LLavors

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2/2} \widehat{f}(\xi) d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

A més, si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, llavors f és continua i

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Demostració. Fixem $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2/2} \widehat{f}(\xi) d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} f(y) dy d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2/2} e^{-i\xi y} f(y) dy d\xi = (1) \end{aligned}$$

Observem que (1) és absolutament convergent, per tant podem intercanviar l'ordre de integració

$$(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2/2} e^{-i\xi y} d\xi \right) dy.$$

Per l'exemple anterior tenim que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2/2} e^{-i\xi y} d\xi = \mathcal{F}[e^{-\epsilon^2 \xi^2/2}](x-y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\epsilon} e^{-(x-y)^2/(2\epsilon^2)}.$$

Si definim $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, tenim $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\epsilon^2)}$. Observem també que $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$, i a més ϕ és una funció parell, per tant

$$\int_{-\infty}^0 \phi(x) dx = \int_0^\infty \phi(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Aplicant tot això

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2/2} \widehat{f}(\xi) d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2/2} e^{-i\xi y} d\xi dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} e^{-(x-y)^2/(2\epsilon^2)} = (f * \phi_\epsilon)(x). \end{aligned}$$

Ara estem sota condicions de aplicar el Teorema 1.1.5 i per tant

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2/2} \widehat{f}(\xi) d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f * \phi_\epsilon)(x) = \frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)].$$

Per acabar, si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ com

$$|e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2/2} \widehat{f}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi)|$$

podem aplicar el teorema de la convergència dominada i tenim

$$\frac{1}{2} [f(x-) + f(x+)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\epsilon^2 \xi^2/2} \widehat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(-x),$$

es a dir que f es la transformada de Fourier de una funció integrable, per tant f és continua. \square

Corol·lari 3.2.7 *Suposem que $\widehat{f} = \widehat{g}$, llavors $f = g$*

Demostració.

$$\widehat{f} = \widehat{g} \Rightarrow \widehat{f - g} = 0 \Rightarrow f - g = 0$$

\square

3.3 Transformada de Fourier a \mathbb{R}^n

Veiem com se amplia el concepte de producte de convolució i de transformada de Fourier a varies variables, i les propietats més bàsiques sobre aquestes. Per tant a partir d'ara, quan considerem una funció, per defecte serà de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}

Definició 3.3.1 Sigui $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, sigui f i g dues funcions de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} definim el producte de convolució a \mathbb{R}^n de f i g com:

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(y_1, \dots, y_n)g(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)dx_1 \dots dx_n.\end{aligned}$$

Analogament al cas de convolucions sobre \mathbb{R} es pot veure que

$$f * (ag + bh) = a(f * g) + b(f * h),$$

$$f * g = g * f, \quad (f * g) * h = f * (g * h).$$

Definició 3.3.2 La transformada de Fourier a \mathbb{R}^n es defineix

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f(x)] &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n)} f(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n.\end{aligned}$$

Amb la transformada de Fourier a \mathbb{R}^n també podem veure la propietat analoga de l'efecte de translació. Sigui $a = (a_1, \dots, a_n)$

$$\mathcal{F}[f(x - a)] = e^{-ia \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) \quad \text{i} \quad \mathcal{F}[e^{ia \cdot \xi} f(x)] = \widehat{f}(\xi - a).$$

Capítol 4

Aplicacions de la Integral de Fourier

Veurem algunes aplicacion de la integral de Fourier, primer veurem les aplicacions de la transformada en \mathbb{R} , en l'equació de Laplace i l'equació de la Calor en dominis que s'estenen a l'infinít. I després veiem les aplicacions que té la integral de Fourier en \mathbb{R}^n .

4.1 Equació de Laplace

L'equació de Laplace a \mathbb{R}^2 és $\Delta\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$. Sigui f una funció continua a \mathbb{R} , el problema de Dirichlet en el semiplà possitiu \mathbb{R}_+^2 és:

$$\begin{cases} \Delta\Phi(x, y) = 0 & -\infty < x < \infty \text{ i } y > 0 \\ \Phi(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Per solucionar el problema, per comoditat suposem primer que les integrals i les derivades que apareguen estan definides.

Considerem la transforma de Fourier de Φ sobre la variable x , és a dir:

$$\widehat{\phi}(\xi, y) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x, y) e^{-i\xi x} dx.$$

Ara veiem les relacions entre les parcial respecte x i y

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \widehat{\Phi}(\xi, y) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{\mathbb{R}} \Phi(x, y) e^{-i\xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x, y) (-\xi^2) e^{-i\xi x} dx = -\xi^2 \widehat{\Phi}(\xi, y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \widehat{\Phi}(\xi, y) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{\mathbb{R}} \Phi(x, y) e^{-i\xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Phi(x, y) e^{-i\xi x} dx = \widehat{\Phi_{yy}}(\xi, y).$$

Per tant, si apliquem la transformada de Fourier a l'equació de Laplace, tenim:

$$-\xi^2 \widehat{\Phi}(\xi, y) + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \widehat{\Phi}(\xi, y) = 0$$

Així el problema de Dirichlet s'ens transforma en

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \widehat{\Phi}(x, y) = -\xi^2 \widehat{\Phi}(\xi, y) & -\infty < \xi < \infty \text{ i } y > 0 \\ \widehat{\Phi}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

que fixat ξ , si ho considerem com a una equació diferencial en y la solució és:

$$\widehat{\Phi}(\xi, y) = c_1(\xi) e^{|\xi|y} + c_2(\xi) e^{-|\xi|y}$$

amb la condició inicial $c_1(\xi) + c_2(\xi) = \widehat{f}(\xi)$, per a la funció $\widehat{\Phi}(\xi, y)$ sigui integrable, prenem $c_1(\xi) = 0$ i $c_2(\xi) = \widehat{f}(\xi)$. Així

$$\widehat{\Phi}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi|y},$$

Sigui $P_y(x) = P(x, y) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$, afirmo $\widehat{P}_y(\xi) = e^{-|\xi|y}$. Per aquesta afirmació

$$\widehat{\Phi}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi|y} = \widehat{f}(\xi) \widehat{P}_y(\xi)$$

i l'apartat (4) de la Proposició 1.2.2, tenim

$$\Phi(x, y) = (f * P_y)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y f(x-t)}{\pi(t^2+y^2)} dt$$

Aquesta funció $P(x, y)$ s'anomena el nucli de Poisson per al semipla possitiu.

Per demostrar l'affirmació, calcularé la integral per teoria de residus. Necessitem la següent proposició i el següent teorema.

Proposició 4.1.1 *Suposem que g i h son funcions analítiques en z_0 , i que $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, i $h'(z_0) \neq 0$. Llavors $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ té un pol simple a z_0 i*

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

On, $\text{Res}(f; z_0)$ és el residu de f en z_0 .

Teorema 4.1.2 (Teorema dels residus) Sigui A una regio, i $z_1, \dots, z_n \in A$ punts diferents de la regio. Sigui f una funció analítica en $A \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Sigui γ una corba tancada en A homotòpica a un punt de A . Asumim que cap punt z_k està en γ . Llavors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f; z_k) I(\gamma; z_i),$$

On, $\text{Res}(f; z_0)$ és el residu de f en z_0 i $I(\gamma; z_i)$ és l'índex de γ respecte z_i .

La demostració d'aquesta teorema és pot trovar en qualsevol llibre sobre anàlisi complexa bàsica, com per exemple el llibre de Marsden i Hoffman (mirar pàgina 257 per la demostració del teorema i mirar pàgina 245 del mateix llibre per la proposició).

Ara ja estem en condicions de demostrar l'affirmació, fan un canvi de notació de y per a , sigui

$$P_a(x) = P(x, a) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$$

volem veure que

$$\widehat{P}_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{ae^{-i\xi x}}{\pi(x^2 + a^2)} dx = e^{-|\xi|a}.$$

Distingim casos segons ξ .

Primer suposem $\xi < 0$, tenim que $P_a(z) = \frac{ae^{-i\xi z}}{\pi(z^2 + a^2)}$ és analítica en $\mathbb{C} \setminus \{\pm ia\}$. Si $z = x + iy$

$$\frac{ae^{i\xi z}}{\pi(z^2 + a^2)} = \frac{ae^{-i\xi x} e^{xiy}}{\pi(z^2 + a^2)}$$

si $y = \text{Im}z \geq 0$ llavors,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} P_a(z) e^{-i\xi z} = 0.$$

Considerem la corba tancada γ_R , definida per

$$\gamma_R(t) = \begin{cases} R(-1 + 4t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ Re^{i(-\pi + 2\pi t)} & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Quan $R > a$, podem aplicar el Teorema dels Residus,

$$\int_{\gamma_R} \frac{ae^{i\xi z}}{\pi(z^2 + a^2)} dz = 2\pi \text{Res}_{z=ia} \frac{ae^{-i\xi z}}{\pi(z^2 + a^2)},$$

i aplicant la Proposició 4.1.1

$$2\pi \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{ae^{-i\xi z}}{\pi(z^2 + a^2)} = 2\pi i \left(\frac{ae^{a\xi}}{2\pi ia} \right) = e^{a\xi} = e^{-a|\xi|}.$$

Com $\lim_{|z| \rightarrow \infty} P_a(z)e^{-i\xi z} = 0$ tenim

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{ae^{-i\xi x}}{\pi(x^2 + a^2)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{ae^{i\xi z}}{\pi(z^2 + a^2)} dz = e^{-|\xi|a}$$

Mirem ara el cas $\xi > 0$, que és fa de forma analògica. $P_a(z) = \frac{ae^{-i\xi z}}{\pi(z^2 + a^2)}$ és analítica en $\mathbb{C} \setminus \{\pm ia\}$. Si $z = x + iy$

$$\frac{ae^{i\xi z}}{\pi(z^2 + a^2)} = \frac{ae^{-i\xi x} e^{xiy}}{\pi(z^2 + a^2)}$$

si $y = \operatorname{Im} z \leq 0$ llavors,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} P_a(z)e^{-i\xi z} = 0.$$

Ara considerem la corba tancada γ_R , simètrica respecte l'eix real a l'anterior, definida per

$$\gamma_R(t) = \begin{cases} R(-1 + 4t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ Re^{i(\pi - 2\pi t)} & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Quan $R > a$, podem aplicar el Teorema dels Residus, observem que la corba ara la recorem amb sentit contrari al anterior i per tant l'índex és -1 ,

$$\int_{\gamma_R} \frac{ae^{i\xi z}}{\pi(z^2 + a^2)} dz = -2\pi \operatorname{Res}_{z=-ia} \frac{ae^{-i\xi z}}{\pi(z^2 + a^2)},$$

i aplicant la proposició

$$2\pi \operatorname{Res}_{z=-ia} \frac{ae^{-i\xi z}}{\pi(z^2 + a^2)} = 2\pi i \left(\frac{ae^{-a\xi}}{-2\pi ia} \right) = -e^{-a\xi} = -e^{-a|\xi|}.$$

Com $\lim_{|z| \rightarrow \infty} P_a(z)e^{-i\xi z} = 0$ tenim

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{ae^{-i\xi x}}{\pi(x^2 + a^2)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{ae^{i\xi z}}{\pi(z^2 + a^2)} dz = e^{-|\xi|a}.$$

Falta només el cas $\xi = 0$, aquesta integral és immediata

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y^2 + 1} dy = \frac{\pi}{a}$$

4.2 Equació de la calor

Ara intentem resoldre l'equació de la calor, que ja hem vist en el segon capitol, però quan la vara s'esten a tota la recta real.

$$\begin{cases} u_t(x, t) = -ku_{xx}(x, t) & -\infty < x < \infty \text{ i } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Sabem d'avans que $k\widehat{u}_{xx}(\xi, y) = k\xi^2\widehat{u}(\xi, y)$, i analogament a avans tenim $\widehat{u}_t = \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t)$, per tant:

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} = -k\xi^2\widehat{u}(\xi, t), \quad \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi)$$

Ara si solucionem l'equació diferencial en t per cada x tenim

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi)e^{-k\xi^2 t},$$

si apliquem el teorema de inversió, tenim:

$$u(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-k\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi.$$

Mirem si podem escriure la solució de l'equació del calor en forma de producte de convolució. Per l'Exemple 1.2.3 si $g(x) = e^{-ax^2/2}$, llavors $\widehat{g}(\xi) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\xi^2/2a}$. Volem trobar una funció $K(x, t) = K_t(x)$ tal que $\widehat{K}_t(\xi) = e^{-k\xi^2 t}$, si prenem

$$K_t = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-x^2/4kt}$$

es comprova que satisfà la condició. Com $\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi)\widehat{K}_t(\xi)$, per tant:

$$u(x, t) = f * K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-(x-y)^2/4kt} dy$$

4.3 Difracció de Fraunhofer

Existeix un fenòmen òptic conegut com a difracció de Fraunhofer. Suposem que tenim una obertura, per la que passa la llum amb una certa intensitat a cara punt de la obertura, això és pot representar per una funció

$$\begin{aligned} A : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow A(x, y) \end{aligned}$$

El cas més sencil d'obertures, són les homogenies,

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \text{ està en l'obertura} \\ 0 & \text{si } (x, y) \text{ si no hi és.} \end{cases}$$

Per arguments físics, se pot veu la intensitat de obertura difractada és

$$I(u, v) = |\hat{A}(u, v)|^2.$$

Una manera de tindre una idea de que és veu a través de una obertura quan s'ha produit difracció és, pendre certa cota, i considerar els punts del pla tals que la seva intensitat es més gran qua aquesta cota com a visibles, i els altres com a no visibles.

Per veure aquests arguments i més informació sobre difració de Fraunhofer mirar els llibres de Walker o de Lipson and Lipson.

Exemple 4.3.1 (Obertura rectangular) Considerem ara la obertura,

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < a \text{ i } |y| < b \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Solució. Calclem la transformada de Fourier de la funció obertura:

$$\begin{aligned} \hat{A}(u, v) &= \int_{\mathbb{R}^2} A(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx = \int_{-a}^a e^{-iux} dx \int_{-b}^b e^{-ivy} dy \\ &= \left[\frac{e^{-iux}}{-iu} \right]_{-a}^a \left[\frac{e^{-ivy}}{-iv} \right]_{-b}^b = \left(\frac{e^{-iau} - e^{iau}}{-iu} \right) \left(\frac{e^{-ibv} - e^{ibv}}{-iv} \right) \\ &= 4 \left(\frac{\sin(au)}{u} \right) \left(\frac{\sin(av)}{v} \right). \end{aligned}$$

Per tant tenim

$$I(u, v) = 16 \frac{\sin^2(au)}{u^2} \frac{\sin^2(bv)}{v^2}$$

□

Exemple 4.3.2 (Obertura circular) Considerem ara la obertura,

$$A(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 < a^2 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

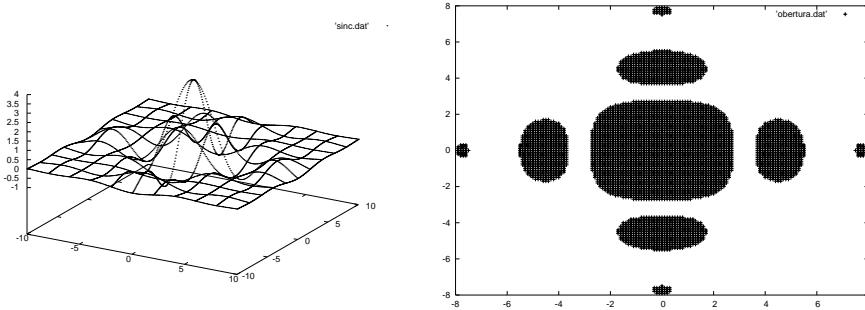


Figura 4.1: Gràfica de la transformada de Fourier de la obertura rectangular a l'esquerra, i a la dreta punts del pla (u, v) tals que $I(u, v)$ és més gran que una certa cota.

Solució. Denotem per $B_a(0)$, la bola de radi a centrada a l'origen. Calculem primer la transformada de la funció obertura A .

$$\widehat{A}(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(ux+vy)} f(x, y) dx dy = \int_{B_a(0)} e^{-i(ux+vy)} dx dy$$

Ara fem un canvi a polars,

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} u = \rho \cos(\phi) \\ y = \rho \sin(\phi) \end{cases}$$

així:

$$\widehat{A}(u, v) = \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ir\rho(\cos(\theta)\cos(\phi)+\sin(\theta)\sin(\phi))} r dr d\theta = \int_0^a r \left[\int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos(\theta-\phi)} d\theta \right] dr.$$

Fent un canvi de variable i utilitzant la periodicitat de la funció cosenos primer, fent un altre canvi de variable i utilitzant que $\cos(\theta-\pi) = -\sin(\theta)$ tenim

$$\int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos(\theta-\phi)} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos(\theta)} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir\rho\sin(\theta)} d\theta$$

Per solucionar el problema necessitem introduir el concepte de funcions de Bessel. La funció de Bessel d'ordre p és la solució $y(x)$ de l'equació diferencial

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad p = 0, 1, \dots$$

La expressió de la funció de Bessel d'ordre p en forma de sèrie de potències és

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+p}}{k!(p+k)!} \quad p = 0, 1, \dots$$

també és pot expressar la solució en forma integral,

$$J_p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin(\theta)} e^{-ip\theta} d\theta \quad p = 0, 1, \dots$$

I una de les propietats bàsiques que necessitarem és que

$$\frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x)$$

Per trobar demostració d'aquestes propietats, mirar el llibre de Walker, o el de Folland; ambdós tenen un capítol sencer dedicat a les funcions de Bessel.

Observem com expressar la integral que tenim com a funció de Bessel

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ir\rho \sin(\theta)} d\theta = 2\pi J_0(r\rho),$$

tornant al la transformada de la funció obertura, tenim

$$\widehat{A}(u, v) = \widehat{A}(\rho) = \int_0^a r \left[\int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \cos(\theta-\phi)} d\theta \right] dr = 2\pi \int_0^a r J_0(r\rho) dr.$$

Fent el canvi $s = \rho r$,

$$2\pi \int_0^a r J_0(r\rho) dr = \frac{2\pi}{\rho^2} \int_0^{\rho r} s J_0(s) ds$$

Com

$$\frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x J_0(x)$$

aplicant el teorema fonamental del càcul tenim

$$\frac{2\pi}{\rho^2} \int_0^{\rho r} s J_0(s) ds = \frac{2\pi}{\rho^2} [s J_1(s)]_0^{\rho r} = \frac{2\pi}{\rho} J_1(\rho r)$$

Així la transformada de la funció obertura és

$$\widehat{A}(\rho) = \frac{2\pi}{\rho} J_1(\rho r), \quad (\rho = \sqrt{u^2 + v^2})$$

i en conseqüència

$$I(\rho) = \left(\frac{2\pi}{\rho} \right)^2 (J_1(\rho r))^2, \quad (\rho = \sqrt{u^2 + v^2})$$

□

Veiem ara uns resultats sencill, sobre com es comporta la difració de Fraunhofer quan la nostra obertura són varietats obertures sencilles del mateix tipus.

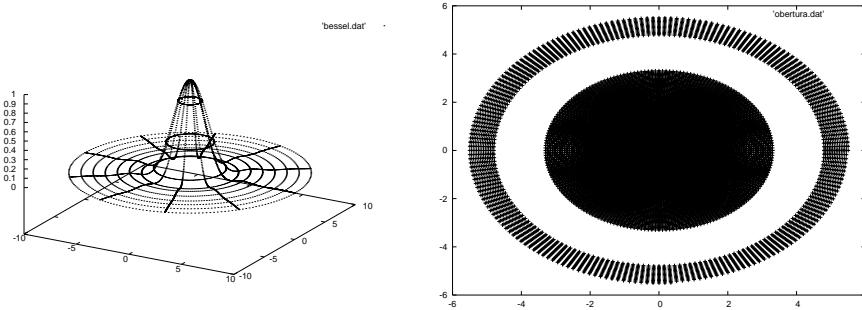


Figura 4.2: Primer tenim la funció $\frac{J_1(x)}{x}$, després la gràfica de la transformada de Fourier de la obertura circular, i els punts del pla (u, v) tals que $I(u, v)$ és més gran que una certa cota.

1. Interferència

Donada una obertura sencilla $A_1(x, y)$, suposem que la nostra obertura $A(x, y)$ és aquestes dues situades simètricament respecte l'origen, és a dir

$$A(x, y) = A_1(x + \frac{1}{2}d, y) + A_1(x - \frac{1}{2}d, y)$$

Aplicant les propietats bàsiques de la integral de Fourier, tenim

$$\widehat{A}(u, v) = (e^{i\pi du} + e^{-i\pi du}) \widehat{A}_1(u, v) = 2 \cos(\pi ud) \widehat{A}_1(u, v).$$

I en conseqüència

$$I(u, v) = 4 \cos^2(\pi ud) |\widehat{A}_1(u, v)|^2.$$

El terme $4 \cos^2(\pi du)$ s'interpreta com una interferència sobre $I_1(u, v)$

2. **Series d'obertures** Si en lloc de considerar dues obertures sencilles, en considerem N , la primera centrada a l'origen, i les altres situades sobre l'eix x a una distància d l'una de l'altra. Es a dir:

$$A(x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} A_1(x - nd, y).$$

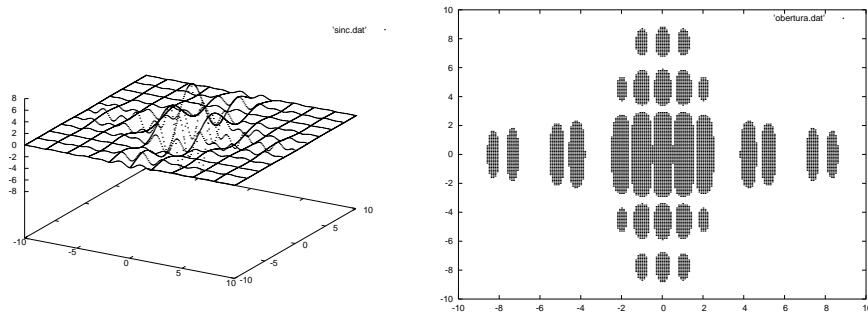


Figura 4.3: Gràfica de la transformada de Fourier de dues obertures rectangulars a distància tres cops igual al costat de l'obertura, i punts del pla (u, v) tals que $I(u, v)$ és més gran que una certa cota.

Calculem la transformada de Fourier de la obertura.

$$\begin{aligned}
 \widehat{A}(u, v) &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{F}[A_1(x - nd, y)] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-indu} \widehat{A}_1(u, v) \\
 &= \widehat{A}_1(u, v) \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-idu})^n = \widehat{A}_1(u, v) \frac{1 - e^{-iNdu}}{1 - e^{-idu}} \\
 &= \widehat{A}_1(u, v) \frac{e^{-iNud/2}}{e^{-iud/2}} \frac{\sin(Ndu/2)}{\sin(du/2)}
 \end{aligned}$$

Per tant

$$I(u, v) = \frac{\sin^2(Ndu/2)}{\sin^2(du/2)} I_1(u, v).$$

Dedotem per $F_N(du)$ la funció $\frac{\sin^2(Ndu/2)}{\sin^2(du/2)}$.

3. Xarxes d'obertures Ara fem com avans, però amb una xarxa de

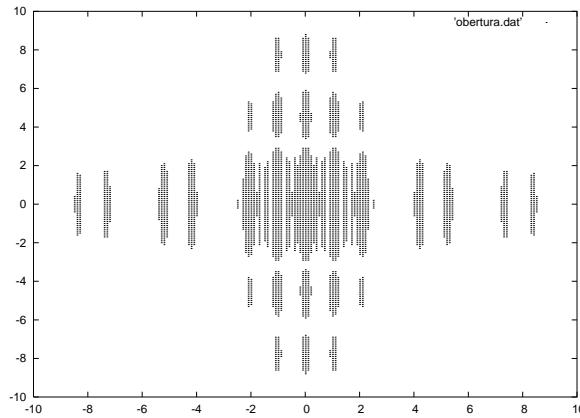


Figura 4.4: Punts del pla (u, v) tals que $I(u, v)$ és més gran que una certa cota, considerant una sèrie de quatre obertures rectangulars.

$N \times M$ obertures,

$$\begin{aligned}
 \widehat{A}(u, v) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mathcal{F}[A_1(x - nc, y - md)] \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-incu} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-imdv} \widehat{A}_1(u, v) \\
 &= \widehat{A}_1(u, v) \frac{e^{-iNud/2}}{e^{-iud/2}} \frac{e^{-iMvd/2}}{e^{-ivd/2}} \frac{\sin(Ncu/2)}{\sin(cu/2)} \frac{\sin(Mdv/2)}{\sin(dv/2)}.
 \end{aligned}$$

Per tant

$$I(u, v) = F_N(cu)F_M(dv)\widehat{A}_1(u, v).$$

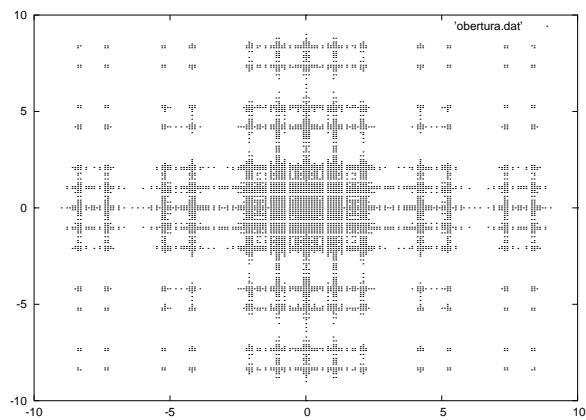


Figura 4.5: Punts del pla (u, v) tals que $I(u, v)$ és més gran que una certa cota, considerant una xarxa sis per sis d'obertures rectangulars.

Capítol 5

Història

5.1 Finals del segle XVIII: Els origens

L'origen de les sèries de Fourier es troben en el tractament d'equacions en derivades parcials com el problema de la corda vibrant o l'equació de la calor.

Les primeres aproximacions al problema van ser ralitzades per Jean Le Rond d'Alembert, en els seus articles del 1746 titulats "Investigaciones sobre la curva que forma una corda al vibrar". Primer considerava la alçada de la corda en n punts com a una funció del temps, i després feia tendir el número de punts a infinit per tractar la corda com a continua i deduia la equació en derivades parcials de la secció 2.1. En els seus treballs considerava que $y_t(0, x) = 0$, i arribava al resultat:

$$y(t, x) = \frac{1}{2}\phi(at + x) - \frac{1}{2}\phi(at - x),$$

amb

$$\phi(x) = f(x) \text{ per } 0 \leq x \leq L.$$

Finalment, com $y(t, L) = 0 \forall t$, deduia que ϕ ha de ser periòdica.

S'ha d'observar que els articles de d'Alembert es van realitzar avans del treball de Fourier. D'Alembert consideraba les funcions com expresions analíticas formades per processos d'àlgebra i càlcul infinitesimal.

Pocs mesos després de veure els articles de D'Alembert, Euler va escriure el article "Sobre la oscilació de cordes", presentat el 16 de maig de 1748. Encara que el mètode de solució seguia a D'Alembert, Euler tenia una idea diferent de quines funcions es podien admetre com a inicials, i en conseqüència, com a solucions de l'equació en derivades parcials. Les que ell admitia, que anomenava discontinues, son les que ara denominariem com a funcions continues a tot l'interval i analíticas a toços.

En un altre article del 1749, Euler va senyalar que tots els possibles moviments de la corda vibrant son periòdics respecte el tembs, per qualsevol funció f (posició inicial). També va senyalar que el movimet se pot expresar com a convinació dels periodes fonamentals, es a dir:

$$y(t, x) = \sum A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

imposan la posició inicial, obtenia:

$$y(0, x) = \sum A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

encara que no aclara si el signe de sumació se refereix a un número finit o infinit de termes.

El problema de la corda vibran va ser resolt tambe per Daniel Bernoulli. En un article de 1732-33 va afirmar que la corda vibrant podia tenir formes superiors de oscilació i que les diferents oscilacions poden existir a la vegada (entenent els sons fonamentals i armònics superior com a formes d'oscilació de la corda). Quan va llegir el primer artricle de D'Alembert de 1746 i el de Euler de 1749 sobre la corda vibrant va publicar les ideas que havia obtingut durant anys. Insisteix eque totes les possibles curvas inicials se poden representar de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

ja que existeixen suficients constants A_n com per a que la serie s'ajusti a qualsevol curva. En conseqüència, afirma, que tots els corresponents moviment de la corda vindran donats per

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

La discusió entre D'Alembert, Euler y Bernoulli va continuar una década sense arribar a un acord. El centre de la discució era la amplitud de funcions que es podian representar com a sèrie de sinus.

En 1759, Lagrange, es va unir a la discució. Encara que va criticar els mètodes d'Euler per restingir els resultats a curves analíticas, Lagrange va afirmar que demostrarria que la conclusió de Euler era correcta. El seus arguments per afirmar que els seus resultats eren correctes per qualsevol tipus de funció inicial continua, era que no utilitzava cap operació de derivació, encara que al intentar rigoritzar el seu argument se tenen que utilitzar aquestes operacions.

Lagrange va rebre critiques de D'Alembert i Bernoulli, i en 1760-61 va donar una solució diferent de la corda vibrant. Ell va resoldre el problema suposant $y_t(0, x) = g(x)$, en lloc de suposar que era nula com havia fet D'Alembert, i va concloure que la solució era

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \left[f(x+t) + f(x-t) - \int_0^{x+t} g(x)dx + \int_0^{x-t} g(x)dx \right];$$

i que admetia tot tipus de funcions inicials perquè no utilitzava cap condició d'analicitat, encara que si que les utilitzava indirectament. El debat va continuar fins 1770.

Molts dels arguments presentats per solucionar el problema presentats per cadascun d'ells era incorrecte i els resultats del segle XVIII no van ser definitius. Una de les principals qüestions, la representabilitat de una funció arbitraria mitjançant una sèrie trigonomètrica, no se va aclarar fins que Fourier es va ocupar de ella. Euler, D'Alembert y Lagrange van estar a punt de descobrir la importància de les sèries de Fourier. D'Alembert va encertar en el argument de que $y(t, x)$ ha de ser periòdica en x , però no va veure, que donada una funció arbitraria en $0 \leq x \leq L$ es pot repetir en cada interval $[nL, (n+1)L]$, amb n enter, i resulta així periòdica; això també es degut que no estava clar el concepte de funció, i una funció així no pot ser representada per una fórmula tancada.

5.2 Inicis del segle XIX: El treball de Fourier

El primer gran pas del segle el va fer Joseph Fourier. Fourier va estudiar el flux de la calor, que tenia interès com a problema pràctic en el tractament de metals en la indústria, i com a problema científic en el intent de determinar la temperatura del interior de la terra. Va presentar el seu assaig bàsic sobre la conducció de la calor a la Acadèmia de Ciències de París en 1807. El article va ser evaluat per Lagrange, Laplace i Legendre i va ser rebutjat. Tot hi això l'acadèmia va motivar a Fourier a desenvolupar les seves idees i va proposar el problema de la propagació del calor com a matèria del gran premi que seria assignat en 1812. Fourier va presentar la versió revisada el 1811 i jutjada per els anteriors va guanyar el premi, tot i la falta de rigor del seu article i per això no va ser publicada en les *Mémoires* de la academia. Fourier va continuar treballant sobre la conducció del calor i, en 1822, va publicar un dels classics de matemàtiques: *Théorie Analytique de la Chaleur*; que incorporava en la primera part del llibre el seu article de 1811 practicament sense canvis.

Un cos solid esta subjecte a la pèrdua o augment de calor, en general no està distribuïda uniformement, així que la temperatura T es una funció

del temps (t) i de la posició(x, y, z). Per principis físics, Fourier deduïa que la funció $T(x, y, z, t)$ en el cos sòlid tenia que complir l'equació en derivades parcials:

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = k^2 T_t,$$

un cas simplificat és considerar el problema en una barra de longitud L , i reduir el problema a:

$$T_{xx} = k^2 T_t,$$

que és el que resolem a la secció 2.2.

En el seu treball se enfrentava al problema, que ja havien enfrentat a Euler, D'Alembert i Bernoulli en el segle anterior, es a dir, quina amplitud de funcions f , podes ser expresades com:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)?$$

Fourier va arribar a la expressió

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^L f(s) \sin(ns) ds$$

aquesta conclusió no era nova, ja que Clairaut i Euler ja havien arribat a aquestes expressions en alguns dels seus treballs en el segle anterior. Els seus resultats, a més, estaven limitats perquè suposava que f tenia un número infinit de derivades.

Llavors Fourier va realitzar algunes observacions sorprenents. Va observar que cada B_n podia ser interpretada com l'àrea sota la corba $y = \frac{2}{\pi} f(x) \sin(nx)$ per x entre 0 i π . Aquesta area té sentit també per a funcions molt arbitràries. De aquí, Fourier va concloure així que tota funció $f(x)$ podia ser representada com

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \text{ per } 0 < x < \pi.$$

Fourier va prendre una gran varietat de funcions $f(x)$, va calcular els primers termes de B_n i va dibuixar la suma de uns pocs primers termes de la sèrie de sinus per cadascuna. A partir de la evidència gràfica va deduir que la sèrie representa $f(x)$ sobre $0 < x < \pi$, sense importar si la representació es manté fora del interval. Un cop va obtenir el resultat senzill de B_n , es va adonar que cada B_n es podia obtenir multiplicant la expressió de $f(x)$ com a suma de sinus a cada costat i integrant entre 0 i π . També señala que aquest mètode era aplicable a la representació

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx).$$

Després considerava una funció arbitraria en $[-\pi, \pi]$ i la separava com a suma de una funció parell i imparell, utilitzant la sèrie de sinus com a expressió de la part imparell i la de cosinus de la part imparell deduia que tota funció a $(-\pi, \pi)$ es pot expressar com

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)).$$

Ell mai va donar una prova completa de que una funció "arbitraria" se podia representar per una sèrie com l'última, i tampoc les condicions suficients per a que una funció és pugui desenvolupar en sèries de Fourier; encara que espava convençut de que això pasava per a qualsevol funció.

El treball de Fourier va incorporar diversos avanços importants. Va forçar una revisió del concepte de funcions i va marcar una separació de les funcions analítiques o funcions desenvolupables en sèries de Taylor. Ell mateix va notar que clarificava el problema de la corda vibrant a favor de Bernoulli.

Els seu treball no van ser acceptats ni publicats en un principi, tot i que es van fer accessibles a altres, i finalment van guanyar acceptació.

Fourier, en l'última part del seu article de 1811, va tractar la propagació del calor que se extené a dominis infinitos, veure la secció 4.2. La integral de Fourier, va ser rellevant perquè donava una eina per poguer resoldre equacions en derivades parcials de forma explícita. El desenvolupament de la integral de Fourier va ser fet per Fourier, Cauchy i Poisson, encara que no se pot assignar prioritat sobre cap d'ells, ja que tots va presentar assatjos orals a l'Academia de la Ciencias. Tots tres van publicar articles sobre el tema, però això va ser un temps després, i no se sap quina influència van rebre els uns d'els altres.

Després del treball de Fourier va quedar obert el problema de trobar condicions precises per la convergència de les sèries de Fourier. Cauchy i Poisson ho van provar sense èxit.

5.3 Mitjans del segle XIX

Dirichlet es va interesar per les sèries de Fourier després de coneixer a Fourier en París durant els anys 1822-25. Dirichlet va donar el primer conjunt de condicions suficients, en 1829, per a que la sèrie de Fourier representant una funció $f(x)$ convergeixi i ho fagi a $f(x)$. Veure el Teorema 1.2.7.

Riemann va estudiar durant un temps sota la direcció de Dirichlet en Berlín i va adquirir interès per la sèries de Fourier. En 1854 va empêndre una investigació que tenia com a finalitat trobar condicions necessàries i suficients perquè convergeixi la sèrie de una funció. No va poder, de fet encara no està

resolt. En canvi va demostrar el teorema que si $f(x)$ és acotada e integrable en $[-\pi, \pi]$ llavors els coeficients de Fourier de $f(x)$, A_n i B_n tendeixen a zero quan n tendeix a infinit. També va demostrar que la convergència de la sèrie de Fourier en un punt només depèn de la funció en l'entorn d'aquell punt.

La naturalesa de la convergència de les sèries de Fourier va rebre major atenció després de la introducció del concepte de convergència uniforme per Stokes i Seidel. Heine va notar, en un article en 1870, que la demostració usual de que una funció $f(x)$ acotada està representada unívocament en $(-\pi, \pi)$ era incompleta. Això va donar origen a una aparició de una nova sèrie de investigacions que buscaven establir la unicitat de la representació de una funció com a sèrie trigonomètrica i si els coeficients son necessàriament els coeficient de Fourier. Heine va demostrar que una sèrie de Fourier que representa una funció acotada que satisfà les condicions de Dirichlet es uniformement convergent en les parts de l'interval $[-\pi, \pi]$. També va demostrar que si la convergència és uniforme llavors la sèrie es única.

Els problemes associats amb la unicitat de les sèries trigonomètriques y las de Fourier van atraure a Georg Cantor, que va estudiar el treball de Heine. Va demostrar, en 1870, que quan $f(x)$ es representa per una sèrie trigonomètrica convergent per tot x , llavors la representació és única.

Durant aproximadament cincuenta anys després del treball de Dirichlet, es creia que la sèrie de Fourier de qualsevol funció continua en $[-\pi, \pi]$ convergia a la funció. Pero Du Bois-Reymond, en 1872, va donar un exemple de funció continua que no convergia en un punt.

Molts altres van investigar el problema de la unicitat a finals de segle XIX i principis del XX. Jordan, en 1881, va proporcionar una condició suficient en tèrmes dels concepte de funció de variació acotada, que ell mateix va introduir. Durant els anys seixanta i setanta es van examinar també les propietat dels coeficients de Fourier y entre els resultats importants obtinguts, estava el teorema de Parseval, veure 1.2.1 (encara que va ser introduit sota condicions més restrictives).

5.4 Finals de segle XIX principis de segle XX

La teoria de funcions de una o varies variables reals es va originar degut al intent de entendre i clarificar certs descobriments estranys que se havien fet al llarg del segle XIX, com funcions continua però no diferenciable en cap punt, sèries de funcions continues pero amb suma discontinua i sèries de Fourier entre d'altres. En aquells temps la anàlisi de Fourier resultava una eina molt útil per la matemàtica aplicada, però el estat de coneiximent de aquestes sèries no arribava a les exigències de un matemàtic pur. Durant els anys vui-

tante de aquest segle es van desenvolupar treballs sobre contingut i mesura. Posteriorment, Lebesgue a principis del segle XX (en 1903 va publicar els seus articles), va desenvolupar la seva teoria que era una generalització dels conceptes de mesura i integral de llavors. La integral de Lebesgue va resultar especialment útil en la teoria de sèries de Fourier, a la que el mateix Lebesgue va fer importants contribucions. Riemann va demostrar que els coeficients de Fourier A_n, B_n de qualsevol funció $f(x)$ acotada i integrable tendeixen a 0 quan n tendeix a infinit. Lebesgue, en 1903, va generalitzar aquest resultat demostrant de fet només es necessari que sigui integrable en el sentit que ell mateix havia introduït (aquest resultat es coneix com a teorema de Riemann-Lebesgue). En 1905 va fer una nova aportació donant una condició suficient per assegurar la convergència de les sèries de Fourier.

Un altre avanç important que posteriorment va ser utilitzat en l'anàlisi de Fourier va ser la teoria de sumabilitat, que estudiava quan se podien sumar sèries divergents en el sentit de Cauchy. Aquesta teoria va ser desenvolupat per varis matemàtics a partir de 1880. Leopold Fejér va contribuir a l'anàlisi de Fourier, en 1904, aplicant conceptes de sumabilitat en les sèries de Fourier, i va donar lloc a varíes investigacions exitoses sobre la sumabilitat de sèries.

Per acabar, cal comentar dos dels resultats més destacades del segle XX. El 1926 Kolmogorov va donar un exemple de funció integrable en $[-\pi, \pi]$, tal que la seva sèrie de Fourier divergia en tot punt; i el 1966 Carleson va demostrar que donada una funció $f \in L^2(-\pi, \pi)$, llavors la seva sèrie de Fourier convergeix excepte sobre un conjunt de mesura cero. Poc després, en 1968 Hunt va generalitzar aques resultat a L^p , amb $p > 1$.

Bibliografia

- [1] Cerdà, J., *Introducció a l'Anàlisi Funcional*, Barcelona: Edicions U.B. 2004.
- [2] Cerdà, J., *Càlcül Integral*, Barcelona: Edicions U.B. 2001.
- [3] Folland, G.B. *Fourier Analysis and its Applications*, California: Pacific Grove, 1992.
- [4] Katznelson, Y. *An Introducction to Harmonic Analysis*, New York: Dover 1976.
- [5] Kline, M. *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días*, Madrid: Alianza, 1992
- [6] Lipson, S.G. i Lipson, H. *Optical Physics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- [7] Marsden, J.E. i Hoffman, M.J. *Basic Complex Analysis*, New York: W.H. Freeman, 1998.
- [8] Ortega, J.M., *Introducció a l'Anàlisi Matemàtica*, Bellaterra: Publicacions U.A.B. 1990.
- [9] Papoulis, Athanasios, *The Fourier Integral and its Applications*, New York: McGraw-Hill, 1962.
- [10] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro: IMPA 1979.
- [11] Spivak, M., *Cálculo Infinitesimal*, Barcelona: Reverté 1998.
- [12] Torchinsky, A. *Real-variable Methods in Harmonic Analysis*, Indiana: Academic Press, 1986.
- [13] Walker, J.S. *Fourier Analisis*, New York: Oxford University Press 1988

- [14] Zygmund, A. *Trigonometric Series*, Cambridge: Cambridge University Press 1993