
LA COLUMNA DE MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Sección a cargo de

Tomás Recio

El objetivo de esta columna es presentar de manera sucinta, en cada uno de los números de La Gaceta, alguna cuestión matemática en la que los cálculos, en un sentido muy amplio, tengan un papel destacado. Para cumplir este objetivo el editor de la columna (sin otros méritos que su interés y sin otros recursos que su mejor voluntad) quisiera contar con la colaboración de los lectores, a los que anima a remitirle (a la dirección que se indica al pie de página¹) los trabajos y sugerencias que consideren oportunos.

EN ESTE NÚMERO. . .

En este número de *La Gaceta*, presentamos un artículo firmado por dos jóvenes (desde la perspectiva de la mayoría de los autores que contribuyen en esta *Columna*. . . , pero ya con un extenso curriculum matemático) investigadores *Ramón y Cajal* de la Universidad de Barcelona, los doctores Carlos D'Andrea y Martín Sombra.

Se trata de dos excelentes matemáticos, oriundos (geográfica y matemáticamente) de Argentina, que trabajan —simplificando mucho— en diversos problemas de Cálculo Simbólico en Geometría Algebraica y cuyo dinamismo y competencia contribuirán decisivamente al avance de este campo en nuestro país.

Por ejemplo, podemos señalar su implicación, como miembros del comité organizador, en el congreso europeo más prestigioso de este ámbito, el congreso *MEGA 2009*, que tendrá lugar en Barcelona, del 15 al 19 de junio del año próximo (ver <http://www.imub.ub.es/mega09/>).

En este artículo, Carlos y Martín hacen una somera y elemental introducción a la geometría de los objetos (curvas, superficies, etc.) definidos implícitamente como soluciones de ecuaciones polinomiales o, paramétricamente, mediante funciones racionales, planteando el problema de la conversión de una a otra de estas formas de representación. Su trabajo se centra, a continuación, en la obtención, a partir de las ecuaciones paramétricas y sin necesidad de efectuar la costosa operación de implicitar, de un objeto próximo a las ecuaciones implícitas asociadas: el polítopo de Newton de una hipersuperficie dada paramétricamente.

El problema, interesante en sí mismo, completa su atractivo con la descripción de las técnicas usadas para su resolución, que son introducidas de modo elemental por

¹Tomás Recio, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria, 39071-Santander; tomas.recio@unican.es

los autores: la geometría tropical y la teoría de la intersección. Redondea el artículo la Sección 3, dedicada a cálculos concretos y aplicaciones.

En la última sección se avanza en la otra dirección: cómo obtener información sobre la parametrizabilidad de una curva, conocido su polígono de Newton.

El artículo está escrito de manera accesible (a pesar de tratarse de resultados recientes y originales de la investigación de sus autores) y amena, incluyendo una serie de referencias *para saber más*. Por todo ello confiamos en que este nuevo trabajo de divulgación sea del agrado de los lectores de *La Gaceta*.

Sobre curvas paramétricas y polígonos de Newton

por

Carlos D'Andrea y Martín Sombra

Proponemos al lector el siguiente problema elemental: sean

$$f(t) := \frac{(t+1)^2}{2t(t-1)}, \quad g(t) := \frac{4t(t-1)^3}{(t+1)^5}. \quad (1)$$

dos funciones racionales. Encontrar el polinomio irreducible $E(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ tal que $E(f(t), g(t)) = 0$. En otras palabras, se trata de determinar la ecuación implícita de la curva plana parametrizada por $t \mapsto (f(t), g(t))$.

Mientras usted lo piensa un poco, aprovecharemos para introducir algunas nociones necesarias (y un poco más) para poner este problema en su contexto y discutirlo.

1. PARAMETRIZACIONES *vs* ECUACIONES EN GEOMETRÍA ALGEBRAICA

El estudio de los sistemas de ecuaciones polinomiales es el objeto central de la geometría algebraica. Para ser más concretos, tomaremos como cuerpo base a \mathbb{C} , el cuerpo de los números complejos. De todas formas, la mayoría de nuestras consideraciones seguirán siendo válidas si se reemplaza a \mathbb{C} por cualquier otro cuerpo algebraicamente cerrado.

Por definición, un *conjunto algebraico* de \mathbb{C}^n es el conjunto de ceros

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : f_1(\mathbf{x}) = \dots = f_s(\mathbf{x}) = 0\}$$

de una familia de polinomios multivariados $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Una *variedad algebraica afín* es un conjunto algebraico irreducible, en el sentido de que no es unión finita de subconjuntos algebraicos propios.

Desde la misma definición de variedad, la geometría algebraica privilegia la representación por ecuaciones de los objetos geométricos. ¿Por qué no representarlos por parametrizaciones?

Veamos cómo sería esto: dada una familia de funciones racionales $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}(t_1, \dots, t_m)$ consideramos la *aplicación racional*

$$\rho : \mathbb{C}^m \dashrightarrow \mathbb{C}^n, \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m) \mapsto (\rho_1(\mathbf{t}), \dots, \rho_n(\mathbf{t})),$$

que está bien definida fuera de los puntos donde el denominador de alguna de las ρ_i se anula. La imagen de un tal morfismo es “casi” una variedad algebraica: precisamente, existe una (única) variedad V que contiene a la imagen $\text{Im}(\rho)$ y tal que esta imagen

contiene un abierto denso de V . Esta variedad se llama la *clausura de Zariski* de la imagen de ρ y la denotaremos $\overline{\text{Im}(\rho)}$.

Por ejemplo, consideremos la aplicación racional $\mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$, $t \mapsto \left(\frac{4t}{t^2+4}, \frac{2t^2}{t^2+4}\right)$. Esta parametrización es la inversa de la proyección estereográfica de dimensión 1 (figura 1). Cuando t recorre \mathbb{C} , la aplicación recorre todos los puntos de la circunferencia definida por la ecuación $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ salvo el polo norte $N = (0, 1)$. De hecho, se sabe que una aplicación racional no constante $\rho : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^n$ ($n = 2, 3$) recorre todos los puntos de una curva algebraica, salvo a lo más uno [2, 14].

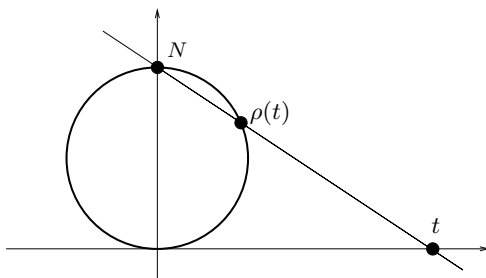


Figura 1: La proyección estereográfica de dimensión 1.

Una de las preocupaciones importantes de la geometría algebraica computacional es el *problema de la implícitación*, consistente en calcular ecuaciones de una variedad V a partir de una aplicación racional $\rho : \mathbb{C}^m \dashrightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $V = \overline{\text{Im}(\rho)}$. La versión más corriente del problema es para hipersuperficies, es decir, cuando la codimensión de V es 1. En este caso, el ideal de definición de V está generado por un solo polinomio irreducible: se trata entonces de calcular esta “ecuación implícita”.

Recíprocamente, ¿es cierto que toda variedad algebraica se puede parametrizar por polinomios o por funciones racionales, al menos en un abierto denso? Lamentablemente, la respuesta es “no” incluso para el caso más simple: las curvas planas.

En un sentido estricto, una *parametrización* de una variedad V de dimensión r es una aplicación racional $\rho : \mathbb{C}^r \dashrightarrow V$ tal que $\overline{\text{Im}(\rho)} = V$. Decimos “una” y no “la” parametrización porque de hecho hay muchas: por ejemplo, dada una parametrización ρ de una curva y una función racional $\varphi(t) \in \mathbb{C}(t) \setminus \mathbb{C}$, entonces $\rho \circ \varphi$ es otra parametrización de la misma curva. Las variedades que admiten parametrizaciones reciben un nombre especial, son las variedades *paramétricas* (o *unirracionales*). Si además la parametrización es invertible sobre un abierto denso, se dice que ρ es *birracional* y que la variedad es *racional*. Las nociones de variedad paramétrica y de variedad racional coinciden para los casos de curvas (teorema de Lüroth) y de superficies (teorema de Castelnuovo), pero para toda dimensión ≥ 3 existen variedades paramétricas que no son racionales.

Hemos visto que la circunferencia es una curva paramétrica. Más generalmente, toda cónica (curva plana definida por una ecuación irreducible de grado 2) es paramétrica. Para grados superiores esto ya no es cierto. Por ejemplo, el *folio de Descartes* (figura 2) está definido por la ecuación $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ y se puede

parametrizar por

$$t \mapsto \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3} \right). \tag{2}$$

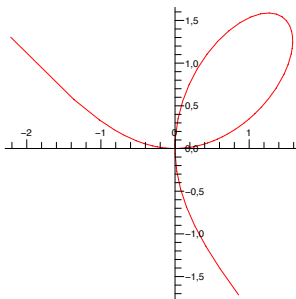


Figura 2: El folio de Descartes.

Sin embargo, la cúbica de Fermat $\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^3 + y^3 = 1\}$, aparentemente más sencilla, no admite ninguna parametrización.

Esta situación contrasta fuertemente con lo que ocurre en geometría lineal, diferencial o analítica, donde las variedades correspondientes pueden definirse tanto por ecuaciones como en forma paramétrica, al menos localmente. Hay razones profundas para que sea así, y en parte se debe a la rigidez de los objetos de la geometría algebraica. Por ejemplo, se puede ver que la cúbica de Fermat es topológicamente isomorfa a un toro menos tres puntos. Una aplicación birracional no constante $\mathbb{C} \dashrightarrow \mathcal{F}$ necesariamente es un isomorfismo entre \mathbb{C} menos un conjunto finito y \mathcal{F} menos un conjunto finito. Si tal aplicación existiera, induciría un homeomorfismo entre el plano menos un conjunto finito y el toro menos un conjunto finito, lo cual es imposible. Luego la cúbica de Fermat no puede ser racional y, por el teorema de Lüroth, tampoco paramétrica.

En todo caso, la clase de las variedades paramétricas es muy rica e importante, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. En diseño geométrico asistido por ordenador (CAGD por sus siglas en inglés: *Computer Aided Geometric Design*) las curvas y superficies paramétricas juegan un rol central, ya que proporcionan formas fáciles de dibujar. En efecto, la parametrización permite producir muchísimos puntos en la variedad utilizando solamente las operaciones elementales (\pm, \times, \div) del cuerpo base. En cambio, es más difícil producir puntos a partir de sus ecuaciones implícitas.

Un pequeño experimento demuestra lo dicho: pídale al programa de cálculo simbólico Maple que dibuje el folio de Descartes usando sólo la ecuación implícita $x^3 + y^3 - 3xy$. El resultado es pobre, especialmente alrededor del punto singular $(0, 0)$ (figura 3). Esto se debe a que, para obtener puntos en el folio de esta manera, hay que resolver cada vez una ecuación cúbica y, para colmo de males, los puntos producidos no son racionales sino que están en una extensión de grado 3 de \mathbb{Q} .

Por otro lado, para decidir si un punto dado está o no en la curva es mejor contar con la ecuación implícita. Por ejemplo, es inmediato concluir que el punto $(-2, 1)$ no

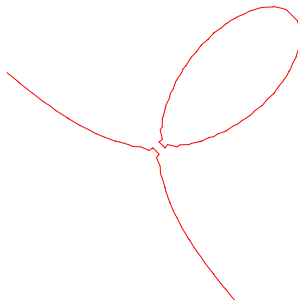


Figura 3: El folio de Descartes según el comando de Maple `implicitplot`.

está en el folio de Descartes evaluando la ecuación: $(-2)^3 + 1^3 - 3(-2) = -1 \neq 0$. Si, en cambio, quisiéramos averiguarlo a partir de la parametrización, tendríamos que determinar si el sistema de ecuaciones

$$\frac{3t}{1+t^3} = -2, \quad \frac{3t^2}{1+t^3} = 1$$

tiene o no solución para $t \in \mathbb{C}$, lo cual no sólo es más difícil, sino que hasta podría ocurrir que el punto esté en la curva pero no en la imagen de la parametrización.

Es por esto que, dependiendo de lo que se quiera saber sobre una cierta variedad paramétrica, puede que convenga disponer de la representación paramétrica o de la implícita, y ciertamente sería útil poder pasar ágilmente de una representación a la otra.

Desde un punto de vista computacional, la implicitación se obtiene eliminando los parámetros de un cierto sistema de ecuaciones. Por ejemplo, para calcular la ecuación del folio a partir de la parametrización (2) hay que “eliminar” la variable t del sistema de ecuaciones

$$(1+t^3)x - 3t = 0, \quad (1+t^3)y - 3t^2 = 0,$$

es decir, encontrar la ecuación en $\mathbb{C}[x, y]$ que verifican los puntos (x, y, t) que satisfacen este sistema de ecuaciones. Esta tarea de eliminación puede hacerse tanto con bases de Gröbner como con resultantes [4].

El mismo procedimiento funciona en general. Para el caso de curvas planas, escribiremos la parametrización como

$$\rho(t) = \left(\frac{p(t)}{r(t)}, \frac{q(t)}{s(t)} \right)$$

para polinomios p, q, r, s tales que $\gcd(p, r) = 1$ y $\gcd(q, s) = 1$. Luego, la ecuación implícita se obtiene al eliminar t de las ecuaciones

$$r(t)x - p(t) = 0, \quad s(t)y - q(t) = 0.$$

Si llamamos $E(x, y)$ a la ecuación de la curva imagen, en términos de la resultante de Sylvester se tiene

$$E(x, y)^{\text{ind}(\rho)} = \text{Res}(r(t)x - p(t), s(t)y - q(t); t)$$

donde $\text{ind}(\rho) \geq 1$ es el *índice de trazado* (o *grado*) de la parametrización en la terminología de [14], es decir, la cantidad de veces que $\rho(t)$ recorre la curva cuando t se mueve por \mathbb{C} .

2. EL POLÍTOPO DE NEWTON DE LA ECUACIÓN IMPLÍCITA

El problema en el cual centraremos este artículo es el de determinar el polítopo de Newton de la ecuación implícita de una hipersuperficie presentada en forma paramétrica. Trabajaremos con *polinomios de Laurent*, es decir expresiones del tipo $x_2^{-1} + x_1^{-2}x_2$ donde los exponentes pueden ser números enteros cualesquiera.

DEFINICIÓN 1. El *polítopo de Newton* $N(F) \subset \mathbb{R}^n$ de un polinomio de Laurent $F \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ es la envolvente convexa de los exponentes en el desarrollo monomial de F .

Por extensión, el *polítopo de Newton* $N(Z)$ de una hipersuperficie $Z \subset \mathbb{C}^n$ es el polítopo de Newton de su ecuación de definición. Salvo por un factor escalar, esta ecuación es única y por lo tanto $N(Z)$ está bien definido. Para el caso $n = 2$ utilizaremos la denominación más usual de “polígono” de Newton, en lugar de “polítopo”. Por ejemplo, el polígono de Newton del folio $x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 = 0$ es la envolvente convexa $\text{Conv}((1, 1), (3, 0), (0, 3))$ (figura 4).

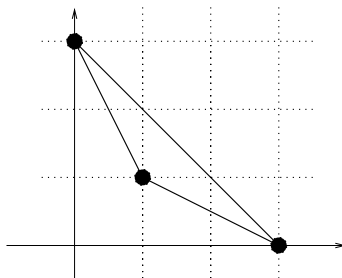


Figura 4: El polígono de Newton del folio de Descartes.

El polítopo de Newton nos dice cuáles son los posibles exponentes de los monomios en un polinomio de Laurent dado: si el polítopo es pequeño entonces el polinomio es *ralo*, en el sentido de que tiene pocos monomios. Es un refinamiento de la noción de grado: si llamamos $S := \text{Conv}(\mathbf{0}, e_1, \dots, e_n)$ al simplex estándar de \mathbb{R}^n , entonces el grado de un polinomio $F \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ es el menor entero d tal que $N(F) \subset dS$. De paso notamos que el polítopo de Newton de un *polinomio* (y *a fortiori* el de una hipersuperficie afín) está siempre contenido en el primer octante $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$.

De manera general, el problema que nos interesa es el siguiente: sean $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}(t_1, \dots, t_{n-1})$ y consideremos la aplicación racional

$$\rho : \mathbb{C}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{C}^n, \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto (\rho_1(\mathbf{t}), \dots, \rho_n(\mathbf{t})).$$

Supondremos que $\overline{\text{Im}(\rho)}$ es una hipersuperficie o equivalentemente, que la matriz jacobiana $(\frac{\partial \rho_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}))_{i,j}$ es de rango $n - 1$ para $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^{n-1}$ genérico. Se quiere entonces determinar el polítopo de Newton de esta hipersuperficie.

El polígono de Newton no determina la hipersuperficie pero retiene mucha información relevante. Por otra parte, calcularlo resulta sorprendentemente más sencillo que implicar en una gran cantidad de situaciones. En lo que sigue describiremos algunos de estos hechos.

El polígono de Newton de la ecuación implícita ha despertado mucho interés en los últimos años debido a su conexión con la geometría tropical, la combinatoria, la teoría de intersección y el álgebra lineal numérica. Una versión de este problema fue planteada por primera vez por B. Sturmfels y J.-T. Yu. En el espíritu de la teoría de la eliminación rala, la pregunta de Sturmfels y Yu podría resumirse en ¿puedo conocer el polígono de la ecuación implícita a partir de los polígonos de la parametrización? De manera más formal:

Problema 2. Sean $P_1, \dots, P_n \subset \mathbb{R}^{n-1}$ polígonos enteros con interior no vacío y consideremos la familia de n polinomios de Laurent en $n - 1$ variables

$$\rho_i = \sum_{a \in P_i \cap \mathbb{Z}^{n-1}} \lambda_{i,a} t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n} \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$$

para $1 \leq i \leq n$ y $\lambda_{i,a} \in \mathbb{C}$ genéricos. Determinar el polígono de Newton de la imagen de la parametrización $\mathbf{t} \mapsto (\rho_1(\mathbf{t}), \dots, \rho_n(\mathbf{t}))$.

Un polígono $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es *entero* si sus vértices están en \mathbb{Z}^{n-1} . La hipótesis de que los P_i 's tienen interior no vacío garantiza que la imagen de la parametrización es una hipersuperficie. En este problema, la elección genérica de los coeficientes $\lambda_{i,a}$ (es decir, dentro de un abierto denso del espacio de todos los coeficientes posibles) garantiza que el polígono de Newton de la ecuación no depende de estos coeficientes, aunque la ecuación misma sí que depende.

Como ejemplo del problema que nos interesa, consideremos la parametrización propuesta por A. Dickenstein y R. Fröberg [8]:

$$\rho : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2, \quad t \mapsto (t^{48} - t^{56} - t^{60} - t^{62} - t^{63}, t^{32}). \quad (3)$$

Los polígonos de Newton de los polinomios que la definen son relativamente pequeños: el intervalo $[48, 63]$ y el punto $\{32\}$. Los exponentes son un poco grandes pero de todas formas la ecuación implícita se puede calcular usando la resultante de Sylvester correspondiente; es interesante notar que el algoritmo de bases de Gröbner no termina en tiempo razonable en este caso. Con la ecuación en la mano (o, mejor dicho, ¡en el ordenador!), veamos qué pasa con su polígono de Newton (figura 5). ¡Es justamente el triángulo con vértices $(32, 0)$, $(0, 48)$, $(0, 63)$!

¿Por qué ocurre esto? El problema fue estudiado por I. Emiris e I. Kotsireas, quienes lograron calcular este polígono vía especializaciones de la resultante, mostrando así que es posible acceder al polígono de Newton sin tener que pasar por el cálculo completo de la ecuación implícita [8].

El problema cobró verdadero impulso con la aparición de la geometría tropical. La variedad tropical asociada a una hipersuperficie afín es un objeto poliedral, equivalente al polígono de Newton en el sentido de que se puede recuperar el uno a partir del otro. Esta interpretación permite abordar el problema con nuevas herramientas

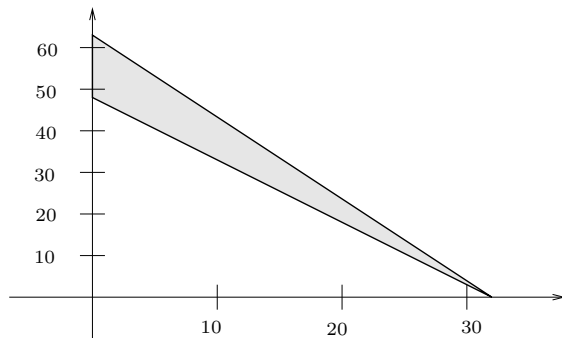


Figura 5: El polígono de Newton de la ecuación implícita de (3).

geométricas y de esta forma B. Sturmfels, J. Tevelev y J. Yu lograron explicitar la variedad tropical asociada a las parametrizaciones genéricas del problema 2 [15, 16], e incluso han implementado en ordenador el cálculo de esta variedad tropical y la construcción del polítopo de Newton a partir de la misma [17, 18]. Esta implementación funciona satisfactoriamente en dimensión baja.

Desde otra dirección, A. Esterov y A. Khovanskiĭ han mostrado que el polítopo de la ecuación implícita de una parametrización genérica se identifica con el “polítopo-fibra mixto” en el sentido de P. McMullen, dando así una caracterización distinta de este objeto [9].

2.1. EL POLÍGONO DE NEWTON DE UNA CURVA PARAMÉTRICA

A pesar del interés evidente del caso genérico, es claro que, para poder determinar el polítopo de la ecuación implícita en todos los casos, será necesario considerar invariantes más finos que los polítopos de Newton de la parametrización. En lo que sigue nos centraremos en el caso de curvas paramétricas planas, resuelto recientemente gracias a los trabajos [5, 6, 15, 20].

En el caso de curvas, el polígono de Newton está unívocamente determinado por las multiplicidades de la parametrización. Sea $\rho : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ una parametrización racional dada por funciones no constantes $f, g \in \mathbb{C}(t) \setminus \mathbb{C}$. Dado un punto $v \in \mathbb{P}^1$, la *multiplicidad de ρ en v* se define como

$$\text{ord}_v(\rho(t)) := (\text{ord}_v(f(t)), \text{ord}_v(g(t))) \in \mathbb{Z}^2,$$

donde $\text{ord}_v(f)$ designa el orden de anulación de la función f en el punto v . Recordemos que \mathbb{P}^1 es la recta proyectiva y que se identifica con $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$. El orden de anulación en $v = \infty$ de una función racional $\frac{p}{q} \in \mathbb{C}(t)$, escrita como cociente de dos polinomios, es $\text{ord}_\infty(f) = \deg(q) - \deg(p)$.

Las propiedades básicas de estas multiplicidades son:

- $\text{ord}_v(\rho) = (0, 0)$ para todo $v \in \mathbb{P}^1$, salvo un número finito, y
- $\sum_{v \in \mathbb{P}^1} \text{ord}_v(\rho) = (0, 0)$.

Definimos una operación auxiliar que produce un polígono convexo a partir de una familia de vectores en el plano cuya suma es cero. Sea $B \subset \mathbb{Z}^2$ una familia de vectores que son nulos salvo un número finito y tales que su suma es $(0, 0)$. Denotaremos por $\mathcal{P}(B) \subset (\mathbb{R}_{\geq 0})^2$ al (único) polígono convexo que se obtiene al: 1) rotar -90 grados los vectores no nulos de B , 2) concatenarlos siguiendo sus direcciones en el sentido contrario a las agujas del reloj y 3) trasladarlos al cuadrante $(\mathbb{R}_{\geq 0})^2$ de forma que toque los ejes coordenados (figura 6). La condición de que la suma de los vectores en B sea cero es equivalente a que el polígono se “cierre” al finalizar el proceso de concatenación.

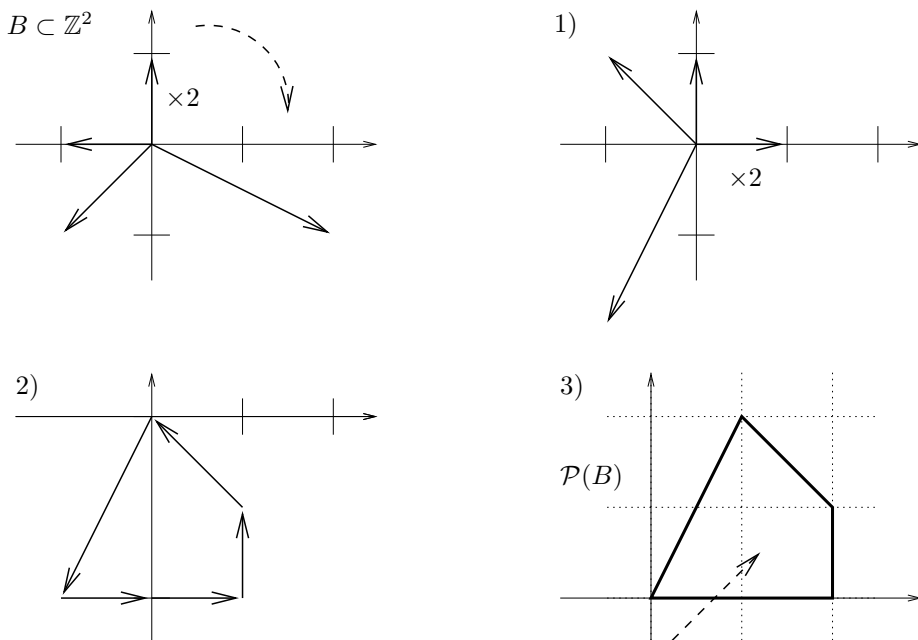


Figura 6: La operación $\mathcal{P}(B)$.

Recordemos que el índice de trazado $\text{ind}(\rho) \geq 1$ de la parametrización es el número de puntos en la preimagen de un punto genérico de $\text{Im}(\rho)$; es decir, es el número de veces que $\rho(t)$ “traza” o recorre la curva. En particular, la parametrización es birracional si y sólo si $\text{ind}(\rho) = 1$.

La respuesta al problema del cálculo del polígono de Newton de una curva plana paramétrica puede encontrarse en los trabajos de Dickenstein, E.-M. Feichtner, Sturmfels y Tevelev [6, 15, 20], y también en nuestro artículo [5].

TEOREMA 3. Sea $\rho : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ una parametrización racional y $\mathcal{C} := \overline{\text{Im}(\rho)}$. Entonces

$$\text{ind}(\rho) N(\mathcal{C}) = \mathcal{P}((\text{ord}_v(\rho))_{v \in \mathbb{P}^1}). \quad (4)$$

La “multiplicación” $\text{ind}(\rho) N(\mathcal{C})$ en este enunciado es la homotecia de razón $\text{ind}(\rho)$ del polígono de Newton de \mathcal{C} .

Ejemplo 4. Consideremos la parametrización

$$\rho : t \mapsto \left(\frac{1}{t(t-1)}, \frac{t^2 - 5t + 2}{t} \right).$$

Las multiplicidades de esta parametrización son

$$\text{ord}_0(\rho) = (-1, -1), \quad \text{ord}_1(\rho) = (-1, 0), \quad \text{ord}_\infty(\rho) = (2, -1)$$

y $\text{ord}_{v_i}(\rho) = (0, 1)$ para cada uno de los dos ceros simples v_1, v_2 de $t^2 - 5t + 2$, mientras que $\text{ord}_v(\rho) = (0, 0)$ para $v \neq 0, \pm 1, \infty, v_1, v_2$. La figura 6 ilustra esta familia B de vectores y el polígono $\mathcal{P}(B)$ que se construye a partir de ella.

Gracias al teorema 3, sabemos que este polígono es la homotecia de razón $\text{ind}(\rho)$ del polígono $N(Z)$. Más aún, vemos que este polígono es *no-contráctil*, en el sentido de que no es un múltiplo por un entero ≥ 2 de otro polígono entero. Concluimos así que $\text{ind}(\rho) = 1$ y que $\mathcal{P}(B)$ es el polígono de Newton de la curva Z .

Podemos verificar este resultado comparándolo con la ecuación implícita:

$$E(x, y) = 1 - 16x - 4x^2 - 9xy - 2x^2y - xy^2. \tag{5}$$

2.2. RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA TROPICAL Y LA TEORÍA DE INTERSECCIÓN

Ya hemos visto y probado el plato principal; ahora toca enterarse un poco sobre la cocina. Hay dos métodos para demostrar este resultado: geometría tropical y teoría de intersección.

En geometría tropical, la base es el semianillo $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ donde las operaciones son

$$x \oplus y = \min(x, y), \quad x \odot y = x + y.$$

Para simplificar la exposición, hablaremos sólo del caso de polinomios en $\mathbb{C}[x, y]$, aunque la teoría se extiende a polinomios multivariados con coeficientes en un cuerpo provisto de una valoración.

La *tropicalización* de un polinomio $F = \sum_{j=0}^N \lambda_j x^{a_j} y^{b_j} \in \mathbb{C}[x, y]$ es la función cóncava lineal a trozos

$$t_F : \mathbb{R}^2 \dashrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \bigoplus_{j=0}^N x^{\odot a_j} y^{\odot b_j} = \min_j \langle (a_j, b_j), (x, y) \rangle, \tag{6}$$

donde \bigoplus es la sumatoria tropical y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar usual de \mathbb{R}^2 .

La *variedad tropical* $\mathcal{T}_F \subset \mathbb{R}^2$ se define como el conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 donde esta función no es diferenciable. Se deduce de (6) que \mathcal{T}_F consiste exactamente en la reunión de las direcciones normales interiores a los lados del polígono $N(F)$. A cada una de estas direcciones δ se le asigna una *multiplicidad* $m_\delta \geq 1$ que, en el caso que consideramos de un polinomio de $\mathbb{C}[x, y]$, coincide con la longitud entera de la arista de $N(F)$ normal a esta dirección. La *longitud entera* $\ell(S)$ de un segmento entero $S \subset \mathbb{Z}^2$ es la cantidad de puntos de \mathbb{Z}^2 que hay en él (incluyendo los extremos) menos 1.

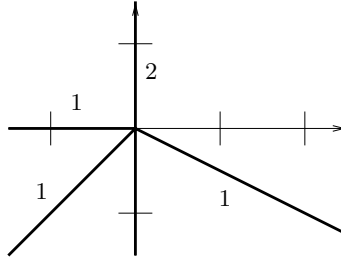


Figura 7: La curva tropical asociada a (5).

La figura 7 muestra la variedad tropical asociada a la curva definida por la ecuación (5). Como vemos, la variedad tropical, más las multiplicidades correspondientes, se identifica con los vectores en la figura 6, por lo que el teorema 3 puede reformularse fácilmente en términos de geometría tropical.

Esta reinterpretación permite ver al polígono de Newton como una cierta degeneración de la curva paramétrica original y estudiarlo con las herramientas de la geometría tropical. La demostración de Sturmfels y sus colaboradores del teorema 3 se basa principalmente en el llamado “teorema de Kapranov” [7]. Más aún, este método les ha permitido tratar hipersuperficies de dimension arbitraria parametrizadas por productos de formas lineales [6, 15], generalizando así el caso de curvas planas.

Por otra parte, en nuestro artículo [5] proponemos un método que reduce la determinación del polítopo de Newton a un problema de teoría de intersección y, más concretamente, al cálculo del número de soluciones de ciertos sistemas de ecuaciones polinomiales.

La *función soporte* de un polítopo $Q \subset \mathbb{R}^n$ se define como

$$h_Q : \mathbb{R}^n \dashrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max\{\langle u, x \rangle : u \in Q\},$$

que es una función convexa y afín a trozos que caracteriza a Q . Sean $\rho : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ una parametrización racional y $\mathcal{C} := \overline{\text{Im}(\rho)}$, entonces para $\sigma \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ se tiene

$$h_{N(\mathcal{C})}(\sigma) = \frac{1}{\text{ind}(\rho)} \#\{(t, x, y) \in \mathbb{C}^3 : x^{\sigma_1} = f(t), y^{\sigma_2} = g(t), \ell_0 + \ell_1 x + \ell_2 y = 0\} \quad (7)$$

para $\ell_0, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{C}$ genéricos. La demostración del teorema 3 se reduce así al cálculo de este número de soluciones, que, a su vez, se obtiene vía el refinamiento del teorema de Bernštejn-Kušnirenko-Khovanskiĭ recientemente obtenido por P. Philippon y el segundo autor [13].

La igualdad (7) se extiende a cualquier dimensión. Sin embargo, esto no ha servido aún para calcular el polítopo de Newton de otras hipersuperficies debido a la ausencia de un análogo de la estimación de [13] en dimensión superior.

3. ALGUNOS CÁLCULOS Y APLICACIONES

Tal vez usted ya llegó (o no) a la solución del problema que le propusimos al principio de este artículo. En cualquier caso, es instructivo ver cómo se resuelve a la

luz del teorema 3. Para la parametrización $\rho = (f, g)$ asociada a las funciones en (1) se tiene

$$\text{ord}_{-1}(\rho) = (2, -5), \quad \text{ord}_0(\rho) = (-1, 1), \quad \text{ord}_1(\rho) = (-1, 3), \quad \text{ord}_\infty(\rho) = (0, 1),$$

mientras que $\text{ord}_v(\rho) = (0, 0)$ para $v \neq 0, \pm 1, \infty$. Gracias al teorema 3 sabemos que $\text{ind}(\rho) N(\mathcal{C})$ se obtiene girando -90° estos vectores y concatenándolos; el polígono producido es el cuadrilátero $\text{Conv}((0, 0), (1, 0), (4, 1), (5, 2))$. Nuevamente observamos que el polígono es no-contráctil, luego $\text{ind}(\rho) = 1$ y por lo tanto este cuadrilátero es el polígono de Newton de la ecuación implícita $E(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ (figura 8).

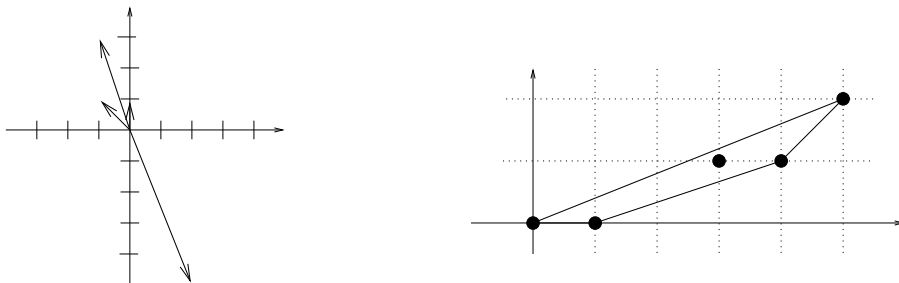


Figura 8: Las multiplicidades y el polígono de Newton de la parametrización (1).

Esta ecuación es combinación lineal de los monomios $1, x, x^4y, x^5y^2$ y x^3y correspondientes a los puntos enteros en el cuadrilátero, y de aquí se deduce fácilmente

$$E(x, y) = 1 - 2x + 2x^4y - x^5y^2 + 5x^3y.$$

A manera de ejercicio, invitamos al lector a aplicar el teorema 3 para calcular el polígono de Newton de la circunferencia y del folio de Descartes a partir de sus respectivas parametrizaciones. Asimismo, se verifica fácilmente que el polígono de Newton de la ecuación de la curva parametrizada por (3) es el triángulo con vértices $(32, 0), (0, 48)$ y $(0, 63)$ que se ve en la figura 5. Una vez más, el dato adicional $\text{ind}(\rho) = 1$ es consecuencia de que el polígono es no-contráctil.

3.1. ¿PARA QUÉ NOS PUEDE SERVIR CONOCER EL POLÍTOPO DE NEWTON?

Además de su interés intrínseco, el polítopo de Newton nos puede servir para resolver otros problemas computacionales acerca de las hipersuperficies paramétricas. Señalemos dos de estas aplicaciones.

Conocer el polítopo de Newton nos permite calcular la ecuación implícita vía un algoritmo de interpolación. Supongamos que nos han dado una parametrización $\rho = (f, g) : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2$ y queremos saber su ecuación implícita. Si aplicamos el teorema 3 obtenemos inmediatamente el polígono de Newton $Q \subset \mathbb{R}^2$ de la ecuación que estamos buscando.

¿Y luego? Pues bien, la ecuación ha de ser de la forma

$$E(x, y) = \sum_{j=0}^N \lambda_j x^{a_j} y^{b_j}$$

donde los (a_j, b_j) son los puntos enteros en Q y los $\lambda_j \in \mathbb{C}$ son desconocidos. Luego evaluamos la parametrización en $N + 1$ puntos $\tau_0, \dots, \tau_N \in \mathbb{C}$ para los que $\rho(\tau_i)$ esté definido, y obtenemos un sistema lineal en los λ_j , homogéneo de tamaño $(N + 1) \times (N + 1)$:

$$E(\rho(\tau_k)) = \sum_{j=0}^N \lambda_j f(\tau_k)^{a_j} g(\tau_k)^{b_j} = 0, \quad \text{para } 0 \leq k \leq N.$$

Si hemos elegido los puntos interpolación τ_k de manera suficientemente general, el núcleo de este sistema será de dimensión 1 y la ecuación E estará unívocamente determinada como un generador de este núcleo. Este algoritmo es particularmente ventajoso cuando la cantidad de puntos enteros en el polítopo es pequeña.

Un problema que se presenta a menudo en CAGD es el de determinar cómo se cortan las curvas o las superficies paramétricas que se quieren modelar. Normalmente este problema se resuelve implícitando una de las dos variedades. Si, en lugar de conocer la ecuación implícita, tenemos sólo el polítopo de Newton, no podremos calcular esta intersección pero sí que podremos estimar cuántos puntos hay (si la intersección es de dimensión 0) o cuál es el grado de la curva que resulta de esta intersección (si la intersección es de dimensión 1).

En el caso de dos curvas planas distintas $C, D \subset \mathbb{C}^2$, el teorema de Bernšteín-Kušnirenko-Khovanskiĭ dice que el número de puntos de $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ en común es, típicamente, igual al *volumen mixto*

$$\text{Area}(N(C) + N(D)) - \text{Area}(N(C)) - \text{Area}(N(D)),$$

donde el “+” es la suma puntual de los polígonos (*suma de Minkowski*). Por ejemplo, consideremos las curvas $C, D \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ parametrizadas respectivamente por

$$t \mapsto \left(\frac{(t+1)^2}{2t(t-1)}, \frac{4t(t-1)^3}{(t+1)^5} \right), \quad t \mapsto \left(t, \frac{10}{t^3} \right).$$

La curva C es la del problema al principio del artículo. En la parte izquierda de la figura 9 vemos los polígonos correspondientes junto con su suma de Minkowski. El volumen mixto es el área de la zona rayada y es por lo tanto igual a 2.

Como consecuencia, estas curvas C y D tienen a lo más dos puntos en común, que son los puntos $(1.33, 4.22)$ y $(-4.17, -0.14)$ (figura 9).

3.2. PARAMETRIZACIONES GENÉRICAS

Con lo que ya sabemos, podemos calcular fácilmente el polígono de Newton de cualquier curva paramétrica plana que se nos cruce en el camino. En particular, podemos responder el problema 2 para el caso de curvas planas.

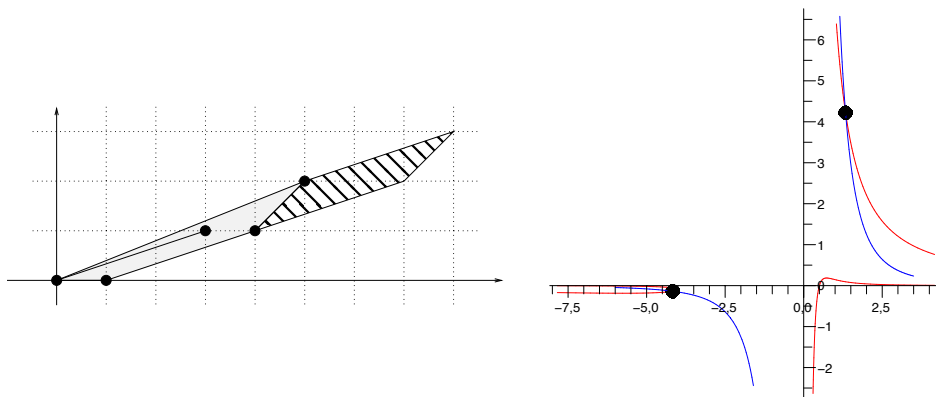


Figura 9: La intersección de dos curvas paramétricas.

COROLARIO 5 (Polinomios de Laurent genéricos). *Dados $D \geq d, E \geq e$, sean*

$$p(t) = \alpha_d t^d + \dots + \alpha_D t^D, \quad q(t) = \beta_e t^e + \dots + \beta_E t^E \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \quad (8)$$

tales que $\alpha_d, \alpha_D, \beta_e, \beta_E \neq 0$ y $\gcd(t^{-d}p(t), t^{-e}q(t)) = 1$. Sean $\rho = (p, q)$ y $\mathcal{C} := \overline{\text{Im}(\rho)}$. Entonces

$$N(\mathcal{C}) = \frac{1}{\text{ind}(\rho)} \mathcal{P}((D - d, 0), (0, E - e), (-D, -E), (d, e)).$$

Luego las parametrizaciones definidas por polinomios de Laurent genéricos producen, típicamente, ecuaciones cuyo polígono es un cuadrilátero (figura 10).

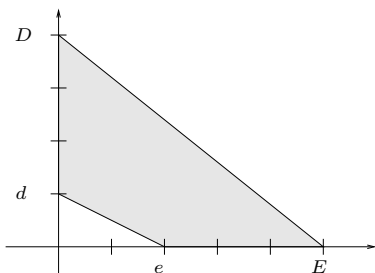


Figura 10: El polígono de Newton de una parametrización de Laurent genérica.

La demostración de este corolario es sencilla: por un lado se tiene $\text{ord}_0(\rho) = (d, e)$ y $\text{ord}_\infty(\rho) = (-D, -E)$. Por otro lado, si llamamos $v_1, \dots, v_r \neq 0$ a las diferentes raíces de $t^{-d}p(t)$ y denotamos por $m_i \geq 1$ la multiplicidad de v_i en p , se tiene

$$\text{ord}_{v_i}(\rho) = (m_i, 0), \quad \text{para } 1 \leq i \leq r,$$

ya que p y q no tienen raíces $\neq 0$ en común. Similarmente, sean $w_1, \dots, w_s \neq 0$ las raíces de $t^{-e}q(t)$ y $n_j \geq 1$ su respectiva multiplicidad. Entonces

$$\text{ord}_{w_j}(\rho) = (0, n_j).$$

El teorema 3 muestra que el polígono $\text{ind}(\rho)N(\mathcal{C})$ se obtiene girando -90° y concatenando los vectores (d, e) , $(-D, -E)$, $(m_i, 0)$ y $(0, n_j)$, para $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$. Pero los $(m_i, 0)$ están todos en la misma dirección y por lo tanto se concatenan juntos en el vector $\sum_i(m_i, 0) = (D - d, 0)$. Similarmente, los $(0, n_j)$ se concatenan en el vector $\sum_j(0, n_j) = (0, E - e)$, lo cual concluye la demostración.

Más aún, se puede mostrar que para una parametrización asociada a polinomios de Laurent p, q como en (8), el polígono de Newton de la ecuación es

$$\frac{1}{\text{ind}(\rho)}\mathcal{P}((D - d, 0), (0, E - e), (-D, -E), (d, e))$$

si y sólo si $\alpha_d, \alpha_D, \beta_e, \beta_E \neq 0$ y $\text{gcd}(t^{-d}p(t), t^{-e}q(t)) = 1$. Además, si los vectores $(D - d, 0)$, $(0, E - e)$, (d, e) no son colineales y p, q son genéricos, entonces ρ es birracional.

La demostración anterior ilustra un aspecto importante del cálculo del polígono de Newton en situaciones concretas. El polígono no depende de las raíces de p y de q ni de sus multiplicidades, sino sólo del hecho de que son disjuntas y de que conocemos cuánto es la *suma* de las multiplicidades. Este es un principio general que permite calcular el polígono de Newton de una parametrización $\rho = (f, g)$ a partir de factorizaciones parciales de la forma

$$f(t) = \alpha \prod_{p \in P} p(t)^{d_p}, \quad g(t) = \beta \prod_{p \in P} p(t)^{e_p}$$

donde $P \subset \mathbb{C}[t]$ es un conjunto finito de polinomios coprimos dos a dos, $d_p, e_p \in \mathbb{N}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tales factorizaciones se pueden obtener usando solamente la operación de máximo común divisor de dos polinomios en una variable y sin necesidad de acceder a los ceros y polos de f y g , lo cual sería demasiado costoso desde un punto de vista computacional.

Volviendo a las parametrizaciones genéricas, el siguiente caso a considerar es el de dos funciones racionales con el mismo denominador. El polígono de Newton que resulta tiene a lo más cinco lados (figura 11).

COROLARIO 6. *Dados $D \geq d$, $E \geq e$ y $F \geq 0$, sean*

$$p(t) = \alpha_d t^d + \cdots + \alpha_D t^D, \quad q(t) = \beta_e t^e + \cdots + \beta_E t^E, \quad r(t) = \gamma_0 + \cdots + \gamma_F t^F.$$

Sean $\rho = (\frac{p}{r}, \frac{q}{r}) \in \mathbb{C}(t)^2$ y $\mathcal{C} := \overline{\text{Im}(\rho)}$. Entonces

$$N(\mathcal{C}) = \frac{1}{\text{ind}(\rho)}\mathcal{P}((D - d, 0), (0, E - e), (F - D, F - E), (d, e), (-F, -F))$$

si y sólo si $\alpha_d, \alpha_D, \beta_e, \beta_E, \gamma_0, \gamma_F \neq 0$ y $t^{-d}p(t), t^{-e}q(t), r(t)$ son coprimos dos a dos.

El último caso que consideraremos es el de parametrizaciones genéricas por funciones racionales con distinto denominador. El polígono que resulta tiene a lo más seis lados (figura 12).

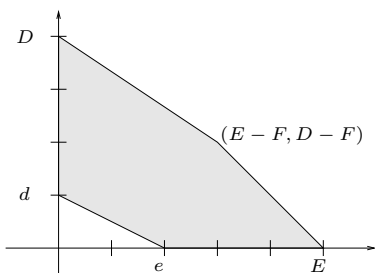


Figura 11: El polígono de una parametrización genérica por funciones racionales con el mismo denominador.

COROLARIO 7. *Dados $D \geq d, E \geq e, F, G \geq 0$, sean*

$$p(t) = \alpha_d t^d + \dots + \alpha_D t^D, \quad q(t) = \beta_e t^e + \dots + \beta_E t^E \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$$

y

$$r(t) = \gamma_0 + \dots + \gamma_F t^F, \quad s(t) = \delta_0 + \dots + \delta_G t^G \in \mathbb{C}[t].$$

Sean $\rho = \left(\frac{p}{r}, \frac{q}{s}\right)$ y $\mathcal{C} := \overline{\text{Im}(\rho)}$. Entonces

$$N(\mathcal{C}) = \frac{1}{\text{ind}(\rho)} \mathcal{P}((D-d, 0), (0, E-e), (F-D, G-E), (d, e), (-F, 0), (0, -G))$$

si y sólo si $\alpha_d, \alpha_D, \beta_e, \beta_E, \gamma_0, \gamma_F, \delta_0, \delta_G \neq 0$ y $t^{-d}p(t), t^{-e}q(t), r(t), s(t)$ son coprimos dos a dos.

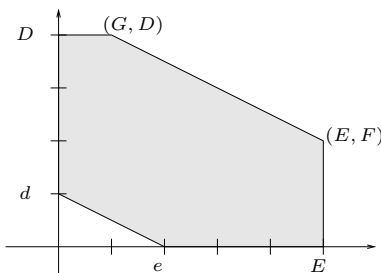


Figura 12: El polígono de una parametrización genérica por funciones racionales con denominadores distintos.

4. EL CASO GENERAL vs EL CASO GENÉRICO

Ahora le proponemos que mire en la otra dirección: supongamos que tenemos un polinomio $E(x, y)$ y sospechamos que define una curva paramétrica. ¿Qué podríamos averiguar a partir de su polígono de Newton?

Una primera pregunta natural es cuáles son las formas posibles para el polígono de Newton de una curva paramétrica. Como acabamos de ver, los polígonos que

producen las parametrizaciones genéricas son muy especiales: tienen a lo más seis lados, algunos de los cuales están en direcciones prefijadas.

Para poder responder a esta pregunta, fijemos un polígono entero $Q \subset (\mathbb{R}_{>0})^2$, con interior no vacío y apoyado en los ejes coordenados. Identificamos con $\mathbb{C}^{\#(Q \cap \mathbb{Z}^2)}$ al espacio de los polinomios con polígono de Newton contenido en Q . Consideramos entonces el conjunto

$$M_Q^\circ := \{F \in \mathbb{C}[x, y] : N(F) = Q, F \text{ define una} \\ \text{curva paramétrica de } \mathbb{C}^2\} \subset \mathbb{C}^{\#(Q \cap \mathbb{Z}^2)}$$

y sea M_Q su clausura de Zariski. Recordamos que ∂Q designa el *borde* del polígono Q .

TEOREMA 8 ([5]). *M_Q es una variedad paramétrica de dimensión $\#(\partial Q \cap \mathbb{Z}^2)$.*

En particular, $\dim(M_Q) \geq 3$, ya que Q tiene al menos tres lados, por ser un polígono de interior no vacío. Resulta así que todo polígono entero, con interior no vacío y apoyado en los ejes coordenados es el polígono de Newton de una curva paramétrica.

Como consecuencia de este resultado, la codimensión de M_Q es igual al número de puntos enteros en el interior del polígono. Por ejemplo, el cuadrilátero $\text{Conv}((0, 0), (1, 0), (4, 1), (5, 2))$ del problema al principio de este artículo contiene un solo punto entero en su interior, y por lo tanto la variedad M_Q correspondiente es una hipersuperficie.

Este fenómeno es de interés para el problema computacional inverso a la implicación: dado $E(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, se trata de decidir si define o no una curva paramétrica y, en el caso afirmativo, calcular una parametrización.

Si el polígono de Newton de la ecuación $E(x, y)$ tiene muchos puntos en su interior, entonces la probabilidad de que defina una curva racional es baja. Si de todas formas la ecuación define una curva racional, la parametrización correspondiente está definida por $\#(\partial Q \cap \mathbb{Z}^2)$ grados de libertad y por lo tanto la eficiencia del cálculo de una parametrización debería estar correlacionada con la cantidad de puntos enteros en el borde de Q y no tanto con la cantidad de puntos enteros en todo Q .

Para saber más:

- Curvas paramétricas en general: [1, 2, 14, 21].
- Métodos de interpolación relacionados con implicación: [3, 10, 19].
- Polítopo de Newton de la ecuación implícita y geometría tropical: [6, 12, 15, 16, 17].
- Polítopo de Newton y polítopo-fibra mixto: [9, 11].
- Polítopo de Newton y teoría de la intersección: [5, 13].

AGRADECIMIENTOS: Agradecemos a Teresa Cortadellas, Antonio J. Di Scala, Tomás Recio y a los árbitros anónimos por sus numerosos comentarios y sugerencias sobre una primera versión de este texto. Los autores son investigadores del Programa Ramón y Cajal del Ministerio de Educación y Ciencia y participan de los proyectos de investigación MTM2007-67493 (D'Andrea) y MTM2006-14234 (Sombra).

REFERENCIAS

- [1] S.S. ABHYANKAR, *Algebraic geometry for scientists and engineers*, Amer. Math. Soc., 1990.
- [2] C. ANDRADAS Y T. RECIO, Plotting missing points and branches of real parametric curves, *AAECC* **18** (2007), 107–126.
- [3] R.M. CORLESS, M.W. GIESBRECHT, I. KOTSIREAS Y S.M. WATT, Numerical implicitization of parametric hypersurfaces with linear algebra, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **1930**, 174–183, Springer, 2001.
- [4] D. COX, J. LITTLE Y D. O'SHEA, *Using algebraic geometry. Second edition*, Graduate Texts in Math. **185**, Springer, 2005.
- [5] C. D'ANDREA Y M. SOMBRA, The Newton polygon of a rational plane curve, e-print [arXiv:0710.1103](https://arxiv.org/abs/0710.1103), 26 pp.
- [6] A. DICKENSTEIN, E.-M. FEICHTNER Y B. STURMFELS, Tropical discriminants, *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), 1111–1133.
- [7] M. EINSIEDLER, M. KAPRANOV Y D. LIND, Non-Archimedean amoebas and tropical varieties, *J. Reine Angew. Math.* **601** (2006), 139–157.
- [8] I. EMIRIS Y I. KOTSIREAS, Implicitization exploiting sparseness, *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.* **67**, 281–298, Amer. Math. Soc., 2005.
- [9] A. ESTEROV Y A. KHOVANSKIĬ, Elimination theory and Newton polytopes, aparecerá en *Funct. Anal. Other Math.*, e-print [math/0611107](https://arxiv.org/abs/math/0611107), 34 pp.
- [10] A. MARCO Y J.J. MARTÍNEZ, Implicitization of rational surfaces by means of polynomial interpolation, *Comput. Aided Geom. Design* **19** (2002), 327–344.
- [11] P. McMULLEN, Mixed fibre polytopes, *Discrete Comput. Geom.* **32** (2004), 521–532.
- [12] G. MIKHALKIN, Tropical geometry and its applications, *International Congress of Mathematicians*, vol. II, 827–852, Eur. Math. Soc., 2006.
- [13] P. PHILIPPON Y M. SOMBRA, A refinement of the Bernštein-Kušnirenko estimate, aparecerá en *Adv. Math.*, e-print [arXiv:0709.3306](https://arxiv.org/abs/0709.3306), 45 pp.
- [14] J.R. SENDRA, F. WINKLER Y S. PÉREZ-DÍAZ, *Rational Algebraic Curves. A Computer Algebra Approach*, Springer, 2008.
- [15] B. STURMFELS Y J. TEVELEV, Elimination theory for tropical varieties, aparecerá en *Math. Res. Let.*, e-print [math/0704.3471](https://arxiv.org/abs/math/0704.3471), 19 pp.
- [16] B. STURMFELS, J. TEVELEV Y J. YU, The Newton polytope of the implicit equation, *Moscow Mathematical Journal* **7** (2007), 327–346.

- [17] B. STURMFELS Y J. YU, *Tropical implicitization and mixed fiber polytopes*, aparecerá en M. Stillman, N. Takayama y J. Verschelde (eds.): *Software for Algebraic Geometry*, I.M.A. Volumes in Math. Appl., e-print [cs/0706.0564](http://arxiv.org/abs/cs/0706.0564), 20 pp.
- [18] B. STURMFELS Y J. YU, TrIm: a software for tropical implicitization, <http://www-math.mit.edu/~jyu/TrIm/>.
- [19] Y. SUN Y J. YU, Implicitization of parametric curves via Lagrange interpolation, *Computing* **77** (2006), 379–386.
- [20] J. TEVELEV, Compactifications of subvarieties of tori, *Amer. J. Math.* **129** (2007), 1087–1104.
- [21] R.J. WALKER, *Algebraic Curves*, Princeton Univ. Press, 1950.

CARLOS D'ANDREA, UNIVERSIDAD DE BARCELONA, DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA, GRAN VÍA 585, 08007 BARCELONA

Correo electrónico: cdandrea@ub.edu

Página web: <http://carlos.dandrea.name/>

MARTÍN SOMBRA, UNIVERSIDAD DE BARCELONA, DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA, GRAN VÍA 585, 08007 BARCELONA

Correo electrónico: sombra@ub.edu

Página web: <http://atlas.mat.ub.es/personals/sombra/>