Coloquio UBA 11/11/2010

Aritmética de variedades tóricas y análisis convexo

I. Geometría

I.1 Polinomios y politopos de Newton

Empezamos con un polinomio o con una familia de polinomios.

De qué dependen la geometría de los objetos que definen?

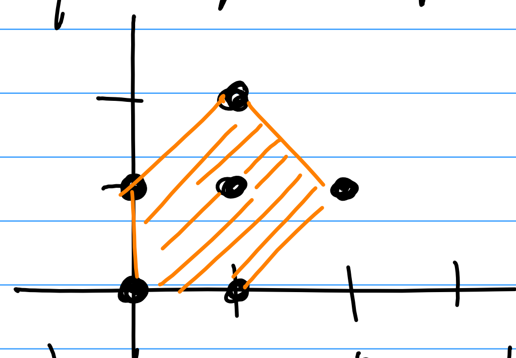
|| variedades

El grado es importante pero si se quiere mejores resultados, hay que usar invariantes más finos.

Ej: politopo de Newton = envolvente convexa de los exponentes con coef $\neq 0$

$$f = 2 + x - y - 2xy + 3x^2y - xy^2$$

$N(f) =$



T (Kushnirenko 1975) $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ politopo entero

$f_1, \dots, f_n \in \mathbb{Q}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ tq $N(f_i) \subset \Delta$

$\Rightarrow \#\{x \in (\mathbb{C}^\times)^n : f_i(x) = 0 \ \forall i\} \leq n! \operatorname{Vol}(\Delta)$ (*)

Es = si f genérico en Δ (*)

Ej $\quad g = 1 - x + 2y - 3xy + 7x^2y + xy^2$

$$\Rightarrow \#\{f = g = 0\} = 2!\,\mathrm{Vol}\,\Delta = 5$$

I.2 Variedades tóricas

Podemos entender este resultado asociando a f una variedad tórica polarizada

$$\mathbb{T} := (\mathbb{C}^\times)^n \quad \text{toro algebraico}$$

Def. Una variedad tórica es una variedad algebraica (normal) tq $X \supset \mathbb{T}$ y $X \circlearrowleft \mathbb{T}$

Construcción

Σ abanico de $\mathbb{R}^n$ (complejo poliedral de conos/$\mathbb{Q}$ estr. convexos)

$\sigma \in \Sigma \rightsquigarrow X_\sigma$ vt afín

$\tau \subset \sigma \Rightarrow X_\tau$ abierto de X_σ

$$X_\Sigma := \bigcup_\sigma X_\sigma$$

$$\circlearrowleft$$

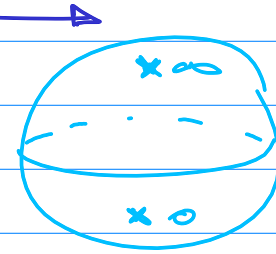
$$X_0 = \mathbb{T}$$

Ej

$$\mathbb{C} \hookleftarrow \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}$$

$$t^{-1} \leftarrow t \mapsto t$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$



I (Mumford, Demazure ?) $\Sigma \to X_\Sigma$ correspondencia 1-1 entre abanicos de $\mathbb{R}^n$ y vt de dim n.

Yoga: Las vt son objetos combinatorios; objetos y propiedades geométricas de vt

$\Updownarrow$

——————————— combinatorios del abanico.

Ej X compacta $\Leftrightarrow$ Σ completo $\left(\bigcup_\sigma \sigma = \mathbb{R}^n\right)$

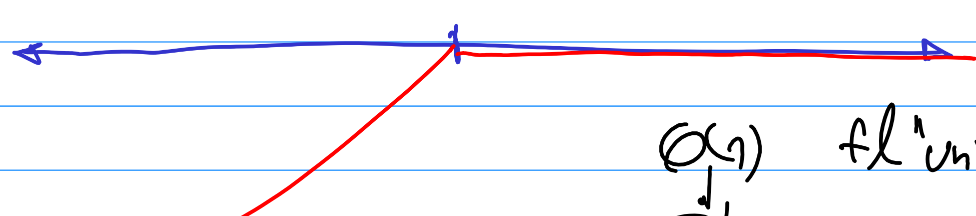
I.3 Fibrados de líneas y secciones / vt

Sup Σ completo. Una <u>función soporte virtual</u> en Σ es una función $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal en cada $\sigma \in \Sigma$.

$$\begin{array}{ccl} \psi \text{ fsv} & \longrightarrow & L_\psi \text{ fibrado de líneas (equivariante)} \\ & & \downarrow \; s_\psi \quad \text{sección racional (invariante)} \\ & & X_\Sigma \end{array}$$

La correspondencia $\psi \to (L_\psi, s_\psi)$ es 1-1

Ej



$\mathcal{O}(1)$ fl "universal"
$\downarrow$
$\mathbb{P}^1$

Un $\mathcal{L}$ es **generado por secciones** si $\forall x \in X$
$$\begin{array}{c}\mathcal{L}\\ \downarrow \\ X\end{array} \qquad \exists \text{ sección global } s \text{ tq } s(x) \neq 0$$

Ej $\mathcal{L}_\psi$ generado por secciones $\Longleftrightarrow$ cóncava

Volviendo al pb del ppio:

Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ politopo entero.

$\psi(\mu) := \min_{x \in \Delta} \langle x, \mu \rangle$ función soporte de ψ

ψ cóncava $\rightsquigarrow$ Σ abanico compatible

f pol tq $N(f) \subset \Delta$ "=" sección

$$\begin{array}{c}\mathcal{L}_\psi\\ \downarrow \uparrow s_f \\ X_\Sigma\end{array}$$

Las únicas funciones $X \to \mathbb{C}$ son las ctes (Liouville)
Con secciones, se pueden interpretar funciones $\neq$ cte como funciones globales sobre un espacio compacto

Kushnirenko es equivalente a

$$\deg_{\mathcal{L}}(X_\Sigma) = \# \{x ; \ s_1(x) = \cdots = s_n(x) = 0\} = n! \operatorname{vol}(\Delta)$$

II Aritmética

En colaboración con P. Philippon (París) y J. I. Burgos (Madrid)

<u>Motivación</u>: definir una noción de ... en geometría aritmética.

<u>Ejemplos</u>: <u>$\mathbb{P}^n$ con altura de</u> Weil euclídeana

$p \in \mathbb{P}^n$

⚠ El politopo no alcanza p/clasificar las estructuras aritméticas.

II.1 Valores absolutos y altura

Sobre $\mathbb{Q}$ consideramos los valores absolutos

$|\cdot|_\infty$ standard : completación $\mathbb{R}$

$|\cdot|_p$ p-ádico (p primo) : —— $\mathbb{Q}_p$

$$p = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \qquad \gcd(a,b)=1$$

$$h(p) = \log \max |a|,|b| = \sum_{v} \log \max 1, |p|_v$$

" tamaño bit ← fórmula de Weil

Cada v es un <u>lugar</u>: la altura se puede definir localmente y estudiar con análisis

II.2 Fibrados metrizados

Sea X variedad alg $/\mathbb{Q}$ y v va $/\mathbb{Q}$

$\rightsquigarrow X_v$ variedad analítica
- $X(\mathbb{C})$ $v=\infty$
- $X_{Ber,v}$ $v=p$

Espacio de Berkovich $/\mathbb{Q}_p$

y similarmente p/un fibrado de líneas $L \to X$

Una métrica $\|\cdot\|_v$ en L_v es una familia continua de normas $x \mapsto \|\cdot\|_{v,x}$. Suponemos que $\|\cdot\|_v$ es semipositiva: induce una medida de Borel μ_v sobre X_v

Ej: - si $v=\infty$ y $\|\cdot\|_\infty$ es lisa, μ_v es la integración contra la potencia máxima de la forma de Chern.
- si $v=p$ y $\|\cdot\|_p$ viene de un modelo entero es una medida discreta.

Un fibrado de líneas metrizado $\overline{L}=(L,(\|\cdot\|_v)_v)$
— "estructura aritmética" sobre (X,L)

Permite definir altura de puntos y subvariedades

Estas definiciones están relacionadas en el teor de Bézout aritmético

$$h(Y\cdot \mathrm{div}(s)) = h(Y) + \sum_v \int_{Y_v} \log\|s\|_v \, \mu_v$$

p/ $Y \subset X$ y s sección racional $\neq 0$

Las medidas controlan la distribución asintótica de puntos de altura chica (teor de Bilu, Szpiro–Ullmo–Zhang, Yuan 2008)

Otros: Hilbert-Samuel, Riemann-Roch, Lefschetz...

II.3 Variedades tóricas aritméticas

$\mathbb{S}_v = \{x \in \mathbb{T}_v : |x|_v = 1\}$ toro compacto

$v = 0$ $\qquad \mathbb{S}_v = (S^1)^n$

Def (BPS) Una variedad tórica aritmética es $(X_\Sigma, L_\psi, (\|\cdot\|_v)_v)$ tq

- X_Σ compacta $\iff$ Σ completo
- L_ψ generado por secciones $\iff$ ψ cóncavo
- $\|\cdot\|_v$ invariante cr a $\mathbb{S}_v$
  $\forall v$

Construcción ($v=\infty$) Consider the diagram

$$\begin{tikzcd} X_0(\mathbb{C}) \arrow[rr, dashed, "-\log\|s_\psi\|_f"] \arrow[d] & & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \arrow[rru, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

$x \mapsto \mathrm{val}(x)$

$-\log|x| = \mathrm{val}(x)$

"Green function"

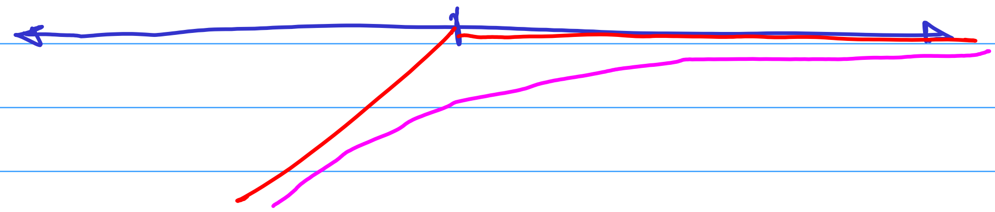
I. ① $\|\cdot\|_f$ se extiende a una métrica $\|\cdot\|_\infty \geq 0$ sobre X_Σ $\iff$ f cóncava y $|f-\psi| = O(1)$

② $(f_v)_v \mapsto (\|\cdot\|_{f_v})_v$ es 1-1 entre

- fciones cóncavas tq $|f_v - \psi| = O(1)$ $\forall v$ y $f_v = \psi$ $\forall^0 v$
- y estructuras aritméticas $\mathbb{T}$-invariantes s/ (X_Σ, L_ψ)

La <u>métrica canónica</u> corresponde a $f_v = \psi$ $(\forall v)$

Ej $\mathcal{O}(1)$ con la métrica de Fubini-Study p/ $v=\infty$
$\downarrow$
$\mathbb{P}^1$ corresponde a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(u) = -\frac{1}{2}\log(1+e^{2u})$



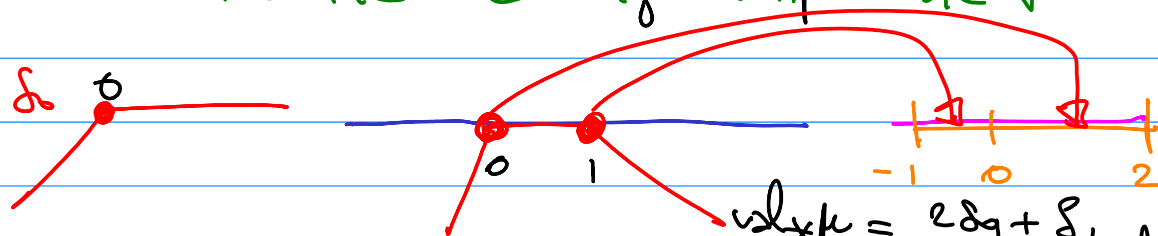
II.4 Medidas

Si las métricas se traducen en fciones cóncavas, el resto también "debería" expresarse en términos de estas funciones y las construcciones del análisis convexo.

I. $E \subset \mathbb{R}^n$ boreliano

$$\mathrm{val}_* \mu_N = \underbrace{n!\, \mathrm{vol}(\mathrm{grad}(f)(E))}_{\text{medida de Monge-Ampère de } f}$$

Ej



$\mathrm{val}_* \mu = 2\delta_0 + \delta_1$

Ej Si $N = \rho$ y $\|\cdot\|_N$ es algebraica $\Rightarrow f$ poliedral

$\mathrm{val}_* \mu$ medida discreta soportada en los vértices de la variedad tropical def por f

En $\mathbb{R}^2$

$\sum_{i=0}^{3} \delta_i$

II.4 Alturas y dualidad de Legendre-Fenchel

Def El dual de Legendre-Fenchel de una función cóncava $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es

$$f^\vee(x) = \inf_{u} \langle x, u \rangle - f(u)$$

Es una función cóncava con dominio

$$\mathrm{dom}(f^\vee) = \{x : f^\vee(x) > -\infty\}$$

$$|f - \psi| = O(1) \iff \begin{cases} \mathrm{dom}(f^\vee) = \Delta_\psi = \mathrm{grad}(\psi)(\Theta) \\ f^\vee : \Delta \to \mathbb{R} \text{ continua} \end{cases}$$

También podemos clasificar estructuras aritméticas
sobre (X_Σ, L_ψ) por funciones cóncavas
$(g_v : \Delta \to \mathbb{R})_v$ tq $g_v \equiv 0$ $\forall v$

⤳ coincide con la clasificación de Guillemin – Abreu
de variedades tóricas Kähler

$\underline{\text{T}}$ (BPS) $h_{\overline{L_\psi}}(X_\Sigma) = (n+1)! \sum_v \int_\Delta \vartheta_v^\vee \, d\underline{x}$

$\underline{\text{Ej}}$: $\mathcal{O}(1)$ con la métrica de Fubini-Study
$$\downarrow$$
$$\mathbb{P}^n$$

↙ simplex standard

$$\vartheta^\vee : \Delta^n \to \mathbb{R}$$

$$\vartheta(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(-\sum_{j=0}^{n} x_j \log x_j\right)}_{\text{entropía de } (x_0,\dots,x_n)} \qquad x_0 := 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$h(\mathbb{P}^n) = \frac{(n+1)!}{2} \int_{\Delta^n} \varepsilon(x)\, dx = \frac{n+1}{2} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \left(= \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \dots\right)$$