Geometría de Arakelov de Variedades Tóricas

Martín Sombra

Valparaíso 2/8/2012

I VARIEDADES TÓRICAS

$$f = 2 + x - y - 2xy + 3x^2y - xy^2$$

$$g = 1 - x + 2y - 3xy + 7x^2y + xy^2$$

Cuántas raíces tiene el sistema $f = g = 0$?

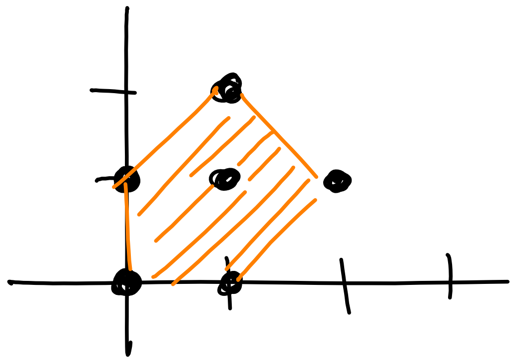
T (Kušnirenko 1975) $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ politopo

$f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ t.q. $N(f_i) \subset \Delta$

$$\#\{x \in (\mathbb{C}^\times)^n \mid f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0\} \leq n!\,\mathrm{vol}(\Delta)$$

$$f = 2 + x - y - 2xy + 3x^2y - xy^2$$

$$g = 1 - x + 2y - 3xy + 7x^2y + xy^2$$



$$\Longrightarrow \#\{f = g = 0\} \leq 2!\,\mathrm{vol}(\Delta) = 5 \quad (< \deg(f)\cdot\deg(g))$$

Ejemplos de vt's: $(\mathbb{C}^\times)^n$, $\mathbb{A}^n$, $\mathbb{P}^n$, $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$

Veronese, Segre, hipersup binomiales, ...

$\mathbb{T} \simeq (\mathbb{C}^\times)^n$ "toro"$/\mathbb{C}$ de dim n

<u>Def</u> Una variedad tórica (con toro $\mathbb{T}$).
es una variedad (normal) X tq

$$\mathbb{T} \subset X \quad \& \quad \mathbb{T} \circlearrowright X$$

Construcción

$M = \mathrm{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Z}^n \qquad M_{\mathbb{R}} = M \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$

$N = M^\vee = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, \mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z}^n \qquad N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$

Σ abanico en $N_{\mathbb{R}}$ (= complejo polyhedral de conos / $\mathbb{Q}$ estrictall convexos)

$\sigma \in \Sigma \rightsquigarrow X_\sigma$ vt afín

$\tau < \sigma \Rightarrow X_\tau$ abierto de X_σ

$$X_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$$

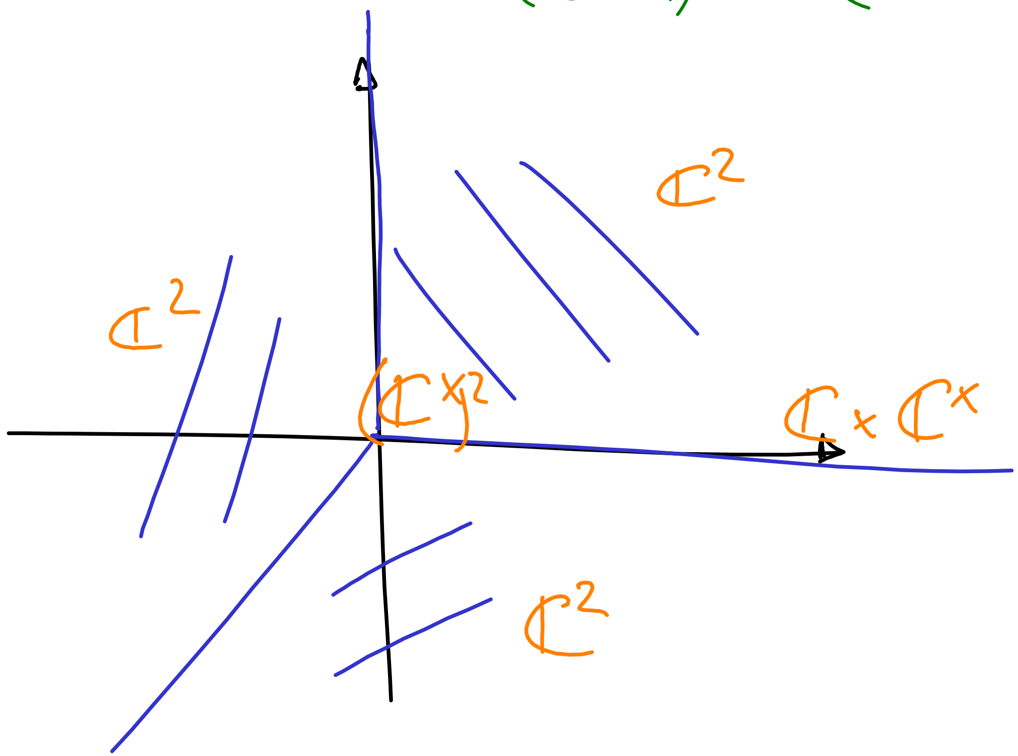
Ej: • $X_\Sigma = \mathbb{P}^1_\mathbb{C} = \{ (x_0 : x_1) \mid x_0 \neq 0 \text{ ó } x_1 \neq 0 \}$

$$\mathbb{C} \hookleftarrow \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}$$

$$x_1 \neq 0 \qquad x_0 x_1 \neq 0 \qquad x_0 \neq 0$$

Acción $\mathbb{C}^\times \circlearrowright \mathbb{P}^1$: $\quad t \cdot (x_0 : x_1) = (x_0 : t x_1)$

• $X_\Sigma = \mathbb{P}^2_\mathbb{C}$



$\{$abanicos en $N_{\mathbb{R}}\} \longleftrightarrow \{$vt con toro $T\}$

(Demazure)

$\rightsquigarrow$ las vt son "combinatorias"

- X_Σ compacta $\Longleftrightarrow$ $N_{\mathbb{R}}$ completo $\left(\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \sigma = N_{\mathbb{R}}\right)$

A partir de ahora: Σ completo

DIVISORES

Def Una función de soporte virtual $/\Sigma$

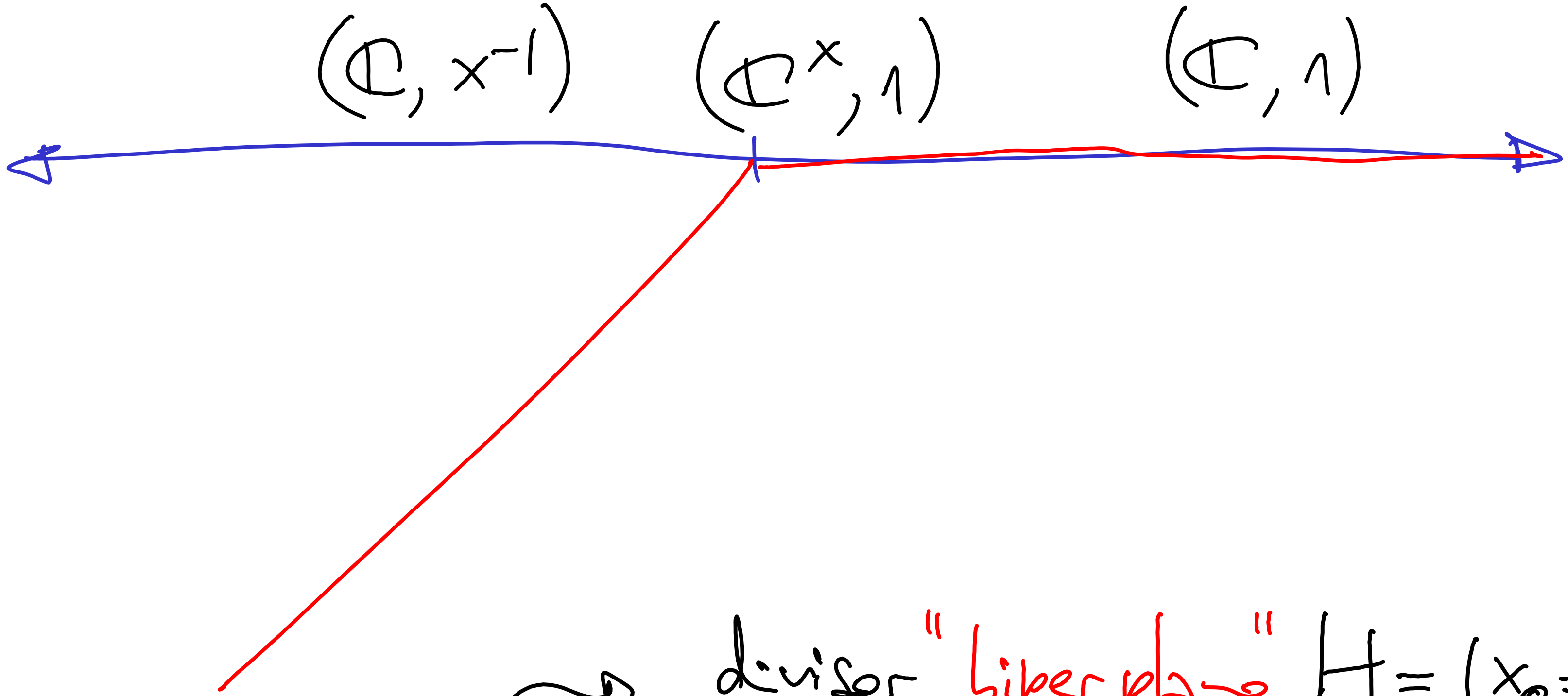
$\psi : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ $\qquad \psi|_{\sigma} = m_{\sigma} \in M \quad \forall \sigma \in \Sigma$

Una fsv define un divisor de Cartier $/ X_{\Sigma}$

$$D_{\psi} = \left(X_{\sigma}, \chi^{-m_{\sigma}} \right)_{\sigma \in \Sigma}$$

$$\{ \text{fsv} / \Sigma \} \longleftrightarrow \{ \text{divisores tóricos} / X_{\Sigma} \}$$

Ej:



$\rightsquigarrow$ divisor "hiperplano" $H = (x_0 = 0)$

SERIES LINEALES Y VOLUMEN

ψ define un polítopo $\Delta_\psi = \{ x \in M_{\mathbb{R}} \mid x \geq \psi \}$

- $\{ \chi^m \}_{m \in \Delta_\psi \cap M}$ $\mathbb{C}$-base de $L(D_\psi)$ (serie lineal)

Volumen de D:

$$\dim L(kD) = \mathrm{vol}(D) \frac{k^n}{n!} + O(k^{n-1})$$

- $\mathrm{vol}(D_\psi) = n!\, \mathrm{vol}_M(\Delta_\psi)$

Ej:
- $\Delta_{kH} = [0,k] \subset \mathbb{R}$
- $L(kH) = \langle 1, x, x^2, \dots, x^k \rangle_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}[x_0, x_1]_k$
- $\mathrm{vol}(H) = 1$

AMPLITUD

D define una "aplicación"

$$\varphi_D : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{\ell(D)-1}$$

D amplio si $\exists k \geq 1$ tq φ_{kD} embedding

- D_ψ amplio $\iff$ ψ estricta// cóncava

  (ψ cóncava, $\sigma \neq \sigma'$ maximales $\Rightarrow m_\sigma \neq m_{\sigma'}$)

D nef si $\deg_D(Y) \geq 0$ $(\forall Y)$

- D_ψ nef $\iff$ ψ cóncava

TEORÍA DE INTERSECCIÓN

$Y \subset X$ subvariedad $\rightsquigarrow$ $\deg_D(Y) \in \mathbb{Z}$ grado de Y

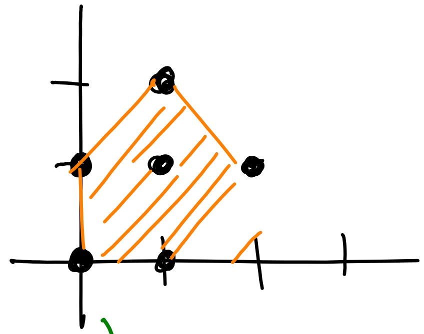
Si φ_D es embedding

$\deg_D(Y) = \# \, Y \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{\dim(Y)}$ hiperplanos genéricos

Hilbert-Samuel: D amplio $\Rightarrow$ $\deg_D(X) = \mathrm{vol}_D(X)$

- ψ cóncava $\Rightarrow$ $\deg_D(X) = n! \, \mathrm{vol}_M(\Delta_\psi)$

SISTEMAS DE ECUACIONES



$$\varphi : (\mathbb{C}^\times)^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$$

$$(x,y) \longmapsto (x^0y^0 : x^1y^0 : x^0y^1 : x^1y^1 : x^2y^1 : x^1y^2)$$

$$\varphi(f=g=0) = \operatorname{Im}\varphi \cap \{F=G=0\}$$

$$F = 2y_0 + y_1 - y_2 - 2y_3 + 3y_4 - y_5 \qquad G = \cdots$$

$S = \overline{\operatorname{Im}\varphi}$ vt con politopo Δ

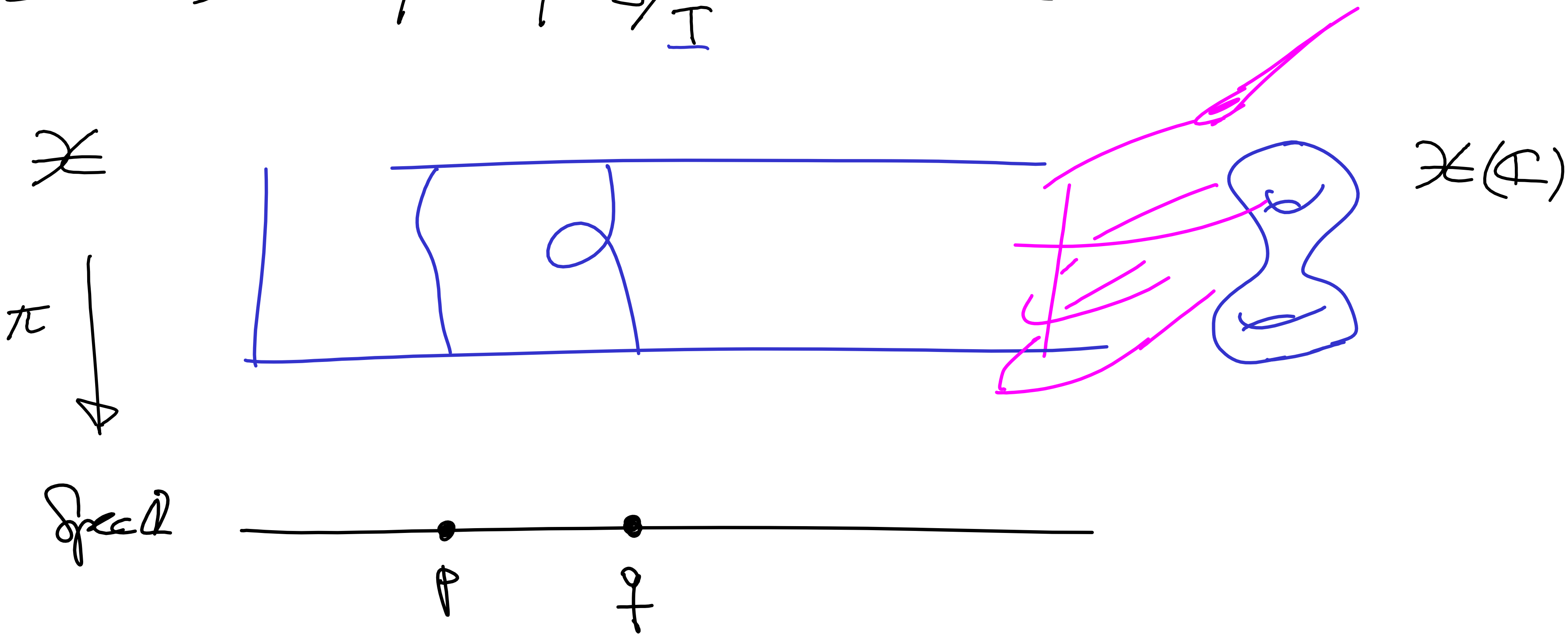
$$\Rightarrow \#\{f=g=0\} \leq \deg(S) = 2!\,\mathrm{vol}(\Delta) = 5$$

II Geometría de Arakelov

$\mathcal{X}^{n+1}$ var proyectiva / $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$

Carta afín $\mathcal{U} = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_N]/I\right)$

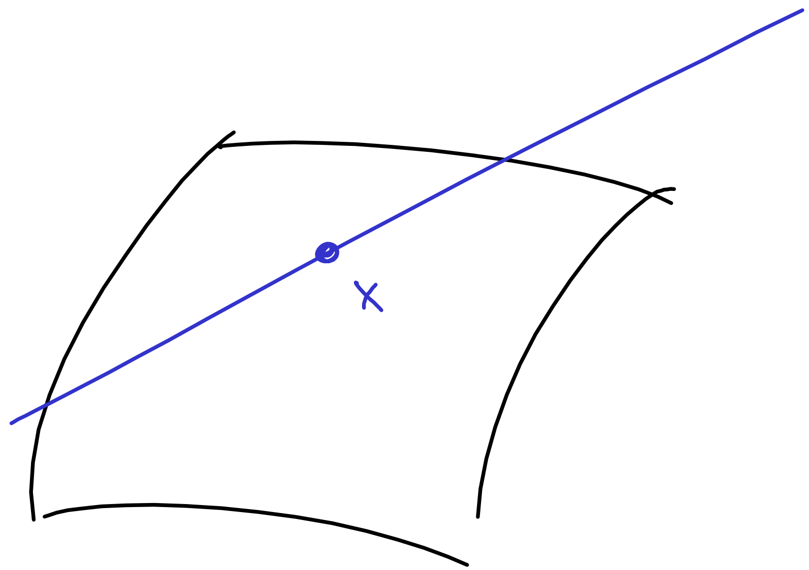
$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_N]/I$ induce



DIVISORES METRIZADOS

Un **divisor metrizado** es $\overline{D} = (D, \|\cdot\|)$ con

- D divisor de $\mathcal{X}$
- $\|\cdot\|$ métrica en $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$ sobre $\mathcal{X}(\mathbb{C})$



SERIES LINEALES Y VOLUMEN ARITMÉTICO

$$\overline{L}(\overline{D}) = \left\{ f \in L(D) \;\middle|\; \sup_{x \in \mathcal{X}(\mathbb{C})} \| s_f(x) \| \leq 1 \right\} \subset K(\mathcal{X})$$

$$\overline{L}(k\overline{D}) = \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{D}) \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} + o\left(k^{n+1}\right)$$

TEORÍA DE INTERSECCIÓN

Si $\|\cdot\| \geq 0$ (semipositividad)

$\rightsquigarrow$ $\lambda_{\overline{D}}$ medida de proba en $\mathcal{X}(\mathbb{C})$

$h_{\overline{D}}(Y)$ altura de $Y \subset \mathcal{X}(\overline{\mathbb{Q}})$

Ej $\mathcal{X} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$

$L \in \mathbb{C}[x_0, x_1]_1 \rightsquigarrow \|s_L(x_0 : x_1)\| = \dfrac{|L(x_0, x_1)|}{\max |x_0|, |x_1|}$ métrica en $\mathcal{O}(H)$

- $\lambda_{\overline{H}} = \mathrm{Haar}_{S^1}$
- $(a:b) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q})$ $h_{\overline{H}}(a:b) = \log \max(|a|, |b|)$ altura de Weil

POSITIVIDAD ARITMÉTICA

Def • $\overline{D}$ amplio si D amplio, $\|\cdot\| \geq 0$

& $(\forall \overline{E})(\exists k \gg 0)$ $\overline{E} + k\overline{D}$ "generado por secciones"

• $\overline{D}$ nef si D nef, $\|\cdot\| \geq 0$

& $h_{\overline{D}}(Y) \geq 0 \quad \forall Y \subset \mathcal{X}(\overline{\mathbb{Q}})$

• $\overline{D}$ big si $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{D}) > 0$

Mínimo esencial

$$\theta \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathcal{X}_{\leq \theta} = \{ x \in \mathcal{X}(\overline{\mathbb{Q}}) \mid h_{\overline{D}}(x) \leq \theta \}$$

$$\mu^{ess}_{\overline{D}} \mathcal{X} = \inf \{ \theta \mid \mathcal{X}_{\leq \theta} \text{ denso} \}$$

T (Zhang 1995) $\overline{D}$ amplio

$$\mu^{ess}_{\overline{D}}(\mathcal{X}) \leq \frac{h_{\overline{D}}(\mathcal{X})}{\deg_D(\mathcal{X}_{\mathbb{Q}})} \leq (n+1)\, \mu^{ess}_{\overline{D}}(\mathcal{X})$$

EQUIDISTRIBUCIÓN DE PUNTOS PEQUEÑOS

G_x órbita por $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ de $x \in \mathcal{X}(\overline{\mathbb{Q}})$

$\lambda_x := \frac{1}{\# G_x} \sum_{y \in G_x} \delta_y$ medida discreta en $\mathcal{X}(\mathbb{C})$

$\underline{\mathrm{T}}$ (Yuan 2008) $\overline{D}$ big $(x_k)_{k \geq 1}$ sucesión "genérica"

tq $h_{\overline{D}}(x_k) \xrightarrow[k]{} \mu^{ess}_{\overline{D}}(\mathcal{X}) \Longrightarrow \lambda_{x_k} \xrightarrow[k]{} \mu_{\overline{D}}^{2}$

Ej (Bilu 1997) $x_k \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ tq $h(x_k) \to 0$

$\Rightarrow \lambda_{x_k} \to Haar_{S^1}$

III ARITMÉTICA DE VARIEDADES TÓRICAS

con J.I. Burgos (Madrid) & P Philippon (París)

"Ejemplos"

$\mathbb{P}^n$ + altura de Weil

$\mathbb{P}^n$ + altura Euclidiana

⚠ el abanico y la fsv no clasifican todas las estructuras

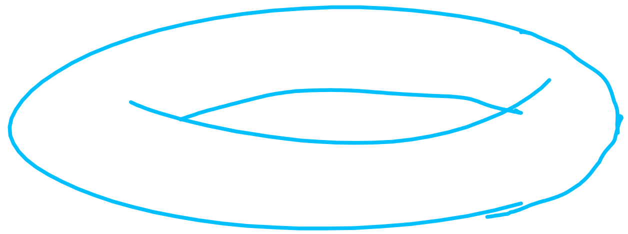
Consideramos $\mathbb{Z}$:

$$\Sigma \rightsquigarrow \mathcal{X}_\Sigma$$ esquema tórico / $\mathbb{Z}$

$$\psi \rightsquigarrow D_\psi$$ divisor

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{T}(\mathbb{C}) \mid |x| = 1\} \simeq (S^1)^n$$

toro compacto



$\|\cdot\|$ métrica en $\mathcal{O}(D_\psi)(\mathbb{C})$ tórica $=$ $\mathbb{S}$-invariante

Construcción

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{T} \arrow[d, "\mathrm{val}"'] \arrow[dr, dashed, "-\log\|s_\varphi\|_f"] & \\
 & N_{\mathbb{R}} \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
\qquad
x \longmapsto -\log|x|
$$

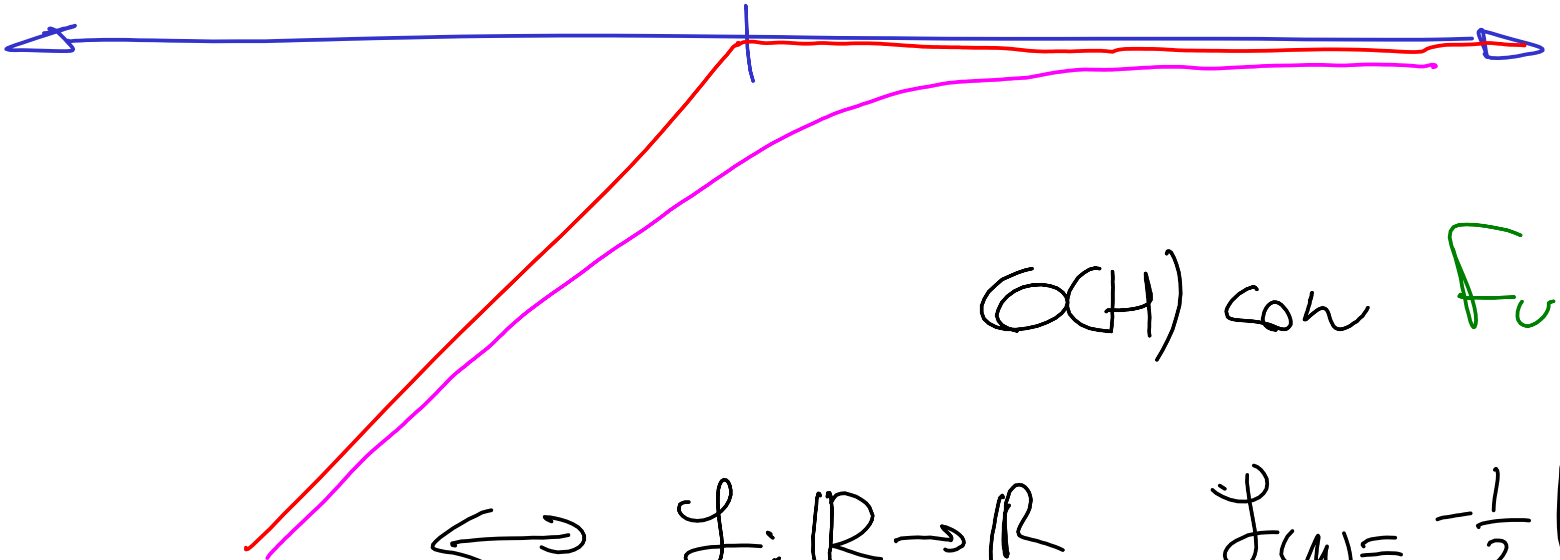
$$
\left\{ \begin{array}{c} \text{fciones continuas} \\ N_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{métricas tóricas} \\ \text{en } \mathcal{O}(D_{\mathbb{T}}) \end{array} \right\}
$$

Pb: ¿Cuáles $\|\cdot\|_f$ se extienden a $X_\Sigma(\mathbb{C})$?

T1 (métricas ≥ 0)

$$\left\{ \begin{array}{l} f: N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \text{ cóncava} \\ \text{tq } f - \psi \text{ acotada} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{métrica tórica} \geq 0 \\ \text{en } \mathcal{O}(D)(\Gamma) \end{array} \right\}$$

Ejemplo



$\mathcal{O}(H)$ con Fubini Study

$$\longleftrightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(u) = -\frac{1}{2} \log\left(1 + e^{-2u}\right)$$

T2 (medidas)

$\|\cdot\|_g$ métrica tórica ≥ 0 en $\mathcal{O}(D)(\mathbb{C})$

Sea $E \subset N_{\mathbb{R}}$ boreliano

$$\mathrm{vol}_X \lambda\,(E) = n!\, \underbrace{\mathrm{vol}_M\big(\mathrm{grad}(f)(E)\big)}_{\text{Monge-Ampère}}$$

Ej

Sea $f : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ cóncava t.q. $f - \psi$ acotada

El dual de Legendre-Fenchel es

$$f^{\vee} : \Delta_{\psi} \to \mathbb{R} \qquad f^{\vee}(x) = \inf_{u \in N_{\mathbb{R}}} \langle x, u \rangle - f(u)$$

Es el análogo en geom aritmética de Δ_{ψ}

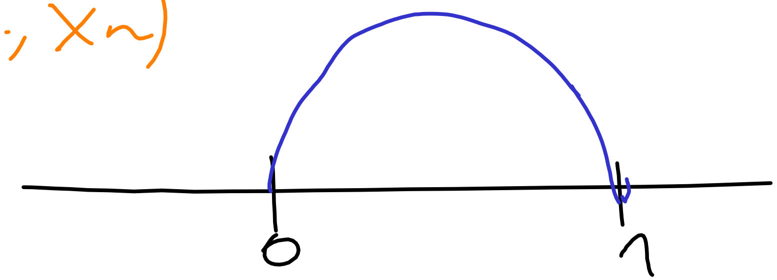
T3 (alturas) $\overline{D} = (D, \|\cdot\|_f)$ divisor tórico ≥ 0

$$h_{\overline{D}}(\mathcal{X}_{\Sigma}) = (n+1)! \int_{\Delta_{\psi}} f^{\vee} \, d\mathrm{vol}_M$$

Ejemplo

H divisor hiperplano de $\mathbb{P}^n$ con Fubini-Study

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(-\sum_{i=0}^{n} x_i \log x_i\right)}_{\text{entropía de } (x_0,\dots,x_n)} \qquad \left(x_0 = 1-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$



$$h_{FS}(\mathbb{P}^n) = \frac{(n+1)!}{2}\int_{\Delta^n} \mathcal{E}(x)\,dx = \frac{(n+1)}{2}\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} \qquad \left(= \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \dots\right)$$

T4 (positividad)

Sea $\overline{D} = (D, \|\cdot\|_f)$ divisor tórico.

(i) Sea $\Theta = \{ x \in \Delta_\psi \mid f^\vee(x) \geq 0 \}$

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{D}) = (n+1)! \int_\Theta f^\vee \, d\mathrm{vol}_M$$

(ii) $\overline{D}$ amplio $\iff$ ψ estrictall cóncava

f cóncava

$f^\vee(x) > 0 \quad \forall x \in \Delta_\psi$

(iii) $\overline{D}$ nef $\iff$ ψ estrictal/ cóncava

f cóncava

$f^\vee(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Delta_\psi$

(iv) $\overline{D}$ big $\iff$ $\exists\, x \in \Delta_\psi$ tq $f^\vee(x) > 0$

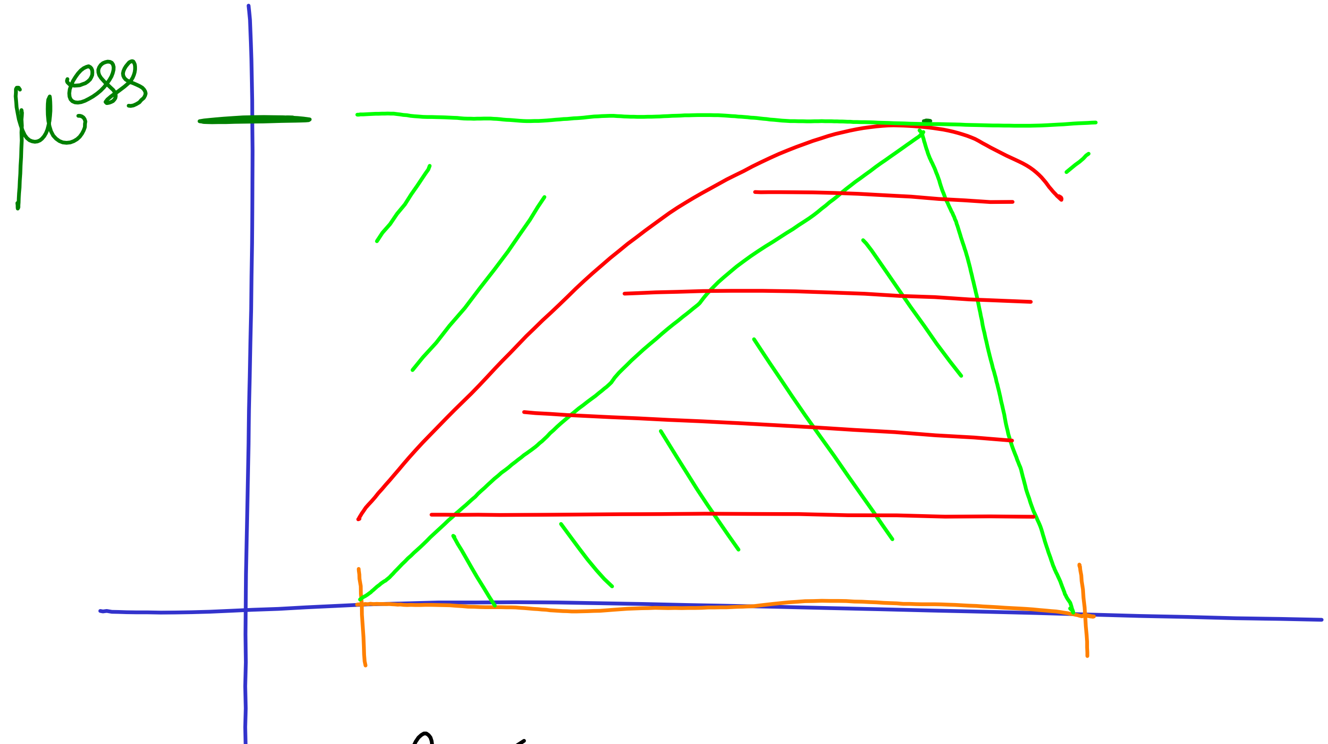
TS (mínimo esencial)

$$\mu^{ess}_{\overline{D}}(\mathcal{X}_\Sigma) = \sup_{x \in \Delta_\psi} f^\vee(x)$$

APLICACIONES

A1 Optimalidad del teor de mínimos sucesivos

$\mathcal{D}$ amplio



$$\mu^{ess}(X) \leq \frac{h(X)}{\deg(X)} \leq (n+1)\,\mu^{ess}(X)$$

A2 El teor de equidistribución en el caso tórico

Si $\exists\, (x_k)_{k\geq 1}$ sucesión genérica en $X_\Sigma(\overline{\mathbb{Q}})$

tq
$$h_{\overline{D}}(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{h_{\overline{D}}(X)}{(n+1)\deg_D(X)}$$

$$\Longrightarrow \quad \mu^{ess}_{\overline{D}}(X) = \frac{h_{\overline{D}}(X)}{(n+1)\deg_D(X)}$$

$$\Longrightarrow \quad \|\cdot\| = \gamma \cdot \|\cdot\|_{can}$$

se reduce al teor de Bilu.

The End !