

# Minimums successifs des variétés toriques projectives<sup>1</sup>

Martín Sombra<sup>2</sup>

**Résumé.**— Nous calculons les minimums successifs de la variété torique projective  $X_{\mathcal{A}}$  associée à un ensemble fini  $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$ . Comme conséquence de ce calcul et des résultats de S.-W. Zhang sur la répartition des petits points, nous déduisons des estimations pour la hauteur de la sous-variété  $X_{\mathcal{A}}$  et du  $\mathcal{A}$ -résultant. Ces estimations nous permettent d’obtenir un analogue arithmétique du théorème de Bézout-Koušnirenko sur le nombre de solutions d’un système d’équations polynomiales. Comme application de ce résultat, nous améliorons les estimations connues pour la hauteur des polynômes dans le Nullstellensatz creux.

**Abstract.**— **Successive minima of projective toric varieties.** We compute the successive minima of the projective toric variety  $X_{\mathcal{A}}$  associated to a finite set  $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$ . As a consequence of this computation and of the results of S.-W. Zhang on the distribution of small points, we derive estimates for the height of the subvariety  $X_{\mathcal{A}}$  and of the  $\mathcal{A}$ -resultant. These estimates allow us to obtain an arithmetic analogue of the Bézout-Kushnirenko’s theorem concerning the number of solutions of a system of polynomial equations.

As an application of this result, we improve the known estimates for the height of the polynomials in the sparse Nullstellensatz.

**Mots clefs.**— Hauteur, minimums successifs, variété torique, résultant creux, théorème de Koušnirenko, Nullstellensatz arithmétique.

**Classification mathématique par sujets (2000).**— Primaire : 11G50 ; Secondaire : 14G40, 14M25.

## Introduction et résultats

L’étude de la répartition des points de petite hauteur (ou petits points) d’une variété algébrique a reçu une attention considérable au cours des dernières années, autour du problème de Bogomolov et de ses généralisations [Ull98], [Zha95], [BZ95], [Bil97], [DP98], [DP99], [DP01], voir également [Dav03] pour un aperçu historique. La notion de minimums successifs a été introduite dans ce contexte par Zhang, qui a aussi montré leur étroite relation avec la hauteur de la variété en question.

Ici nous calculons les minimums successifs d’une variété torique projective, d’où nous déduisons des estimations pour sa hauteur comme sous-variété et pour la hauteur du résultant creux.

Soit  $h$  la hauteur projective standard des points de  $\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ , définie en utilisant la métrique euclidienne pour les places à l’infini. Soit  $V \subset \mathbb{P}^N$  une variété quasi-projective, de dimension  $r$ . Le  $i$ -ème *minimum successif* de  $V$  (par rapport à la hauteur projective  $h$ ) est

$$\mu_i(V) := \sup \{ \inf \{ h(\xi) ; \xi \in V \setminus W \} ; W \subset V, \text{codim}_V(W) = i \}$$

---

<sup>1</sup>Version du 2 Juin 2004.

<sup>2</sup>Financé par une bourse post-doctorale Marie Curie du programme européen *Improving Human Research Potential and the Socio-economic Knowledge Base*, contrat n° HPMFCT-2000-00709.

pour  $i = 1, \dots, r + 1$ , où le suprémum est pris sur toutes les sous-variétés  $W$  de  $V$  de codimension  $i$ . On écrit  $\mu^{\text{ess}}(V) := \mu_1(V)$  et  $\mu^{\text{abs}}(V) := \mu_{r+1}(V)$  pour les minimums *essentiel* et *absolu*, respectivement ; on a

$$\mu^{\text{ess}}(V) = \mu_1(V) \geq \dots \geq \mu_{r+1}(V) = \mu^{\text{abs}}(V).$$

Soit  $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_N\} \subset \mathbb{Z}^n$  un ensemble fini de vecteurs entiers, et considérons l'application monomiale

$$\varphi_{\mathcal{A}} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{P}^N, \quad t \mapsto (t^{a_0} : \dots : t^{a_N}).$$

où  $\mathbb{T}^n := (\overline{\mathbb{Q}}^\times)^n$  désigne le tore algébrique sur  $\overline{\mathbb{Q}}$  de dimension  $n$ . La *variété torique projective*  $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^N$  associée est définie comme étant la clôture de Zariski de l'ensemble image de cette application

$$X_{\mathcal{A}}^\circ := \varphi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}^n) = \{ (t^{a_0} : \dots : t^{a_N}) ; t \in \mathbb{T}^n \} \subset \mathbb{P}^N.$$

Soit  $L_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{Z}^n$  le sous-module engendré par les différences des vecteurs  $a_0, \dots, a_N$  ; ceci est donc un *réseau* de l'espace linéaire engendré  $L_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ . On considère la forme volume  $\text{Vol}_{\mathcal{A}}$  sur cet espace linéaire, invariante par translations et telle que  $\text{Vol}(S) = 1$  pour un simplexe élémentaire quelconque  $S$  de  $L_{\mathcal{A}}$ .

Soit  $Q_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}^n$  le polytope associé, défini comme l'enveloppe convexe  $\text{Conv}(\mathcal{A})$  de l'ensemble  $\mathcal{A}$ . Posons  $\dim(\mathcal{A}) := \dim(L_{\mathcal{A}})$  et  $\text{Vol}(\mathcal{A}) := \text{Vol}_{\mathcal{A}}(Q_{\mathcal{A}})$ . Avec ces notations, la dimension et le degré de  $X_{\mathcal{A}}$  s'explicitent comme la dimension et le volume de l'ensemble  $\mathcal{A}$ , respectivement :

$$\dim(X_{\mathcal{A}}) = \dim(\mathcal{A}) = \dim(L_{\mathcal{A}}) \quad , \quad \deg(X_{\mathcal{A}}) = \text{Vol}(\mathcal{A}) = \text{Vol}_{\mathcal{A}}(Q_{\mathcal{A}}).$$

Dans le cas où  $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$ , la forme volume  $\text{Vol}_{\mathcal{A}}$  coïncide avec  $n!$  fois la forme volume euclidienne  $\text{Vol}_n$  de  $\mathbb{R}^n$  ; en particulier  $\dim(X_{\mathcal{A}}) = n$  et  $\deg(X_{\mathcal{A}}) = n! \text{Vol}_n(Q_{\mathcal{A}})$ .

Nous montrons que les minimums successifs de  $X_{\mathcal{A}}$  peuvent s'expliciter en termes de la combinatoire de l'ensemble  $\mathcal{A}$ . Soit  $F(Q_{\mathcal{A}})$  l'ensemble des faces du polytope  $Q_{\mathcal{A}}$ , et pour  $i = 0, \dots, r := \dim(\mathcal{A})$  posons

$$N_{\mathcal{A}}(i) := \min \{ \text{Card}(P \cap \mathcal{A}) ; P \in F(Q_{\mathcal{A}}), \dim(P) = i \}$$

pour le minimum des cardinaux de l'ensemble  $\mathcal{A}$  restreint aux faces de  $Q_{\mathcal{A}}$  de dimension  $i$ .

**Théorème 0.1**  $\mu_i(X_{\mathcal{A}}) = \frac{1}{2} \log N_{\mathcal{A}}(r - i + 1)$  pour  $i = 1, \dots, r + 1$ .

En particulier  $N_{\mathcal{A}}(r) = \text{Card}(\mathcal{A}) = N + 1$  et  $N_{\mathcal{A}}(0) = 1$  et donc

$$\mu^{\text{ess}}(X_{\mathcal{A}}) = \frac{1}{2} \log(N + 1) \quad , \quad \mu^{\text{abs}}(X_{\mathcal{A}}) = 0.$$

Comme corollaire du théorème 0.1 et du théorème des minimums successifs de Zhang, on déduit l'encadrement suivant pour la hauteur d'une variété torique (Corollaire 3.1) :

$$\frac{1}{2} \log(N + 1) \text{Vol}(\mathcal{A}) \leq h(X_{\mathcal{A}}) \leq \frac{(r + 1)}{2} \log(N + 1) \text{Vol}(\mathcal{A}).$$

À l'heure actuelle, on ne dispose d'aucune expression exacte (autre que sa définition) pour  $h(X_{\mathcal{A}})$ , donc cet encadrement est significatif. En fait, il serait fort intéressant de trouver une telle expression exacte pour la hauteur d'une variété torique projective dans le cas général.

Remarquons que pour les espaces projectifs (le seul cas des variétés toriques dont on connaît la hauteur projective) le théorème 0.1 montre qu'aucune des estimations dans le théorème des minimums successifs de Zhang n'est exacte, *voir* le paragraphe 3.

A partir de ces estimations, on déduit aisément la majoration explicite suivante pour la hauteur du  $\mathcal{A}$ -résultant  $\text{Rés}_{\mathcal{A}}$ , dont on renvoie au paragraphe 3 pour la définition précise. On note  $h_{\text{sup}}(\text{Rés}_{\mathcal{A}})$  la hauteur associée à la norme sup, définie comme étant le logarithme du maximum des valeurs absolues des coefficients de  $\text{Rés}_{\mathcal{A}}$ .

**Corollaire 0.2** *Soit  $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_N\} \subset \mathbb{Z}^n$  un ensemble fini tel que  $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$ , alors*

$$h_{\text{sup}}(\text{Rés}_{\mathcal{A}}) \leq \frac{3}{2} (n+1) \log(N+1) \text{Vol}(\mathcal{A}).$$

Les seules estimations pour la hauteur de  $\text{Rés}_{\mathcal{A}}$  dont on disposait auparavant étaient celles qu'on peut obtenir à partir des algorithmes pour son calcul [CLO98, § 7.6], [D'An02], *voir* aussi [KPS01, Prop. 1.7] ou encore [Roj00, Thm. 23]. Celles-ci sont loin d'être précises, et notre estimation les améliore d'un facteur exponentiel. Par ailleurs, la seule information dont on dispose concernant la valeur *exacte* des coefficients de  $\text{Rés}_{\mathcal{A}}$  est pour les coefficients extrémaux, égaux à  $\pm 1$  [Stu94, Cor. 3.1].

La majoration de  $h(X_{\mathcal{A}})$  nous permet aussi d'estimer la hauteur des sous-variétés définies par des équations à support restreint. Soit  $Q \subset \mathbb{R}^n$  un polytope rationnel, c'est-à-dire dont les sommets sont des vecteurs entiers. Pour un point  $\xi \in \mathbb{T}^n$ , on définit sa  $Q$ -hauteur de Weil par la formule

$$\widehat{h}_Q(\xi) := \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max \{ |\xi^a|_v ; a \in Q \cap \mathbb{Z}^n \} \in \mathbb{R}_+,$$

où  $K$  est un corps de nombres contenant les coordonnées de  $\xi$  et  $M_K$  est l'ensemble des places de  $K$ .

On pose  $\text{Vol}_n(Q)$  pour le volume euclidien de  $Q$ . On pose aussi  $\|f\|_1 := \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} |c_a|$  pour la norme  $\ell^1$  d'un polynôme de Laurent  $f = \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} c_a x^a \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ .

**Théorème 0.3** *Soient  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  des polynômes de Laurent à coefficients entiers, et posons  $Q := \mathcal{N}(f_1, \dots, f_n) \subset \mathbb{R}^n$  pour leur polytope de Newton.*

*Soit  $Z(f_1, \dots, f_n)_0$  l'ensemble des points isolés de  $Z(f_1, \dots, f_n) \subset \mathbb{T}^n$ . Pour chaque point  $\xi$  dans cet ensemble on note  $\ell(\xi) := \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} (\overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}] / (f_1, \dots, f_n))_{I(\xi)}$  la multiplicité d'intersection de  $f_1, \dots, f_n$  en  $\xi$ . Alors*

$$\sum_{\xi \in Z(f_1, \dots, f_n)_0} \ell(\xi) \widehat{h}_Q(\xi) \leq n! \text{Vol}_n(Q) \sum_{i=1}^n \log \|f_i\|_1.$$

Ceci est un analogue arithmétique du théorème classique de Bézout-Koushnirenko [Ful93, §5.5], [GKZ94, § 6.2, Thm. 2.2], [CLO98, § 7.5, Th. 5.4] :

$$\sum_{\xi \in Z(f_1, \dots, f_n)_0} \ell(\xi) \leq n! \text{Vol}_n(Q).$$

Ce résultat est un raffinement du théorème de Bézout arithmétique pour les hypersurfaces, et il améliore et rend complètement effectif le cas non-mixte du théorème de Bernstein-Koushnirenko arithmétique dû à V. Maillot [Mai00, Cor. 8.2.3], *voir* la remarque 4.2.

Sa démonstration est basée sur la majoration de  $h(X_{\mathcal{A}})$  déjà mentionnée, le théorème de Bézout arithmétique classique, et des résultats plutôt élémentaires de la théorie de l’intersection géométrique. On obtient aussi une variante pour les intersections arbitraires (Proposition 4.7). Signalons qu’il serait d’un grand intérêt d’étendre ces résultats au cas mixte général; nous espérons pouvoir le faire à l’aide d’une extension des techniques introduites dans le présent article.

Le  $\mathcal{A}$ -résultant et le théorème de Koushnirenko sont à la base de la théorie de l’élimination dite “sparse” (creuse), voir [CLO98], [Stu02]. Dans ce contexte, il est peut-être intéressant de signaler que le théorème 0.3 montre que la complexité binaire d’une représentation symbolique de  $Z(f_1, \dots, f_n)_0$  est *polynomiale* en la complexité binaire de  $f_1, \dots, f_n$  et en le volume (normalisé par  $n!$ ) du polytope de Newton correspondant.

Comme application de ces résultats, nous déduisons une amélioration significative du Nullstellensatz arithmétique creux dû à T. Krick, L.M. Pardo et l’auteur [KPS01, Cor. 3] :

**Théorème 0.4** *Soient  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  des polynômes à coefficients entiers sans zéros communs dans  $\mathbb{C}^n$ .*

*Posons  $d := \max_i \deg(f_i)$ ,  $h := \max_i h_{\text{sup}}(f_i)$  et  $\mathcal{A} := \text{Supp}(1, x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_s) \subset \mathbb{N}^n$ ; alors il existe  $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  et  $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  tels que*

- $a = g_1 f_1 + \dots + g_s f_s$ ,
- $\deg(g_i) \leq 2n^2 d \text{Vol}(\mathcal{A})$ ,
- $h_{\text{sup}}(a), h_{\text{sup}}(g_i) \leq 2(n+1)^3 d \text{Vol}(\mathcal{A}) (h + \log s + 14(n+1)d \log(d+1))$ .

Ce résultat représente une amélioration d’un facteur exponentiel par rapport aux estimations connues; la majoration pour les hauteurs devienne ainsi *polynomiale* en tous les paramètres concernés.

**Remerciements.** Je tiens à remercier chaleureusement Patrice Philippon pour des très nombreuses discussions et éclaircissements, notamment autour du théorème de Bézout. J’ai eu des discussions intéressantes avec Marc Chardin et Vincent Maillot. Je remercie Teresa Krick pour sa lecture attentive d’une version préliminaire de ce texte; ainsi qu’au rapporteur anonyme pour des nombreuses remarques utiles.

Bernd Sturmfels m’a encouragé à réfléchir sur la hauteur du  $\mathcal{A}$ -résultant. Le présent article est en partie conséquence de mes tentatives pour résoudre ce problème.

## 1 Hauteur des points et des polynômes

On note par  $\mathbb{Q}$  le corps des nombres rationnels,  $K$  un corps de nombres et  $\overline{\mathbb{Q}}$  la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$ . On note par  $\mathbb{T}^n$  le tore algébrique et  $\mathbb{P}^N$  l’espace projectif sur  $\overline{\mathbb{Q}}$ , de dimension  $n$  et  $N$  respectivement.

Pour chaque premier rationnel  $p$  on note  $|\cdot|_p$  la valeur absolue  $p$ -adique sur  $\mathbb{Q}$  telle que  $|p|_p = p^{-1}$ ; on note aussi  $|\cdot|_{\infty}$  ou simplement  $|\cdot|$  la valeur absolue standard. Celles-ci forment un ensemble complet de valeurs absolues sur  $\mathbb{Q}$ : on identifie l’ensemble  $M_{\mathbb{Q}}$  de ces valeurs absolues à l’ensemble  $\{\infty, p; p \text{ premier}\}$ . Plus généralement, on désigne par  $M_K$  l’ensemble des valeurs absolues de  $K$  étendant les valeurs absolues de  $M_{\mathbb{Q}}$ , et on note  $M_K^{\infty}$  le sous-ensemble de  $M_K$  des valeurs absolues archimédiennes.

On note  $\mathbb{R}$  le corps des nombres réels et  $\mathbb{C}$  le corps des nombres complexes ; on pose  $\mathbb{R}_+$  l'ensemble des nombres réels non-négatifs. On note par  $\mathbb{Z}$  l'anneau des entiers rationnels, et par  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^\times$  les entiers naturels avec et sans 0, respectivement. Pour  $b = (b_0, \dots, b_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ , on pose  $\deg(b) := b_0 + \dots + b_N \in \mathbb{Z}$  pour le degré du monôme  $x^b$  associé.

Dans ce paragraphe nous rappelons les définitions et propriétés de base des différents notions de hauteur pour les points (et plus généralement, pour les sous-variétés) et pour les polynômes.

Pour un point  $\xi = (\xi_0 : \dots : \xi_N) \in \mathbb{P}^N$  on note  $h(\xi)$  son hauteur *projective*, définie par la formule

$$h(\xi) := \sum_{v \in M_K^\infty} \lambda_v(K) \log \sqrt{|\xi_0|_v^2 + \dots + |\xi_N|_v^2} + \sum_{v \in M_K \setminus M_K^\infty} \lambda_v(K) \log \max \{|\xi_0|_v, \dots, |\xi_N|_v\},$$

où  $K$  est un corps de nombres contenant les  $\xi_i$ , et dont pour chaque  $v \in M_K$  on pose

$$\lambda_v(K) := \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]}.$$

Cette expression ne dépend pas du choix des coordonnées homogènes de  $\xi$ , grâce à la formule du produit.

Cette notion s'étend aux variétés projectives de dimension supérieure, suivant une construction due à P. Philippon. Soit  $f = \sum_a c_a U^a \in K[U_0, \dots, U_n]$  un polynôme en  $n+1$  groupes  $U_i$  de  $N_i+1$  variables chacun. Posons  $S_{N_i+1} := \{(z_0, \dots, z_{N_i}) \in \mathbb{C}^{N_i+1}; |z_0|^2 + \dots + |z_{N_i}|^2 = 1\}$  la sphère unité de  $\mathbb{C}^{N_i+1}$ , équipée de la mesure  $\mu_{N_i+1}$  de masse totale 1 et invariante par rapport au groupe unitaire  $U(N_i+1)$ . Pour une place archimédienne  $v \in M_K^\infty$ , la  $S_{N_0+1} \times \dots \times S_{N_n+1}$ -mesure de  $f$  relative à  $v$  est définie par l'intégrale

$$m_v(f; S_{N_0+1} \times \dots \times S_{N_n+1}) := \int_{S_{N_0+1} \times \dots \times S_{N_n+1}} \log |f|_v \mu_{N_0+1} \times \dots \times \mu_{N_n+1}.$$

Notons que dans le cas où chaque groupe se réduit à une seule variable  $U_i := \{u_i\}$ , cette notion se spécialise en la *mesure de Mahler* de  $f$ , c'est-à-dire

$$m(f; S_1^{n+1}) = m(f) := \int_0^1 \dots \int_0^1 \log |f(e^{2\pi i u_0}, \dots, e^{2\pi i u_n})| du_0 \dots du_n.$$

Pour une place ultramétrique  $v \in M_K \setminus M_K^\infty$ , on note  $|f|_v := \max \{|c_a|_v; a \in \mathbb{N}^{N_0+1} \times \dots \times \mathbb{N}^{N_n+1}\}$  la *norme sup* de  $f$  relative à  $v$ .

Maintenant soit  $V \subset \mathbb{P}^N$  une  $K$ -variété quasi-projective équidimensionnelle de dimension  $n$ . Soit  $Ch_V \in K[U_0, \dots, U_n]$  sa forme de Chow, qui est un polynôme en  $n+1$  groupes de  $N+1$  variables chacun, homogène de degré  $\deg(V)$  en chaque groupe  $U_i$ . Suivant [Phi95], la *hauteur projective* de  $V$  est par définition

$$\begin{aligned} h(V) &:= \sum_{v \in M_K^\infty} \lambda_v(K) m_v(Ch_V; S_{N+1}^{n+1}) + \sum_{v \in M_K \setminus M_K^\infty} \lambda_v(K) \log |Ch_V|_v \\ &+ (n+1) \left( \sum_{j=1}^N \frac{1}{2^j} \right) \deg(V) \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Alternativement, cette hauteur peut se définir *via* la théorie d'Arakelov comme la hauteur  $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(\Sigma)$  relative au fibré en droites universel  $\overline{\mathcal{O}(1)}$  muni de la métrique de Fubini-Study, de la clôture de Zariski  $\Sigma$  de  $V$  dans  $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N$ , voir [BGS94, § 3.1.3].

On considérera aussi la *hauteur de Weil* d'un point  $\xi \in \mathbb{P}^N$ , définie par

$$\widehat{h}(\xi) := \sum_{v \in M_K} \lambda_v(K) \log \max \{ |\xi_0|_v, \dots, |\xi_N|_v \}.$$

Ceci se compare avec la hauteur projective; on a

$$\widehat{h}(\xi) \leq h(\xi) \leq \widehat{h}(\xi) + \frac{1}{2} \log(N+1).$$

Le tore  $\mathbb{T}^N$  peut s'identifier à l'ouvert  $(\mathbb{P}^N)^\circ := \mathbb{P}^N \setminus \{(x_0 : \dots : x_N); x_0 \cdots x_N = 0\}$  *via* l'inclusion  $(t_1, \dots, t_N) \mapsto (1 : t_1 : \dots : t_N)$ . Ceci induit une notion de hauteur projective  $h_\iota$  et de hauteur de Weil  $\widehat{h}_\iota$  pour les sous-variétés et pour les points de  $\mathbb{T}^N$ , respectivement. Plus généralement, étant donné un ensemble fini  $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_N\} \subset \mathbb{Z}^n$  on peut définir une notion de  *$\mathcal{A}$ -hauteur projective* pour une sous-variété équidimensionnelle  $V \subset \mathbb{T}^n$  en posant

$$h_{\mathcal{A}}(V) := h(\varphi_{\mathcal{A}}(V)).$$

Ceci se spécialise en la hauteur projective  $h_\iota$  pour  $\mathcal{A} := \{0, e_1, \dots, e_n\}$ , où  $e_j$  désigne le  $j$ -ème vecteur de la base standard de  $\mathbb{R}^n$ . Similairement on définit la  *$\mathcal{A}$ -hauteur de Weil* d'un point  $\xi \in \mathbb{T}^n$  par

$$\widehat{h}_{\mathcal{A}}(\xi) := \widehat{h}(\varphi_{\mathcal{A}}(\xi));$$

ceci se spécialise en la hauteur de Weil  $\widehat{h}_\iota$  pour  $\mathcal{A} := \{0, e_1, \dots, e_n\}$ .

Remarquons que pour un polytope rationnel  $Q \subset \mathbb{R}^n$ , la  *$Q$ -hauteur de Weil*  $\widehat{h}_Q$  coïncide avec la  $\mathcal{A}_Q$ -hauteur de Weil, pour  $\mathcal{A}_Q := Q \cap \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Z}^n$  l'ensemble des points entiers dans  $Q$ .

On fera appel à plusieurs notions de hauteur pour les polynômes, suivant le choix d'une métrique pour les places à l'infini. Soit  $d \in \mathbb{N}$  et  $\|\cdot\|$  une métrique sur la partie graduée  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_d$ . Soit  $v \in M_K^\infty$  une place archimédienne et  $\sigma_v : K \hookrightarrow \mathbb{C}$  une immersion correspondant à  $v$ . Pour un polynôme homogène  $f \in K[x_0, \dots, x_N]_d$  on pose alors

$$\|f\|_v := \|\sigma_v(f)\|$$

pour la *norme* de  $f$  relative à  $v$ . Rappelons que pour  $v \in M_K \setminus M_K^\infty$  on note  $|f|_v$  la norme sup de  $f$  relative à  $v$ . Ainsi, la métrique  $\|\cdot\|$  définit une hauteur par la formule

$$h_{\|\cdot\|}(f) := \sum_{v \in M^\infty} \lambda_v(K) \log \|f\|_v + \sum_{M_K \setminus M_K^\infty} \lambda_v(K) \log |f|_v.$$

Pour la norme sup et les normes  $\ell^1$  et  $\ell^2$ , on notera les hauteurs correspondantes par  $h_{\text{sup}}$ ,  $h_1$  et  $h_2$ , respectivement. Les relations entre ces normes fournissent des encadrements pour les hauteurs correspondantes; on a

$$h_{\text{sup}}(\xi) \leq h_2(\xi) \leq h_1(\xi) \quad , \quad h_1(\xi) \leq h_2(\xi) + \frac{1}{2} \log \binom{N+d}{N} \leq h_{\text{sup}}(\xi) + \log \binom{N+d}{n}.$$

Les hauteurs  $h_{\text{sup}}$ ,  $h_1$  et  $h_2$  s'étendent de façon naturelle au cas des polynômes pas forcément homogènes, voire des polynômes de Laurent.

Aussi on considérera la métrique  $\|\cdot\|_{\mathbb{W}}$  sur  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_d$  définie par

$$\|f\|_{\mathbb{W}}^2 := \sum_{a; \deg(a)=d} \binom{d}{a}^{-1} |c_a|^2$$

pour  $f = \sum_a c_a x^a \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_d$ . Pour  $\xi \in \mathbb{C}^{N+1}$ , l'inégalité de Cauchy-Schwartz entraîne

$$|f(\xi)| = \left| \sum_a c_a \xi^a \right| \leq \left( \sum_a \binom{d}{a}^{-1} |c_a|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_a \binom{d}{a} |\xi^a|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_{\mathbb{W}} \|\xi\|_2^d. \quad (1.1)$$

Pour un polynôme homogène  $f \in K[x_0, \dots, x_N]_d$ , on notera respectivement  $\|\cdot\|_{\mathbb{W},v}$  et  $h_{\mathbb{W}}$  la métrique relative à une place  $v \in M_K$  et la hauteur correspondantes à cette métrique. L'indice est pour H. Weyl, le premier à notre connaissance à considérer cette métrique, voir [Wey50, § 3.7].

## 2 Minimums successifs

Soit  $\text{Tors}(\mathbb{T}^N)$  le sous-groupe des points de torsion de  $\mathbb{T}^N$ , on a  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \text{Tors}(\mathbb{T}^N)$  si et seulement si  $\xi_i$  est une racine de l'unité pour  $i = 1, \dots, N$ . Le lemme suivant montre que le minimum de la hauteur projective  $h_\iota$  sur les points de  $\mathbb{T}^N$  est atteint aux points de torsion.

**Lemme 2.1** *Soit  $\xi \in \mathbb{T}^N$ ; alors  $h_\iota(\xi) \geq \frac{1}{2} \log(N+1)$ , avec égalité si et seulement si  $\xi \in \text{Tors}(\mathbb{T}^N)$ .*

*Démonstration.*— Soit  $v \in M_K^\infty$ . L'inégalité arithmético-géométrique [HLP67, Thm. 9] entraîne

$$\frac{1 + |\xi_1|_v^2 + \dots + |\xi_N|_v^2}{N+1} \geq (|\xi_1|_v \cdots |\xi_N|_v)^{2/(N+1)}$$

avec égalité si et seulement si  $|\xi_i|_v = 1$  pour tout  $i$ . Équivalamment

$$\log \sqrt{1 + |\xi_1|_v^2 + \dots + |\xi_N|_v^2} \geq \frac{1}{2} \log(N+1) + \frac{1}{N+1} \log (|\xi_1|_v \cdots |\xi_N|_v). \quad (2.2)$$

Pour  $v \in M_K \setminus M_K^\infty$  on a

$$\log \max \{1, |\xi_1|_v, \dots, |\xi_N|_v\} \geq \frac{1}{N+1} \log (|\xi_1|_v \cdots |\xi_N|_v), \quad (2.3)$$

avec égalité si et seulement si  $|\xi_i|_v = 1$  pour tout  $i$ , donc

$$\begin{aligned} h_\iota(\xi) &= \sum_{v \in M_K^\infty} \lambda_v(K) \log \sqrt{1 + |\xi_1|_v^2 + \dots + |\xi_N|_v^2} + \sum_{v \in M_K \setminus M_K^\infty} \lambda_v(K) \log \max \{1, |\xi_1|_v, \dots, |\xi_N|_v\} \\ &\geq \frac{1}{2} \log(N+1) + \frac{1}{N+1} \sum_{v \in M_K} \lambda_v(K) \log (|\xi_1|_v \cdots |\xi_N|_v) = \frac{1}{2} \log(N+1) \end{aligned}$$

par la formule du produit. Pour avoir l'égalité, il faut que les inégalités (2.2) et (2.3) soient des égalités. Ceci équivaut à ce que  $|\xi_i|_v = 1$  pour tout  $v \in M_K$  et  $i = 1, \dots, N$ , c'est-à-dire  $\xi \in \text{Tors}(\mathbb{T}^N)$ .  $\square$

Considérons l'action diagonale de  $\mathbb{T}^n$  sur  $\mathbb{P}^N$  associée à l'ensemble  $\mathcal{A}$

$$*_\mathcal{A} : \mathbb{T}^n \times \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N \quad , \quad (t, x) \mapsto t *_\mathcal{A} x := (t^{a_0} x_0 : \dots : t^{a_N} x_N).$$

Les orbites de l'action restreinte à  $X_\mathcal{A}$  sont en correspondance avec l'ensemble  $F(Q_\mathcal{A})$  des faces du polytope  $Q_\mathcal{A}$  : pour chaque face  $P$  on considère un point  $e_P := (e_{P,0} : \dots : e_{P,N}) \in \mathbb{P}^N$  défini par  $e_{P,j} := 1$  si  $a_j \in P$  et  $e_{P,j} := 0$  sinon ; la bijection est donnée par [GKZ94, Ch. 5, Prop. 1.9], [Ful93, § 3.1]

$$P \mapsto X_{\mathcal{A},P}^\circ := \mathbb{T}^n *_\mathcal{A} e_P \subset \mathbb{P}^N .$$

Ainsi la décomposition de  $X_\mathcal{A}$  comme union disjointe des orbites de cette action s'explique en

$$X_\mathcal{A} = \bigsqcup_{P \in F(Q_\mathcal{A})} X_{\mathcal{A},P}^\circ . \quad (2.4)$$

Posons  $N(P) := \text{Card}\{i ; a_i \in P\} - 1$  et  $\mathcal{A}(P) = (a_i ; a_i \in P) \in (\mathbb{Z}^n)^{N(P)+1}$ . On vérifie que  $X_{\mathcal{A},P}^\circ \subset \mathbb{P}^N$  est l'orbite principale d'une variété torique contenue dans un sous-espace standard  $E \cong \mathbb{P}^{N(P)}$ . Cette variété torique s'identifie à la sous-variété  $X_{\mathcal{A}(P)}^\circ \subset \mathbb{P}^{N(P)}$  de dimension égale à la dimension (réelle) de la face  $P$ , via l'inclusion canonique  $i_P : \mathbb{P}^{N(P)} \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ . On renvoie le lecteur intéressé à [Ful93], [GKZ94] ou [CLO98] pour les propriétés de base des variétés toriques projectives.

Le théorème 0.1 est conséquence directe de la décomposition ci-dessus et du lemme 2.1. Montrons d'abord quelques propriétés élémentaires des minimums successifs.

### Lemme 2.2

- (a) Soit  $V \subset \mathbb{P}^N$  une variété quasi-projective quelconque, et  $Z \subset V$  une sous-variété quasi-projective de dimension  $s$ , alors  $\mu_i(V) \leq \mu_{s-r+i}(Z)$  pour  $i = r - s + 1, \dots, r + 1$ .
- (b) Soit  $V = \bigcup_{j \in J} Z_j$  un recouvrement fini de  $V$  par des sous-variétés quasi-projectives de dimension  $s_j := \dim(Z_j)$ , alors pour  $i = 1, \dots, r + 1$

$$\mu_i(V) = \min \{ \mu_{s_j-r+i}(Z_j) ; j \in J, s_j \geq r - i + 1 \}.$$

*Démonstration.* – Partie (a) : Posons  $\ell := r - i$ . Pour  $\varepsilon > 0$  donné, on prend une sous-variété  $W \subset V$  de codimension  $i$  (ou équivalamment telle que  $\dim(W) = \ell$ ) suffisamment grande pour que  $\mu_i(V) \leq \mu^{\text{abs}}(V \setminus W) + \varepsilon$ .

On a  $\dim(W \cap Z) \leq \ell$  et donc  $\mu^{\text{abs}}(Z \setminus W) \leq \mu_{s-r+i}(Z)$  par définition, car  $\text{codim}_Z(W \cap Z) \geq s - \ell = s - r + i$ . Puis

$$\mu^{\text{abs}}(V \setminus W) \leq \mu^{\text{abs}}(Z \setminus W)$$

car  $V \setminus W \supset Z \setminus W$  ; on en conclut  $\mu_i(V) \leq \mu_{s-r+i}(Z)$ .

Partie (b) : Par application directe de la partie (a), on voit que le premier terme est borné par le deuxième. Ainsi on se réduit à démontrer l'autre inégalité.

Posons  $\ell := r - i$ . Pour chaque  $j \in J$  on prend une sous-variété  $W_j \subset Z_j$  de la façon suivante : dans le cas  $s_j \geq \ell + 1$  on prend  $W_j$  de dimension  $\ell$ , suffisamment grande pour que  $\mu_{s_j-r+i}(Z_j) \leq \mu^{\text{abs}}(Z_j \setminus W_j) + \varepsilon$ , tandis que pour le cas  $s_j \leq \ell$  on prend  $W_j := Z_j$ . Soit

$$W := \overline{\bigcup_{j \in J} W_j} \cap Z \subset Z$$

la clôture de Zariski dans  $Z$  de la réunion des  $W_j$ . Donc  $\dim(W) \leq \ell$ , car  $J$  est un ensemble fini et  $\dim(W_j) \leq \ell$  pour tout  $j \in J$ . Ainsi  $\mu_i(V) \geq \mu^{\text{abs}}(V \setminus W)$  et de plus

$$\mu^{\text{abs}}(V \setminus W) \geq \min \{ \mu^{\text{abs}}(Z_j \setminus W_j) ; j \in J, s_j \geq r - i + 1 \}$$

car  $V \setminus W \subset \bigcup_{\{j; s_j \geq \ell + 1\}} (Z_j \setminus W_j)$ . On en déduit  $\mu_i(V) \geq \min \{ \mu_{s_j-r+i}(Z_j) ; j \in J, s_j \geq r - i + 1 \} - \varepsilon$ , ce qui établit l'égalité.  $\square$

*Démonstration du théorème 0.1.* – Soit  $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}^n$  un ensemble fini quelconque, et posons  $M + 1 := \text{Card}(\mathcal{B})$  pour son cardinal et  $X_{\mathcal{B}}^{\circ} := \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}^n) \subset \mathbb{P}^M$  pour le tore associé. Ce tore  $X_{\mathcal{B}}^{\circ}$  est en fait contenu dans  $(\mathbb{P}^M)^{\circ}$  et par le lemme 2.1 on a

$$\mu^{\text{abs}}(X_{\mathcal{B}}^{\circ}) \geq \frac{1}{2} \log(M + 1).$$

En outre  $\text{Tors}(\mathbb{T}^n)$  est un ensemble dense de  $\mathbb{T}^n$ , et donc  $\varphi_{\mathcal{B}}(\text{Tors}(\mathbb{T}^n))$  est aussi un ensemble dense de  $X_{\mathcal{B}}^{\circ}$ . On a  $h(\xi) = \frac{1}{2} \log(M + 1)$  pour tout  $\xi$  dans cet ensemble, car il est contenu dans  $\text{Tors}(\mathbb{T}^M)$ . Alors

$$\mu^{\text{ess}}(X_{\mathcal{B}}^{\circ}) \leq \frac{1}{2} \log(M + 1),$$

et donc  $\mu_j(X_{\mathcal{B}}^{\circ}) = \frac{1}{2} \log(M + 1)$  pour tout  $1 \leq j \leq \dim(X_{\mathcal{B}}) + 1$ , à cause de l'encadrement  $\mu^{\text{abs}}(X_{\mathcal{B}}^{\circ}) \leq \mu_j(X_{\mathcal{B}}^{\circ}) \leq \mu^{\text{ess}}(X_{\mathcal{B}}^{\circ})$ .

Maintenant soit  $P \in F(Q_{\mathcal{A}})$ , et soit  $X_{\mathcal{A},P}^{\circ} = \mathbb{T}^n *_A e_P \subset \mathbb{P}^N$  l'orbite torique associée. La hauteur des points est invariante par l'inclusion  $i_P$  et donc

$$\mu_i(X_{\mathcal{A},P}^{\circ}) = \mu_i(X_{\mathcal{A}(P)}^{\circ}) = \frac{1}{2} \log N(P)$$

pour  $i = 1, \dots, \dim(P) + 1$ . Par le lemme 2.2(b) et la décomposition (2.4) on conclut

$$\mu_i(X_{\mathcal{A}}) = \min \{ \mu_{\dim(P)-r+i}(X_{\mathcal{A},P}^{\circ}) ; \dim(P) \geq r - i + 1 \} = \frac{1}{2} \log N_{\mathcal{A}}(r - i + 1),$$

car ce minimum est atteint sur l'ensemble des faces de  $Q_{\mathcal{A}}$  de dimension  $r - i + 1$ .  $\square$

Comme on l'a déjà remarqué dans l'introduction, en particulier on a  $\mu^{\text{ess}}(X_{\mathcal{A}}) = \frac{1}{2} \log(N+1)$  et  $\mu^{\text{abs}}(X_{\mathcal{A}}) = 0$ .

Ce résultat montre aussi que l'ensemble des minimums successifs de  $X_{\mathcal{A}}$  peut être très varié, suivant la combinatoire de l'ensemble  $\mathcal{A}$  (sauf pour les conditions  $\mu_1(X_{\mathcal{A}}) \geq \dots \geq \mu_{r+1}(X_{\mathcal{A}}) = 0$ ). Voici quelques exemples :

- L'espace projectif  $\mathbb{P}^n$  correspond à l'ensemble  $\{0, e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{Z}^n$  ( $e_j$  est le  $j$ -ème vecteur de la base standard de  $\mathbb{R}^n$ ) donc

$$\mu_i(\mathbb{P}^n) = \frac{1}{2} \log(n - i + 2) \quad , \quad i = 1, \dots, n + 1.$$

- Soit  $V_{n,d} \subset \mathbb{P}^{\binom{d+n}{n}-1}$  la variété de Veronese, définie comme l'image de l'application  $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{d+n}{n}-1}$ ,  $x \mapsto (x^b; b \in \mathbb{N}^{n+1}, \deg(b) = d)$ . Ceci correspond à l'ensemble  $\{a \in \mathbb{N}^n; \deg(a) \leq d\} \subset \mathbb{Z}^n$  et donc

$$\mu_i(V_{n,d}) = \frac{1}{2} \log \binom{d+n-i+1}{n-i+1} \quad , \quad i = 1, \dots, n+1.$$

- Soit  $S_n \subset \mathbb{P}^{2^n-1}$  la variété de Segre, définie comme l'image de la immersion  $(\mathbb{P}^1)^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{2^n-1}$  via  $((x_{10} : x_{11}), \dots, (x_{n0} : x_{n1})) \mapsto (\prod_{i=1}^n x_{ij_i}; j_i \in \{0,1\})$ . Ceci correspond à l'ensemble  $\{0,1\}^n \subset \mathbb{Z}^n$  et donc

$$\mu_i(S_n) = \frac{\log 2}{2} (n-i+1) \quad , \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Une *sous-variété de torsion* de  $\mathbb{T}^N$  est par définition une sous-variété de la forme  $\omega \cdot H$ , où  $H$  est un sous-groupe algébrique de  $\mathbb{T}^N$  et  $\omega \in \text{Tors}(\mathbb{T}^N)$  [Zha95, § 6], [Bil97, § 5]. La proposition 2.4 ci-dessous montre que les sous-variétés de torsion réalisent, pour la hauteur projective, les minimums successifs les plus petits possibles parmi les sous-variétés de  $\mathbb{T}^N$ .

**Lemme 2.3** *Soit  $H \subset \mathbb{T}^N$  un groupe algébrique de dimension  $r$ , alors il existe un ensemble fini  $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_N\} \subset \mathbb{Z}^r$  et un sous-groupe fini  $G \subset \mathbb{T}^N$  tels que  $H = G \cdot X_{\mathcal{A}}^\circ = \cup_{\omega \in G} \omega \cdot X_{\mathcal{A}}^\circ$ .*

*Démonstration.* – Notons d'abord que grâce à [OV90, § 3.2.3, Thm. 5] il existe un isomorphisme  $\psi : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$  et des entiers positifs  $c_{r+1}, \dots, c_N \in \mathbb{N}^\times$  tels que

$$\psi(H) = Z(y_{r+1}^{c_{r+1}} - 1, \dots, y_N^{c_N} - 1) \subset \mathbb{T}^N.$$

Alors on a  $\psi(H) = F \cdot K$  avec  $K := Z(y_{r+1} - 1, \dots, y_N - 1) \subset \mathbb{T}^N$  et

$$F := Z(y_1 - 1, \dots, y_r - 1, y_{r+1}^{c_{r+1}} - 1, \dots, y_N^{c_N} - 1) \subset \mathbb{T}^N.$$

Par [OV90, § 3.2.3, Thm. 4 et Prob. 10] il existe des vecteurs entiers  $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{Z}^N$  tels que l'inverse  $\psi^{-1} : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$  s'écrit comme  $y \mapsto (y^{v_1}, \dots, y^{v_N})$ .

Posons  $a_i := (v_{i1}, \dots, v_{ir}) \in \mathbb{Z}^r$  pour  $i = 1, \dots, N$ ; ainsi on a  $\psi^{-1}(K) = \varphi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}^r) = X_{\mathcal{A}}^\circ$ ,  $G := \psi^{-1}(F)$  est un groupe fini et

$$H = \psi^{-1}(F \cdot K) = \psi^{-1}(F) \cdot \psi^{-1}(K) = G \cdot X_{\mathcal{A}}^\circ.$$

□

### Proposition 2.4

- (a) Soit  $V \subset \mathbb{T}^N$ , alors  $\mu_i(V) \geq \frac{1}{2} \log(N+1)$  pour  $i = 1, \dots, \dim(V) + 1$ .
- (b) Soit  $V \subset \mathbb{T}^N$  une sous-variété de torsion, alors  $\mu_i(V) = \frac{1}{2} \log(N+1)$  pour  $i = 1, \dots, \dim(V) + 1$ .

*Démonstration.*— La partie (a) est conséquence directe du lemme 2.1. Pour la partie (b), on remarque que le lemme précédent implique qu’il existe des ensembles finis  $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_N\} \subset \mathbb{Z}^r$  et  $J \subset \text{Tors}(\mathbb{T}^r)$  tels que  $V = J \cdot X_{\mathcal{A}}^\circ$ . Par le lemme 2.2(b), il suffit de considérer le cas irréductible, c’est-à-dire  $V = \omega \cdot X_{\mathcal{A}}^\circ$  avec  $\omega \in \text{Tors}(\mathbb{T}^N)$ .

L’ensemble  $\omega \cdot \varphi_{\mathcal{A}}(\text{Tors}(\mathbb{T}^r)) \subset \mathbb{T}^N$  est dense dans  $\omega \cdot X_{\mathcal{A}}^\circ$  et il est contenu dans  $\text{Tors}(\mathbb{T}^N)$ , et donc  $h_\iota(\xi) = \frac{1}{2} \log(N+1)$  pour tout point  $\xi$  de cet ensemble. On en conclut que  $\mu_i(V) \leq \mu^{\text{ess}}(V) \leq \frac{1}{2} \log(N+1)$  pour tout  $i$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

En particulier  $\mu_i(\mathbb{T}^N) = \frac{1}{2} \log(N+1)$  pour  $i = 1, \dots, N+1$ .

En vue de ce résultat, il est naturel de se demander si la propriété (b) caractérise les sous-variétés de torsion, parmi toutes les sous-variétés irréductibles de  $\mathbb{T}^N$ . Plus précisément : soit  $V \subset \mathbb{T}^N$  une sous-variété irréductible qui n’est pas de torsion, et posons  $V^\circ$  pour la réunion des sous-variétés de torsion contenues dans  $V$  et  $V^* := V \setminus V^\circ$ . Est-il vrai que

$$\mu^{\text{abs}}(V^*) > \frac{1}{2} \log(N+1) ? \quad (2.5)$$

Par le théorème de M. Laurent [Lau84, Thm. 2], il n’existe qu’un nombre fini de sous-variétés de torsion maximales contenues dans  $V$ , ce qui implique que  $V^*$  est un ouvert non vide. Ainsi  $\mu^{\text{ess}}(V) \geq \mu^{\text{abs}}(V^*)$  et donc une réponse affirmative à la question (2.5) impliquerait une réponse aussi affirmative à la question soulevée précédemment, c’est-à-dire au fait que les sous-variétés irréductibles de  $\mathbb{T}^N$  soient caractérisées par la propriété (b) ci-dessus.

Prenons à présent la notation dans [Zha95, § 6]. Soit  $e_{V^*}$  le minimum absolu de  $V^*$  par rapport à la hauteur de Weil  $\widehat{h}_\iota$ . Pour un point quelconque  $\xi \in \mathbb{T}^N$  on a  $\widehat{h}_\iota(\xi) + \frac{1}{2} \log(N+1) \geq h_\iota(\xi)$  et donc

$$e_{V^*} + \frac{1}{2} \log(N+1) \geq \mu^{\text{abs}}(V^*).$$

On en déduit que une réponse affirmative à la question (2.5) ci-dessus représenterait aussi un raffinement du problème de Bogomolov sur le tore  $\mathbb{T}^N$  [Zha95, Thm. 6.2], [Bil97, Thm. 5.1(b)].

### 3 Estimations des hauteurs

Dans ce paragraphe nous obtenons les estimations pour la hauteur des variétés projectives à partir des résultats du paragraphe précédent.

La répartition des points algébriques de petite hauteur d’une sous-variété est en étroite relation avec le degré et la hauteur globale de la sous-variété en question. Le lien est donné par le *théorème des minimums successifs* [Zha95, Thm. 5.2] : pour une sous-variété irréductible  $V \subset \mathbb{P}^N$  de dimension  $r$

$$\mu_1(V) + \dots + \mu_{r+1}(V) \leq \frac{h(V)}{\deg(V)} \leq (r+1) \mu_1(V). \quad (3.1)$$

On renvoie à [DP98, Thm. 3.1] pour une démonstration élémentaire, basée sur les théorèmes de Bézout et de Hilbert-Samuel arithmétiques.

Tout d'abord, il est naturel de se demander si ces estimations sont précises pour des cas particuliers. Le théorème 0.1 montre que déjà pour les espaces projectifs, aucune de ces estimations n'est exacte : on a

$$\mu_1(\mathbb{P}^n) + \cdots + \mu_{n+1}(\mathbb{P}^n) < h(\mathbb{P}^n) < (n+1)\mu_1(\mathbb{P}^n),$$

car  $h(\mathbb{P}^n) = \frac{n+1}{2} \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}$  [BGS94, Lem. 3.3.1], et d'après le théorème 0.1

$$\mu_1(\mathbb{P}^n) + \cdots + \mu_{n+1}(\mathbb{P}^n) = \frac{1}{2} \log(n+1) + \cdots + \frac{1}{2} \log(1) \quad , \quad (n+1)\mu_1(\mathbb{P}^n) = \frac{n+1}{2} \log(n+1).$$

Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème 0.1 et des estimations (3.1) :

**Corollaire 3.1** (du théorème 0.1) *Soit  $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_N\} \subset \mathbb{Z}^n$  un ensemble fini de dimension  $r$ , alors*

$$\frac{1}{2} (\log N_{\mathcal{A}}(r) + \cdots + \log N_{\mathcal{A}}(0)) \text{Vol}(\mathcal{A}) \leq h(X_{\mathcal{A}}) \leq \frac{(r+1)}{2} \log(N+1) \text{Vol}(\mathcal{A}).$$

Soit  $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_N\} \subset \mathbb{Z}^n$  un ensemble fini et  $\alpha \in (\overline{\mathbb{Q}}^\times)^{N+1}$  un vecteur à coordonnées algébriques, et considérons l'application monomiale

$$\varphi_{\mathcal{A}, \alpha} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{P}^N \quad , \quad t \mapsto (\alpha_0 t^{a_0} : \cdots : \alpha_N t^{a_N}).$$

La variété monomiale  $X_{\mathcal{A}, \alpha} \subset \mathbb{P}^N$  associée est définie comme étant la clôture de Zariski de l'image de cette application, c'est-à-dire  $X_{\mathcal{A}, \alpha} := \overline{\varphi_{\mathcal{A}, \alpha}(\mathbb{T}^n)}$ . Les variétés toriques projectives sont des cas particuliers des variétés monomiales (correspondant au cas  $\alpha = (1, \dots, 1)$ ) et quelques unes des estimations précédentes peuvent s'étendre sans difficulté à cette situation plus générale.

Notons que  $X_{\mathcal{A}, \alpha}$  et  $X_{\mathcal{A}}$  sont linéairement isomorphes par l'application diagonale

$$\mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N \quad , \quad (x_0 : \cdots : x_N) \mapsto (\alpha_0^{-1} x_0 : \cdots : \alpha_N^{-1} x_N),$$

et donc elles jouissent des mêmes propriétés géométriques ; en particulier  $\dim(X_{\mathcal{A}, \alpha}) = \dim(\mathcal{A})$  et  $\deg(X_{\mathcal{A}, \alpha}) = \text{Vol}(\mathcal{A})$ . Pour une face  $P \in F(Q_{\mathcal{A}})$  du polytope  $Q_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}^n$ , on notera

$$\alpha(P) := (\alpha_i ; a_i \in P) \in (\overline{\mathbb{Q}}^\times)^{N(P)+1}.$$

**Proposition 3.2** *Soit  $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_N\} \subset \mathbb{Z}^n$  un ensemble fini de dimension  $r$  et  $\alpha \in (\overline{\mathbb{Q}}^\times)^{N+1}$ , alors*

- $\mu_i(X_{\mathcal{A}, \alpha}) \leq \min \{ h(\alpha(P)) ; P \in F(Q_{\mathcal{A}}), \dim(P) = r - i + 1 \}$  pour  $i = 1, \dots, r+1$ , et
- $h(X_{\mathcal{A}, \alpha}) \leq \frac{r+1}{2} h(\alpha) \text{Vol}(\mathcal{A})$ .

La démonstration suit exactement la démarche de celles du théorème 0.1 et du corollaire 3.1. Remarquons que la majoration pour les minimums successifs n'est plus une égalité dans le cas général (considérer l'exemple  $\mathcal{A} := \{0, 1\} \in \mathbb{Z}$  et  $\alpha := (1, 2) \in \mathbb{Q}^2$ ).

Plus généralement, cette méthode nous permet d'estimer le comportement du minimum essentiel et de la hauteur des variétés par rapport à des morphismes. Soit  $\varphi : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^M$

une application rationnelle définie par des formes  $\varphi_0, \dots, \varphi_M \in \overline{\mathbb{Q}}[x_0, \dots, x_N]$  de degré  $d$ . On définit son *degré* par  $\deg(\varphi) := d$ , et sa *hauteur*  $h_W(\varphi)$  par la formule

$$h_W(\varphi) := \sum_{v \in M_K^\infty} \lambda_v(K) \log \sqrt{\|\varphi_0\|_{W,v}^2 + \dots + \|\varphi_M\|_{W,v}^2} \\ + \sum_{v \in M_K \setminus M_K^\infty} \lambda_v(K) \log \max \{|\varphi_0|_v, \dots, |\varphi_M|_v\},$$

où  $K$  est un corps de nombres contenant les coefficients de  $\varphi$ ; pour  $v \in M_K^\infty$  on désigne par  $\|\cdot\|_{W,v}$  la métrique de Weyl relative à la place  $v$ , voir le paragraphe 1.

**Proposition 3.3** *Soit  $\varphi : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^M$  une application rationnelle,  $V \subset \mathbb{P}^N$  une sous-variété irréductible de dimension  $r$  et  $Z := \overline{\varphi(V)} \subset \mathbb{P}^M$  l'image de  $V$  par  $\varphi$ , alors*

$$\mu^{\text{ess}}(Z) \leq h_W(\varphi) + \deg(\varphi) \mu^{\text{ess}}(V) \quad , \quad \frac{h(Z)}{\deg(Z)} \leq (r+1) \left( h_W(\varphi) + \deg(\varphi) \frac{h(V)}{\deg(V)} \right).$$

*Démonstration.*— Soit  $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^{N+1}$ . Pour  $v \in M_K^\infty$

$$\log \|\varphi(\xi)\|_{2,v} \leq \log \sqrt{\|\varphi_0\|_{W,v}^2 + \dots + \|\varphi_M\|_{W,v}^2} + d \log \|\xi\|_{2,v}$$

comme conséquence de l'inégalité (1.1), tandis que pour  $v \in M_K \setminus M_K^\infty$  on a

$$\log \max \{|\varphi_0(\xi)|, \dots, |\varphi_M(\xi)|\} \leq \log \max \{|\varphi_0|_v, \dots, |\varphi_M|_v\} + d \log \max \{|\xi_0|_v, \dots, |\xi_N|_v\}$$

grâce à l'inégalité ultramétrique. On en obtient  $h(\varphi(\xi)) \leq h_W(\varphi) + d h(\xi)$  par sommation sur  $M_K$ .

Maintenant soit  $\varepsilon > 0$  quelconque, et soit  $Y \subset Z$  une sous-variété propre tel que  $\mu^{\text{ess}}(Z) \leq \mu^{\text{abs}}(Z \setminus Y) + \varepsilon$ . Considérons alors la clôture de Zariski  $X := \overline{\varphi^{-1}(Y)} \subset \mathbb{P}^N$ , qui est une sous-variété propre de  $V$  tel que  $\varphi(X) = Y$ . On a

$$\mu^{\text{abs}}(Z \setminus Y) \leq h_W(\varphi) + d \mu^{\text{abs}}(V \setminus X) \leq h_W(\varphi) + d \mu^{\text{ess}}(V),$$

ce qui démontre la majoration pour le minimum essentiel. L'estimation pour le quotient  $h(Z)/\deg(Z)$  suit directement de cette majoration et des estimations (3.1).  $\square$

Comme une autre conséquence du théorème des minimums successifs, on déduit la minoration suivante pour la hauteur d'une variété projective non contenue dans la réunion des hyperplans coordonnés :

**Corollaire 3.4** *(de la proposition 2.4(a)) Soit  $V \subset \mathbb{P}^N$  une sous-variété irréductible tel que  $V \not\subset Z(x_0 \cdots x_N)$ , alors*

$$h(V) \geq \frac{1}{2} \log(N+1) \deg(V).$$

Posons  $r := \dim(V)$ . Lorsque la codimension de  $V$  est grande, et plus précisément lorsque  $\frac{1}{2} \log(N+1) < h(\mathbb{P}^r) = \frac{r}{2} (\log(r+1) + O(1))$ , ce résultat améliore la minoration  $h(V) \geq \frac{h(\mathbb{P}^r)}{\deg(V)} \deg(V)$  ( $r := \dim(V)$ ) due à J.-B. Bost, H. Gillet et C. Soulé [BGS94, Prop. 4.1.2(i)]

et Thm. 5.2.3]. Notons que cette minoration est équivalente à la positivité de la hauteur des sous-variétés considérée dans cette référence.

Considérons maintenant la majoration pour la taille des coefficients du résultant creux. Soit  $\mathcal{A} := \{a_0, \dots, a_N\} \subset \mathbb{Z}^n$  un ensemble fini tel que  $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$ . Pour chaque  $i = 0, \dots, n$ , on introduit un groupe de  $N + 1$  variables  $U_i = \{U_{i0}, \dots, U_{iN}\}$  et posons

$$F_i := \sum_{j=0}^N U_{ij} x^{a_j} \in \mathbb{Q}[U_i][x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$$

pour le polynôme de Laurent générique de support  $\mathcal{A}$ . Soit

$$\Omega_{\mathcal{A}} := \{(\nu_0, \dots, \nu_n; \xi) \in (\mathbb{P}^N)^{n+1} \times \mathbb{T}^n ; F_i(\nu_i, \xi) = 0, i = 0, \dots, n\} \subset (\mathbb{P}^N)^{n+1} \times \mathbb{T}^n$$

la variété d'incidence de  $F_0, \dots, F_n$  sur  $\mathbb{T}^n$ , et soit  $\pi : (\mathbb{P}^N)^{n+1} \times \mathbb{T}^n \rightarrow (\mathbb{P}^N)^{n+1}$  la projection canonique. Alors  $\overline{\pi(\Omega_{\mathcal{A}})} \subset (\mathbb{P}^N)^{n+1}$  est une sous-variété irréductible de codimension 1, et le  $\mathcal{A}$ -résultant (ou résultant creux)  $\text{Rés}_{\mathcal{A}}$  est défini comme étant l'unique (à un signe près) polynôme irréductible définissant cette hypersurface [GKZ94, Ch. 8, Prop.-Defn. 1.1].

En fait, le  $\mathcal{A}$ -résultant coïncide avec la forme de Chow de la variété torique projective  $X_{\mathcal{A}}$  [GKZ94, Ch. 8, Prop. 2.1]. On peut estimer de façon routinière la taille maximale  $h_{\text{sup}}(\text{Rés}_{\mathcal{A}})$  de ses coefficients, à partir de la majoration pour  $h(X_{\mathcal{A}})$ .

*Démonstration du corollaire 0.2.* – Le  $\mathcal{A}$ -résultant est, par définition, un polynôme primitif (c'est-à-dire ses coefficients sont premiers entre eux) et donc de hauteur locale nulle pour toutes les places ultramétriques. Ainsi

$$h(X_{\mathcal{A}}) = m(\text{Rés}_{\mathcal{A}}; S_{N+1}^{n+1}) + (n+1) \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} \right) \text{Vol}(\mathcal{A}),$$

où  $m(\text{Rés}_{\mathcal{A}}; S_{N+1}^{n+1})$  désigne la  $S_{N+1}^{n+1}$ -mesure du polynôme  $\text{Rés}_{\mathcal{A}}$ , voir le paragraphe 1. Donc

$$\begin{aligned} h_{\text{sup}}(\text{Rés}_{\mathcal{A}}) &\leq m(\text{Rés}_{\mathcal{A}}) + (n+1) \log(N+1) \text{Vol}(\mathcal{A}) \\ &\leq h(X_{\mathcal{A}}) + (n+1) \log(N+1) \text{Vol}(\mathcal{A}) \\ &\leq \frac{3}{2} (n+1) \log(N+1) \text{Vol}(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

où  $m(\text{Rés}_{\mathcal{A}})$  désigne la mesure de Mahler de  $\text{Rés}_{\mathcal{A}}$ . La première inégalité est conséquence de [KPS01, Lem. 1.1] en regardant  $\text{Rés}_{\mathcal{A}}$  comme un polynôme en  $n+1$  groupes de  $N+1$  variables chacun, homogène de degré  $\text{Vol}(\mathcal{A})$  dans chaque groupe. La deuxième et la troisième inégalités sont des conséquences de [KPS01, Ineq. (1.2)] et du corollaire 3.1, respectivement.  $\square$

## 4 Un analogue arithmétique du théorème de Koushnirenko

Dans ce paragraphe on démontre un analogue arithmétique du théorème de Koushnirenko pour la hauteur des solutions d'un système d'équations polynomiales. On présente aussi des variantes de ce résultat pour le cas des intersections impropres.

Soit  $\mathcal{A} := \{a_0, \dots, a_N\} \subset \mathbb{Z}^n$  un ensemble fini. Pour une sous-variété irréductible  $V \subset \mathbb{T}^n$ , on considère son  $\mathcal{A}$ -degré et sa  $\mathcal{A}$ -hauteur, respectivement définis par

$$\deg_{\mathcal{A}}(V) := \deg(\varphi_{\mathcal{A}}(V)) \quad , \quad h_{\mathcal{A}}(V) := h(\varphi_{\mathcal{A}}(V)).$$

On étend par linéarité ces définitions au groupe des cycles  $Z(\mathbb{T}^n)$  du tore  $\mathbb{T}^n$ . Pour une sous-variété quelconque  $V \subset \mathbb{T}^n$ , on définit son  $\mathcal{A}$ -degré et sa  $\mathcal{A}$ -hauteur comme ceux de son cycle associé.

Dans la suite on définit un produit d'intersection entre cycles et diviseurs de  $\mathbb{T}^n$ . Tout d'abord, remarquons que tout diviseur de Cartier  $D \in \text{Div}(\mathbb{T}^n)$  est principal car l'anneau  $\overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  est factoriel. Posons alors  $f_D \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  pour le polynôme de Laurent (unique à un facteur scalaire près) définissant  $D$ .

Soit  $V \subset \mathbb{T}^n$  une sous-variété irréductible non contenue dans le support  $|D| \subset \mathbb{T}^n$  du diviseur  $D$ . Pour chaque composante irréductible  $C \in \text{Irr}(V \cap |D|)$  de l'intersection ensembliste  $V \cap |D|$  on considérera la multiplicité d'intersection classique définie par la longueur

$$\ell(V, D; C) := \text{lg}(\overline{\mathbb{Q}}[V]/(f_D))_{I(C)},$$

où  $I(C) \subset R := \overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  désigne l'idéal premier de définition de  $C$  et  $\text{lg}$  la longueur du  $R_{I(C)}$ -module  $(\overline{\mathbb{Q}}[V]/(f_D))_{I(C)}$ . Pour une sous-variété irréductible  $V \subset \mathbb{T}^n$  et un diviseur  $D \in \text{Div}(\mathbb{T}^n)$  quelconques on définit le produit

$$[V] \cdot D := \begin{cases} \sum_{C \in \text{Irr}(V \cap |D|)} \ell(V, D; C) [C] & \text{si } V \not\subset |D|, \\ [V] & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on l'étend par linéarité en un accouplement

$$Z(\mathbb{T}^n) \times \text{Div}(\mathbb{T}^n) \rightarrow Z(\mathbb{T}^n) \quad , \quad (Z, D) \mapsto Z \cdot D.$$

Pour plusieurs diviseurs  $D_1, \dots, D_s$  on pose  $Z \cdot D_1 \cdot D_2 \cdots D_s := ((Z \cdot D_1) \cdot D_2) \cdots D_s$ ; notons que ce cycle *dépend* de l'ordre des diviseurs choisi.

**Définition 4.1** Soit  $Z \in Z(\mathbb{T}^n)$  un cycle effectif et  $D_1, \dots, D_s \in \text{Div}(\mathbb{T}^n)$  des diviseurs effectifs, alors

$$Z \cdot D_1 \cdots D_s = \sum_C m(C) [C],$$

où  $C$  parcourt l'ensemble des sous-variétés irréductibles de l'intersection ensembliste  $|Z| \cap |D_1| \cap \cdots \cap |D_s|$  et  $m(C) \in \mathbb{N}$  avec  $m(C) = 0$  sauf pour une nombre fini des  $C$ . Cet entier

$$m(Z, D_1, \dots, D_s; C) := m(C)$$

est par définition la multiplicité d'intersection de  $Z$  avec  $D_1, \dots, D_s$  le long de  $C$ .

On vérifie aisément  $m(C) \geq 1$  lorsque  $C$  est une composante isolée de  $|Z| \cap |D_1| \cap \cdots \cap |D_s|$ , et donc le degré et la hauteur de l'intersection ensembliste sont majorés par ceux du cycle intersection :

$$\begin{aligned} \deg_{\mathcal{A}}(|Z| \cap |D_1| \cap \cdots \cap |D_s|) &\leq \deg_{\mathcal{A}}(Z \cdot D_1 \cdots D_s), \\ h_{\mathcal{A}}(|Z| \cap |D_1| \cap \cdots \cap |D_s|) &\leq h_{\mathcal{A}}(Z \cdot D_1 \cdots D_s). \end{aligned}$$

Par la suite on montre que pour une composante *propre*  $C$  de l'intersection d'une famille de diviseurs de  $\mathbb{T}^n$ , cette multiplicité coïncide avec la longueur; on démontre aussi la multilinéarité de  $m(C)$ .

**Lemme 4.1** Soient  $D_1, \dots, D_s \in \text{Div}(\mathbb{T}^n)$  et soit  $C \subset \mathbb{T}^n$  une composante irréductible de dimension  $n - s$  de  $|D_1| \cap \dots \cap |D_s|$ , alors

(a)  $m(\mathbb{T}^n, D_1, \dots, D_s; C) = \text{lg}(\overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]/(f_{D_1}, \dots, f_{D_s}))_{I(C)}$ , et

(b) l'application  $\mathbb{Z}^s \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(k_1, \dots, k_s) \mapsto m(\mathbb{T}^n, k_1 D_1, \dots, k_s D_s; C)$  est multilinéaire.

*Démonstration.*— Considérons d'abord la partie (a), qu'on démontrera par récurrence en  $s$ . Le cas  $s = 0$  étant trivial, on considère le cas  $s \geq 1$  en supposant que l'énoncé est valable pour  $s - 1$ .

Soit  $R := \overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ ,  $\mathfrak{a} := (f_{D_1}, \dots, f_{D_{s-1}}) \subset R$ ,  $\mathfrak{p} := I(C) \subset R$ , et  $A := (R/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}}$ . Autrement dit,  $(A, (\mathfrak{p}))$  est l'anneau local  $\mathcal{O}_{V,C}$  de  $V$  le long de  $C$ . On a  $\dim(\mathfrak{a}) = n - s + 1$  et  $\dim(\mathfrak{p}) = n - s = \dim(\mathfrak{a}) - 1$ , ce qui entraîne que  $A$  est un anneau de dimension 1. En outre, le polynôme de Laurent  $f := f_{D_s} \in R$  appartient à  $\mathfrak{p}$  et c'est un non-diviseur de zéro de  $A$ . On en déduit que  $A$  est Cohen-Macaulay car en dimension 1, un anneau est Cohen-Macaulay si et seulement si il contient un non diviseur de zéro.

Aussi on a  $\dim(A/(f)) = 0$  car  $f$  est un non-diviseur de zéro; on considère alors la multiplicité de Samuel  $e((f), A)$  de  $f$  dans  $A$  [FOV99, Sec. 1.2].

Soit  $\mathfrak{q} \in \text{Ass}(A)$  un idéal premier associé de  $A$  quelconque. Similairement on démontre que  $(A/\mathfrak{q}, (\mathfrak{p}))$  est un anneau local Cohen-Macaulay de dimension 1; en fait c'est un *domaine*. À nouveau  $\dim(A/(\mathfrak{q} + f)) = 0$  et on considère aussi la multiplicité  $e((f), A/\mathfrak{q})$  de  $f$  dans  $A/\mathfrak{q}$ .

On vérifie que  $f$  est un  $G$ -paramètre pour  $(A, (\mathfrak{p}))$  et pour  $(A/\mathfrak{q}, (\mathfrak{p}))$ , voir [FOV99, Defn. 1.2.10], et donc

$$e((f), A) = \text{lg}(A/(f)) \quad , \quad e((f), A/\mathfrak{q}) = \text{lg}(A/(\mathfrak{q} + f))$$

grâce à [FOV99, Cor. 1.2.13]. La formule d'associativité [FOV99, Thm. 1.2.8] entraîne

$$\text{lg}(A/(f)) = e((f), A) = \sum_{\mathfrak{q} \in \text{Ass}(A)} \text{lg}(A_{\mathfrak{q}}) e((f), A/\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{q} \in \text{Ass}(A)} \text{lg}(A_{\mathfrak{q}}) \text{lg}(A/(\mathfrak{q} + f)),$$

et on en conclut

$$\begin{aligned} m(C) &= \sum_{\mathfrak{q} \in \text{Ass}(A)} m(\mathbb{T}^n, D_1, \dots, D_{s-1}; Z(\mathfrak{q})) \ell(Z(\mathfrak{q}), D_s; C) \\ &= \sum_{\mathfrak{q} \in \text{Ass}(A)} \text{lg}(A_{\mathfrak{q}}) \text{lg}(A/(\mathfrak{q} + f)) \\ &= \text{lg}(A/(f)), \end{aligned}$$

car  $m(\mathbb{T}^n, D_1, \dots, D_{s-1}; Z(\mathfrak{q})) = \text{lg}(A_{\mathfrak{q}})$  par l'hypothèse de récurrence.

D'après ce qu'on vient de voir, la partie (b) se ramène à vérifier  $e((f^k), A) = k e((f), A)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^\times$ .

Ceci est une conséquence directe des définitions : soit  $P_A^{(f)}$  et  $P_A^{(f^k)}$  les fonctions de Hilbert-Samuel de  $((f), A)$  et de  $((f^k), A)$  respectivement, voir [FOV99, § 1.2]. Alors

$$P_A^{(f^k)}(t) = \lg(A/(f^k)^t) = \lg(A/(f^{kt})) = P_A^{(f)}(kt)$$

et donc  $e((f^k), A)t + O(1) = P_A^{(f^k)}(t) = P_A^{(f)}(kt) = e((f^k), A)kt + O(1)$  pour  $t \gg 0$ , ce qui établit l'égalité cherchée.  $\square$

Pour un polynôme de Laurent  $f \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , on note  $h_2(f)$  la hauteur associée à la norme  $\ell^2$ , voir le paragraphe 1.

**Lemme 4.2** *Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$  un ensemble fini tel que  $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$ ,  $f_1, \dots, f_s \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  des polynômes de Laurent tels que  $\text{Supp}(f_i) \subset \mathcal{A}$  pour  $i = 1, \dots, s$  et  $Z \in Z(\mathbb{T}^n)$  un cycle effectif, alors*

$$\begin{aligned} \deg_{\mathcal{A}}(Z \cdot \text{div}(f_1) \cdots \text{div}(f_s)) &\leq \deg_{\mathcal{A}}(Z), \\ h_{\mathcal{A}}(Z \cdot \text{div}(f_1) \cdots \text{div}(f_s)) &\leq h_{\mathcal{A}}(Z) + \deg_{\mathcal{A}}(Z) \sum_{i=1}^s h_2(f_i). \end{aligned}$$

*Démonstration.* – Il suffit de démontrer le cas  $s := 1$  de l'énoncé, car le cas général s'en suit par itération. En plus, par linéarité on peut se ramener au cas où  $Z = [V]$ , où  $V \subset \mathbb{T}^n$  est une sous-variété irréductible. Le cas  $V \subset Z(f_1)$  étant évident, on suppose sans perte de généralité  $V$  non contenue dedans  $Z(f_1)$ .

Soit  $W := \varphi_{\mathcal{A}}(V) \subset \mathbb{P}^N$  avec  $N + 1 = \text{Card}(\mathcal{A})$ , et notons  $\ell := (\varphi_{\mathcal{A}}^*)^{-1}(f) \in \mathbb{Q}[y_0, \dots, y_N]$  la forme linéaire correspondant au polynôme de Laurent  $f := f_1$ .

L'hypothèse  $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$  équivaut à ce que  $\varphi_{\mathcal{A}} : \mathbb{T}^n \rightarrow X_{\mathcal{A}}^{\circ}$  soit un isomorphisme, ce qui implique que la restriction  $\varphi_{\mathcal{A}} : V \rightarrow W$  est aussi un isomorphisme. On en déduit l'égalité des cycles

$$(\varphi_{\mathcal{A}})_*(V \cdot \text{div}(f)) := \sum_{C \in \text{Irr}(V \cap Z(f))} \ell(V, \text{div}(f); C) [\varphi_{\mathcal{A}}(C)] = W \cdot \text{div}(\ell) \in Z(\mathbb{T}^n),$$

et donc  $\deg_{\mathcal{A}}(V \cdot \text{div}(f)) = \deg(W \cdot \text{div}(\ell))$  et  $h_{\mathcal{A}}(V \cdot \text{div}(f)) = h(W \cdot \text{div}(\ell))$ .

La clôture de Zariski  $\overline{W} \subset \mathbb{P}^N$  n'est pas contenue dans  $Z(\ell)$  et donc

$$\deg(\overline{W} \cdot \text{div}(\ell)) = \deg(\overline{W}) \quad , \quad h(\overline{W} \cdot \text{div}(\ell)) = h(\overline{W}) + \deg(\overline{W}) h_{\overline{W}}(\ell),$$

par le théorème de Bézout arithmétique dans la version de [Phi95, Prop. 4]. Ici  $h_{\overline{W}}(\ell)$  désigne la hauteur de  $\ell$  relative à la sous-variété  $\overline{W}$ , on renvoie à [Phi95, p. 355] pour sa définition précise. Cette hauteur est bornée par  $h_{\overline{W}}(\ell) \leq h_2(\ell)$ , ce qui est établi au cours de la démonstration de [Phi95, Prop. 4].

En outre, le cycle  $W \cdot \text{div}(\ell)$  est la restriction de  $\overline{W} \cdot \text{div}(\ell)$  à l'ouvert  $\mathbb{T}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ , et donc

$$\deg(W \cdot \text{div}(\ell)) \leq \deg(\overline{W} \cdot \text{div}(\ell)) = \deg(\overline{W}) = \deg_{\mathcal{A}}(V),$$

et similairement

$$h(W \cdot \text{div}(\ell)) \leq h(\overline{W} \cdot \text{div}(\ell)) \leq h(\overline{W}) + \deg(\overline{W}) h_2(\ell) = h_{\mathcal{A}}(V) + \deg_{\mathcal{A}}(V) h_2(f).$$

Ainsi on a établi  $\deg_{\mathcal{A}}(V \cdot \text{div}(f)) \leq \deg_{\mathcal{A}}(V)$  et  $h_{\mathcal{A}}(V \cdot \text{div}(f)) \leq h_{\mathcal{A}}(V) + \deg_{\mathcal{A}}(V) h_2(f)$ .  $\square$

Soit  $Q \subset \mathbb{R}^n$  un polytope rationnel et  $\mathcal{A}_Q := Q \cap \mathbb{Z}^n$  l'ensemble de ses points entiers. La  $Q$ -hauteur de Weil d'un point  $\xi \in \mathbb{P}^n$  se compare avec sa  $\mathcal{A}_Q$ -hauteur projective : on a

$$\widehat{h}_Q(\xi) \leq h_{\mathcal{A}}(\xi) \leq \widehat{h}_Q(\xi) + \frac{1}{2} \log(\text{Card}(\mathcal{A})).$$

L'application  $Q \mapsto \widehat{h}_Q$  est additive par rapport à la somme de Minkowski des polytopes, et invariante par translations :

**Lemme 4.3**

(a) Soit  $P, Q \subset \mathbb{R}^n$  des polytopes rationnels, alors  $\widehat{h}_{P+Q} = \widehat{h}_P + \widehat{h}_Q$ .

(b) Soit  $Q \subset \mathbb{R}^n$  un polytope rationnel et  $b \in \mathbb{Z}^n$ , alors  $\widehat{h}_{b+Q} = \widehat{h}_Q$ .

*Démonstration.*— Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$  un ensemble fini quelconque et  $\widehat{h}_{\mathcal{A}}$  la  $\mathcal{A}$ -hauteur de Weil associée, voir le paragraphe 1. Soit  $c \in \text{Conv}(\mathcal{A}) \cap \mathbb{Z}^n$ , et prenons des réels non-négatifs  $\{r_a \in \mathbb{R}_+; a \in \mathcal{A}\}$  tels que  $\sum_{a \in \mathcal{A}} r_a a = c$  et  $\sum_{a \in \mathcal{A}} r_a = 1$ . Pour  $\xi \in \mathbb{T}^n$  et  $v \in M_K$  on a

$$|\xi^c|_v = \prod_{a \in \mathcal{A}} |\xi^a|_v^{r_a} \leq \max \{|\xi^a|_v; a \in \mathcal{A}\};$$

ainsi on a montré  $\widehat{h}_{\mathcal{A}}(\xi) = \widehat{h}_{\text{Conv}(\mathcal{A})}(\xi)$ .

Maintenant soit  $\mathcal{B} := P \cap \mathbb{Z}^n$  et  $\mathcal{A} := Q \cap \mathbb{Z}^n$ . La partie (a) se déduit de l'identité  $\text{Conv}(\mathcal{B} + \mathcal{A}) = P + Q$  due à [CLO98, Ch. 7, Prop. 4.3], tandis que la partie (b) est conséquence immédiate de la partie (a) et de la formule du produit.  $\square$

Considérons à présent la hauteur  $h_1(f)$  associée à la norme  $\ell^1$ , voir le paragraphe 1. Cette hauteur se compare avec la hauteur  $h_2$  ; on a  $h_2(f) \leq h_1(f) \leq h_2(f) + \frac{1}{2} \log(\text{Card}(\text{Supp}(f)))$ . En plus, elle est sous-additive : pour  $f, g \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  on a

$$h_1(fg) \leq h_1(f) + h_1(g).$$

Le théorème 0.3 est le cas  $K := \mathbb{Q}$  de l'énoncé suivant :

**Théorème 4.4** Soient  $f_1, \dots, f_n \in K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  des polynômes de Laurent à coefficients dans  $K$ , et posons  $Q := \mathcal{N}(f_1, \dots, f_n) \subset \mathbb{R}^n$ .

Soit  $Z(f_1, \dots, f_n)_0$  l'ensemble des points isolés de  $Z(f_1, \dots, f_n) \subset \mathbb{T}^n$ . Pour chaque point  $\xi$  dans cet ensemble on note  $\ell(\xi) := \dim_{\overline{\mathbb{Q}}}(\overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]/(f_1, \dots, f_n))_{I(\xi)}$  la multiplicité d'intersection de  $f_1, \dots, f_n$  en  $\xi$ . Alors

$$\sum_{\xi \in Z(f_1, \dots, f_n)_0} \ell(\xi) \widehat{h}_Q(\xi) \leq n! \text{Vol}_n(Q) \sum_{i=1}^n h_1(f_i).$$

S' supposons pour le moment  $L_{Q \cap \mathbb{Z}^n} = \mathbb{Z}^n$ . Soit  $k \in \mathbb{N}^\times$ , et posons  $\mathcal{A}_k := (kQ) \cap \mathbb{Z}^n$ . Soit  $a \in Q \cap \mathbb{Z}^n = \mathcal{A}_1$  un vecteur entier dans  $Q$  quelconque, alors  $(k-1)a + \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_k$  et donc  $L_{\mathcal{A}_k} \supset L_{\mathcal{A}_1} = \mathbb{Z}^n$  par hypothèse, ce qui entraîne  $L_{\mathcal{A}_k} = \mathbb{Z}^n$ .

Les polynômes de Laurent  $f_1^k, \dots, f_n^k$  sont supportés dans  $\mathcal{A}_k$  ; alors leur applique le lemme 4.2 et on trouve

$$h_{\mathcal{A}_k}(\mathbb{T}^n \cdot \operatorname{div}(f_1^k) \cdots \operatorname{div}(f_n^k)) \leq h_{\mathcal{A}_k}(\mathbb{T}^n) + \operatorname{deg}_{\mathcal{A}_k}(\mathbb{T}^n) \sum_{i=1}^n h_2(f_i^k).$$

Soit  $V := Z(f_1, \dots, f_n) \subset \mathbb{T}^n$  et posons  $\ell_k(\xi) := \dim_{\overline{\mathbb{Q}}}(\overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]/(f_1^k, \dots, f_n^k))_{I(\xi)}$  pour chaque point isolé  $\xi \in Z(f_1^k, \dots, f_n^k)_0 = V_0$ . La positivité des multiplicités d'intersection et du lemme 4.1(a) entraînent

$$\sum_{\xi \in V_0} \ell_k(\xi) \widehat{h}_{kQ}(\xi) \leq \sum_C m(C) h_{\mathcal{A}_k}(C) = h_{\mathcal{A}_k}(\mathbb{T}^n \cdot \operatorname{div}(f_1^k) \cdots \operatorname{div}(f_n^k)),$$

car  $\operatorname{Conv}(\mathcal{A}_k) = k \operatorname{Conv}(\mathcal{A}_1) = kQ$  et  $\widehat{h}_{kQ}(\xi) \leq h_{\mathcal{A}_k}(\xi)$ . En outre,  $\operatorname{deg}_{\mathcal{A}_k}(\mathbb{T}) = \operatorname{Vol}(\mathcal{A}_k) = n! \operatorname{Vol}_n(kQ)$  car  $L_{\mathcal{A}_k} = \mathbb{Z}^n$  et on obtient

$$h_{\mathcal{A}_k}(\mathbb{T}^n) + \operatorname{deg}_{\mathcal{A}_k}(\mathbb{T}^n) \sum_{i=1}^n h_2(f_i^k) \leq n! \operatorname{Vol}_n(kQ) \left( \frac{1}{2} (n+1) \log(\operatorname{Card}(\mathcal{A}_k)) + \sum_{i=1}^n h_1(f_i^k) \right)$$

en utilisant aussi la majoration pour la hauteur de la variété torique  $X_{\mathcal{A}_k}$  (corollaire 3.1) et l'estimation  $h_2(f_i) \leq h_1(f_i)$ .

Ensuite, on a  $\ell_k(\xi) = k^n \ell(\xi)$  par le lemme 4.1(b) et  $\widehat{h}_{kQ}(\xi) = k \widehat{h}_Q(\xi)$  grâce à l'additivité de la hauteur  $\widehat{h}$  (lemme 4.3(a)). Aussi on a  $\operatorname{Vol}_n(kQ) = k^n \operatorname{Vol}_n(Q)$  et  $h_1(f_i^k) \leq k h_1(f_i)$ .

Soient  $b \in \mathbb{Z}^n$  et  $d \in \mathbb{N}^\times$  tels que  $Q \subset b + dS$ , où  $S$  désigne le simplexe standard de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $kQ \subset kb + kdS$  et donc  $\log(\operatorname{Card}(\mathcal{A}_k)) \leq \log(\operatorname{Card}((kb + kdS) \cap \mathbb{Z}^n)) = \log \binom{k d + n}{n} = O_k(\log k)$  (ici la notation  $O_k$  réfère à la dépendance en  $k$ ). On en obtient

$$\sum_{\xi \in V_0} \ell(\xi) \widehat{h}_Q(\xi) \leq n! \operatorname{Vol}_n(Q) \sum_{i=1}^n h_1(f_i) + O_k \left( \frac{\log k}{k} \right),$$

d'où on conclut en faisant  $k \rightarrow \infty$ .

Maintenant considérons le cas général où  $\dim(Q) = n$ . Soit  $L_{\mathcal{A}}$  le sous-module de  $\mathbb{Z}^n$  engendré par les différences des vecteurs dans  $\mathcal{A} := Q \cap \mathbb{Z}^n$ , qui est un sous-réseau de  $\mathbb{Z}^n$ , mais pas forcément égal à  $\mathbb{Z}^n$ . On montre dans la suite que ce cas se réduit au cas précédent.

Soient  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{N}^\times$  les facteurs élémentaires de  $L_{\mathcal{A}}$ , et  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}^n$  des vecteurs entiers formant une base de  $\mathbb{Z}^n$  tels que  $c_1 v_1, \dots, c_n v_n$  soit une base de  $L_{\mathcal{A}}$ .

Soit  $\beta : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  l'application linéaire définie par  $v_i \mapsto c_i v_i$ , qui est un isomorphisme entre  $\mathbb{Z}^n$  et  $L_{\mathcal{A}}$ . Soit  $\mathcal{B} := \beta^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{Z}^n$  et  $P := \operatorname{Conv}(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^n$ . On a  $L_{\mathcal{B}} = \mathbb{Z}^n$  et donc  $\operatorname{Vol}(\mathcal{B}) = n! \operatorname{Vol}_n(P) = n! \operatorname{Vol}_n(Q) / \gamma$ , où  $\gamma := c_1 \cdots c_n$  est l'indice du réseau  $L_{\mathcal{A}}$ .

Soit  $\psi : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  le morphisme défini par  $t \mapsto (t^{\beta(e_1)}, \dots, t^{\beta(e_n)})$  où les  $e_j$  désignent les vecteurs de la base standard de  $\mathbb{R}^n$ , de telle sorte que  $\varphi_{\mathcal{A}} = \varphi_{\mathcal{B}} \circ \psi$ .

Considérons l'inclusion d'anneaux  $\psi^* : B := \overline{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow A := \overline{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}^n)$  ; on note que

$$\psi^*(B) = \overline{\mathbb{Q}}[x^{\pm \beta(e_1)}, \dots, x^{\pm \beta(e_n)}] \subset A = \overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$$

et donc  $\psi^*$  est finie, car les vecteurs  $\beta(e_1), \dots, \beta(e_n)$  sont linéairement indépendants.

Notons  $K := \psi^*(B)_{(0)} \subset L := A_{(0)}$  les corps des fractions respectifs ; on a  $\text{Card}(\psi^{-1}(\xi)) = \gamma$  pour tout  $\xi \in \mathbb{T}^n$  et donc  $[L : K] = \gamma$ .

Soit  $g_i := (\psi^*)^{-1}(f_i) \in B$  pour  $i = 1, \dots, n$ , et posons  $\mathfrak{g} := (g_1, \dots, g_n) \subset B$  et  $\mathfrak{f} := (f_1, \dots, f_n) = (\psi^*(\mathfrak{g})) \subset A$ . Soit  $W := Z(\mathfrak{g}) \subset \mathbb{T}^n$  la variété définie par  $g_1, \dots, g_n$ . Soit  $\eta \in W_0$  un point isolé,  $I(\eta) \subset B$  son idéal, et notons  $\ell(\eta) = \text{lg}(B/\mathfrak{g})_{I(\eta)}$  la multiplicité d'intersection de  $g_1, \dots, g_n$  en  $\eta$ .

On remarque que  $B_{I(\eta)}$  est un anneau local,  $A_{I(\eta)}$  est un  $B_{I(\eta)}$ -module fini de dimension  $n$ , et  $\dim(A_{I(\eta)}/\mathfrak{f}) = 0$ . Par la formule d'associativité [FOV99, Thm. 1.2.8] on obtient

$$e(\mathfrak{g}, A_{I(\eta)}) = \text{lg}(A_{I(\eta)})_{(0)} e(\mathfrak{g}, B_{I(\eta)}),$$

car l'idéal  $(0) \subset B_{I(\eta)}$  est le seul idéal premier minimal de  $A_{I(\eta)}$ . On remarque aussi que  $B_{I(\eta)}$  est un anneau Cohen-Macaulay et que  $g_1, \dots, g_n$  est un système de  $G$ -paramètres pour  $\mathfrak{g}$ , et donc  $e(\mathfrak{g}, B_{I(\eta)}) = \text{lg}(B/\mathfrak{g})_{I(\eta)} = \ell(\eta)$  par [FOV99, Cor. 1.2.13]. Similairement on trouve  $e(\mathfrak{g}, A_{I(\eta)}) = \text{lg}(A/\mathfrak{f})_{I(\eta)}$ .

L'anneau  $(A/\mathfrak{f})_{I(\eta)}$  est artinien et donc  $\text{lg}(A/\mathfrak{f})_{I(\eta)} = \sum_{\xi \in \psi^{-1}(\eta)} \text{lg}(A/\mathfrak{f})_{I(\xi)} = \sum_{\xi \in \psi^{-1}(\eta)} \ell(\xi)$ . Finalement  $\text{lg}(A_{I(\eta)})_{(0)} = [L : K] = \gamma$ ; en regroupant l'information obtenue on trouve

$$\sum_{\xi \in \psi^{-1}(\eta)} \ell(\xi) = \gamma \ell(\eta).$$

En plus on a  $\widehat{h}_Q(\xi) = \widehat{h}_P(\eta)$  pour tout  $\xi \in \psi^{-1}(\eta)$ , car  $\varphi_{\mathcal{A}}(\xi) = \varphi_{\mathcal{B}}(\eta)$ . On observe aussi que  $\mathcal{N}(g_i) \subset P$  et que  $L_{P \cap \mathbb{Z}^n} = \mathbb{Z}^n$ . Ainsi on est dans les conditions du cas précédent, d'où on déduit

$$\sum_{\xi \in V_0} \ell(\xi) \widehat{h}_Q(\xi) = \gamma \sum_{\eta \in W_0} \ell(\eta) \widehat{h}_P(\eta) \leq \gamma n! \text{Vol}_n(P) \sum_{i=1}^n h_1(g_i) = n! \text{Vol}_n(Q) \sum_{i=1}^n h_1(f_i).$$

Le seul cas qui reste est  $\dim(Q) < n$ . Dans cette situation, la variété torique  $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^N$  est aussi de dimension  $< n$  et donc les fibres de l'application  $\varphi_{\mathcal{A}} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$  sont toutes de dimension  $> 0$  grâce au théorème de dimension des fibres [Sha74, § I.6.3]. Soient  $\ell_1, \dots, \ell_n \in \overline{\mathbb{Q}}[y_0, \dots, y_N]$  les formes linéaires correspondant à  $f_1, \dots, f_n$ , de sorte que

$$V = \varphi_{\mathcal{A}}^{-1}(X_{\mathcal{A}} \cap Z(\ell_1, \dots, \ell_n)) \subset \mathbb{T}^n$$

et donc  $V_0 = \emptyset$ . Aussi on a  $\text{Vol}_n(Q) = 0$ , et donc l'énoncé se réduit à l'inégalité triviale  $0 \leq 0$ .  $\square$

Ce résultat améliore le cas non-mixte du théorème de Bernstein-Koushnirenko arithmétique dû à Maillot [Mai00, Cor. 8.2.3]. Avec les notations et les hypothèses du théorème 4.4, le résultat de Maillot s'écrit

$$\sum_{\xi \in Z(f_1, \dots, f_n)_0} \ell(\xi) \widehat{h}_Q(\xi) \leq n! \text{Vol}_n(Q) \sum_{i=1}^n (m(f_i) + L(Q)), \quad (4.1)$$

où  $m(f_i)$  désigne la mesure de Mahler de  $f_i$ , et  $L(Q)$  est une constante positive associée à  $Q$ . Le point faible de ce résultat est son ineffectivité, due à la présence de cette constante  $L(Q)$  qu'on ne sait pas contrôler en général.

**Remarque 4.2** *Le seul cas où l'on dispose d'un certain contrôle de  $L(Q)$  est quand le polytope  $Q$  est absolument simple ; dans ce cas*

$$L(Q) \leq 3 \left( \frac{1}{2} \log(n-1) + 1 \right) N(Q) \quad (4.2)$$

pour  $n \geq 2$ , où  $N(Q)$  désigne la norme de  $Q$  [Mai00, Defn. 8.1.5 et Prop. 8.1.6]. Pourtant, il n'est pas possible de récupérer le théorème 4.4 à partir des inégalités (4.1) et (4.2) même dans cette situation restreinte, comme le montre l'exemple suivant :

Posons  $Q_0 := [0, d]^n \subset \mathbb{R}^n$ , qui est un polytope absolument simple de norme  $N(Q_0) = nd$ . Soit  $f \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  un polynôme à support contenu dans  $Q_0$ . Le [KPS01, Lem. 1.1] implique  $\log |f| \leq m(f) + nd \log 2$ , en regardant  $f$  comme un polynôme en  $n$  groupes de 1 variable chacun, de degré partiel borné par  $d$  en chaque variable. Ainsi

$$\begin{aligned} h_1(f) &\leq \log \|f\|_1 \\ &\leq m(f) + nd \log 2 + n \log(d+1) \\ &< m(f) + 3nd \left( \frac{1}{2} \log(n-1) + 1 \right) = m(f) + 3 \left( \frac{1}{2} \log(n-1) + 1 \right) N(Q_0). \end{aligned}$$

On en déduit que le théorème 4.4 est (du moins pour cet exemple) plus fort que l'inégalité qui résulte d'appliquer l'estimation (4.2) dans l'inégalité (4.1).

Comme une conséquence simple du théorème 4.4, on déduit l'inégalité de Bézout arithmétique suivante pour la hauteur de Weil des points de  $\mathbb{T}^n$  :

**Corollaire 4.5** *Soient  $f_1, \dots, f_n \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_n]$  des polynômes (ordinaires) de degré borné par  $d$  et  $V := Z(f_1, \dots, f_n) \subset \mathbb{T}^n$ , alors*

$$\sum_{\xi \in V_0} \ell(\xi) \widehat{h}(\xi) \leq d^{n-1} \sum_{i=1}^n h_1(f_i).$$

*Démonstration.*— Soit  $S \subset \mathbb{R}^n$  le simplexe standard, alors  $\text{Supp}(f_i) \subset dS$  et donc

$$\sum_{\xi \in V_0} \ell(\xi) \widehat{h}_{dS}(\xi) \leq n! \text{Vol}_n(dS) \sum_{i=1}^n h_1(f_i)$$

par le théorème 4.4. L'énoncé est impliqué par les identités  $\widehat{h}_{dS}(\xi) = d \widehat{h}(\xi)$  (conséquence du lemme 4.3(a)) et  $\text{Vol}_n(dS) = \frac{d^n}{n!}$ .  $\square$

Il est naturel de se demander si l'on peut obtenir une majoration similaire à celle du théorème 4.4 pour la hauteur  $\widehat{h}$  à la place de  $\widehat{h}_Q$ . L'exemple suivant montre que la réponse à cette question est négative dans le cas général :

**Exemple 4.3** *Soit  $d, H \in \mathbb{N}^\times$  et posons*

$$f_1 := x_1 - H, \quad f_2 := x_2 x_1^{-d} - H, \dots, \quad f_n := x_n x_{n-1}^{-d} - H \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}].$$

Ceci est un système de polynômes de Laurent de hauteur  $h_1(f_i) = \log(H + 1)$  et polytope de Newton

$$Q := \mathcal{N}(f_1, \dots, f_n) = \text{Conv}(\{0, e_1, e_2 - d e_1, \dots, e_n - d e_{n-1}\}) \subset \mathbb{R}^n$$

de volume 1. Pourtant

$$V := Z(f_1, \dots, f_n) = \{(H, H^{1+d}, \dots, H^{1+d+\dots+d^{n-1}})\} \subset \mathbb{T}^n$$

est un ensemble à un seul point (en accord avec le théorème de Koushnirenko géométrique) mais de grande hauteur, car  $\widehat{h}(V) = (1 + d + \dots + d^{n-1}) \log H$ .

Cependant  $\widehat{h}_Q(V) = \log H$ , ce qui est bien en accord avec la majoration  $\widehat{h}_Q(V) \leq n \log(H + 1)$  prédite par le théorème 4.4.

Toutefois, une telle majoration est valable dès que  $Q$  contient le simplexe standard :

**Proposition 4.6** *Dans les notations et hypothèses du théorème 4.4, supposons de plus qu'il existe  $b \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $b + S \subset Q$ , où  $S$  désigne le simplexe standard de  $\mathbb{R}^n$ , alors*

$$\sum_{\xi \in Z(f_1, \dots, f_n)_0} \ell(\xi) \widehat{h}(\xi) \leq n! \text{Vol}_n(Q) \sum_{i=1}^n h_1(f_i).$$

*Démonstration.*— On a  $\widehat{h}(\xi) = \widehat{h}_{b+S}(\xi) \leq \widehat{h}_Q(\xi)$  d'après le lemme 4.3(b). Le reste est une conséquence directe du théorème 4.4.  $\square$

Le résultat suivant généralise le théorème de Koushnirenko arithmétique au cas des intersections arbitraires, bien qu'avec la restriction  $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$  et une majoration légèrement plus faible quand on se met dans les hypothèses du théorème 4.4. On trouve ainsi une inégalité de type ensembliste, dans l'esprit de l'inégalité de Bézout due à J. Heintz [Hei83].

**Proposition 4.7** *Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$  un ensemble fini tel que  $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$  et  $f_1, \dots, f_s \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  des polynômes de Laurent tels que  $\text{Supp}(f_i) \subset \mathcal{A}$  pour  $i = 1, \dots, s$ , alors*

$$\begin{aligned} \deg_{\mathcal{A}}(Z(f_1, \dots, f_s)) &\leq \deg_{\mathcal{A}}(\text{div}(f_1) \cdots \text{div}(f_s)) \leq \text{Vol}(\mathcal{A}), \\ h_{\mathcal{A}}(Z(f_1, \dots, f_s)) &\leq h_{\mathcal{A}}(\text{div}(f_1) \cdots \text{div}(f_s)) \\ &\leq \text{Vol}(\mathcal{A}) \left( \frac{1}{2} (n+1) \log(\text{Card}(\mathcal{A})) + \sum_{i=1}^s h_2(f_i) \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.*— C'est une conséquence directe de la relation entre le degré et la hauteur du cycle  $\text{div}(f_1) \cdots \text{div}(f_s)$  et ceux de son support  $Z(f_1, \dots, f_s)$ , du lemme 4.2 et de l'estimation pour  $h(X_{\mathcal{A}})$  (corollaire 3.1).  $\square$

## 5 Le Nullstellensatz arithmétique creux

Finalement nous démontrons le théorème 0.4. Cette démonstration s'appuie sur l'inégalité de type Koushnirenko arithmétique suivante, pour les intersections dans l'espace affine  $\mathbb{A}^n$  (comparer avec [KPS01, Prop. 2.12]).

**Lemme 5.1** Soient  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  pour un certain  $n \geq 2$ . Posons  $d := \max_i \deg(f_i)$ ,  $h := \max_i h_{\text{sup}}(f_i)$  et  $\mathcal{A} := \text{Supp}(1, x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_s) \subset \mathbb{N}^n$ , alors

$$h(Z(f_1, \dots, f_s)) \leq \text{Vol}(\mathcal{A}) (nh + 5n(n+1) \log(d+1)).$$

*Démonstration.*— On reprend la démonstration de [KPS01, Prop. 2.12] à partir de la page 556, ligne 16, où l'on remplacera l'application de [KPS01, Prop. 1.7] par le corollaire 3.1. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} h(V) &\leq h(X_{\mathcal{A}}) + nh \deg(X_{\mathcal{A}}) + 4(n+1) \log(N+1) \deg(X_{\mathcal{A}}) \\ &\leq \text{Vol}(\mathcal{A}) \left( nh + \frac{1}{2}(n+1) \log(N+1) + 4(n+1) \log(N+1) \right) \\ &\leq \text{Vol}(\mathcal{A}) (nh + 5(n+1) \log(N+1)). \end{aligned}$$

Finalement  $\log(N+1) \leq \log\left(\binom{d+n}{n} + 1\right) \leq n \log(d+1)$  car  $n \geq 2$ , d'où on déduit la majoration cherchée.  $\square$

*Démonstration du théorème 0.4.*— On supposera sans perte de généralité  $n, d \geq 2$ ; les autres cas ont été considérés de façon satisfaisante dans [KPS01, Lem. 3.7 et 3.8].

D'abord on refait la majoration pour  $\eta(f_1, \dots, f_s)$  dans [KPS01, Lem. 4.9] : on reprend la notation et la démonstration de ce lemme à partir de la page 590, ligne -2, où l'on appliquera le lemme 5.1 ci-dessus à la place de [KPS01, Prop. 2.12]; on en obtient

$$\begin{aligned} \eta(f_1, \dots, f_s) &\leq \left( n \max_i h_{\text{sup}}(g_i) + 5n(n+1) \log(d+1) \right) \mathcal{V} \\ &\leq \left( n(h + \log s + 2(n+1) \log(d+1)) + 5n(n+1) \log(d+1) \right) \mathcal{V} \\ &= n \mathcal{V} (h + \log s + 7(n+1) \log(d+1)). \end{aligned}$$

Pour finir la démonstration, on considère la version "intrinsèque" du Nullstellensatz arithmétique [KPS01, Thm. 2]. Dans les hypothèses du théorème 0.4, on a  $\delta \leq \mathcal{V} := \text{Vol}(\mathcal{A})$  grâce à [KPS01, Lem. 4.9] et  $\eta \leq n \mathcal{V} (h + \log s + 7(n+1) \log(d+1))$  par la majoration ci-dessus. On en conclut

$$\begin{aligned} h_{\text{sup}}(a), h_{\text{sup}}(g_i) &\leq (n+1)^2 d (2\eta + (h + \log s) \delta + 21(n+1)^2 d \log(d+1) \delta) \\ &\leq (n+1)^2 d \left( 2n(h + \log s + 7(n+1) \log(d+1)) \mathcal{V} + (h + \log s) \mathcal{V} \right. \\ &\quad \left. + 21(n+1)^2 d \log(d+1) \mathcal{V} \right) \\ &\leq (n+1)^2 d \mathcal{V} \left( (2n+1)(h + \log s) + 28(n+1)^2 d \log(d+1) \right) \\ &\leq 2(n+1)^3 d \mathcal{V} (h + \log s + 14(n+1) d \log(d+1)). \end{aligned}$$

$\square$

## Références

[Bil97] Y. BILU, *Limit distribution of small points on algebraic tori*, Duke Math. J. **89** (1997) 465-476.

- [BZ95] E. BOMBIERI, U. ZANNIER, *Algebraic points on subvarieties of  $\mathbb{G}_m^n$* , Internat. Math. Res. Notices **7** (1995) 333-347.
- [BGS94] J.-B. BOST, H. GILLET, C. SOULÉ, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994) 903-1027.
- [CLO98] D. COX, J. LITTLE, D. O'SHEA, *Using algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics **185**, Springer, 1998.
- [D'An02] C. D'ANDREA, *Macaulay style formulas for sparse resultants*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002) 2595-2629.
- [Dav03] S. DAVID, *On the height of subvarieties of groups varieties*, à paraître dans J. Ramanujan Math. Soc..
- [DP98] S. DAVID, P. PHILIPPON, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes*, Number theory (Tiruchirapalli, 1996), Contemp. Math. **210**, Amer. Math. Soc, 1998, pp. 333-364.
- [DP99] S. DAVID, P. PHILIPPON, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **28** (1999) 489-543.
- [DP01] S. DAVID, P. PHILIPPON, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes. II*, Comment. Math. Helv. **77** (2002) 639-700.
- [FOV99] H. FLENNER, L. O'CARROLL, W. VOGEL, *Joins and intersections*, Springer Monographs in Math., Springer, 1999.
- [Ful84] W. FULTON, *Intersection theory*, Erg. Math. Grenzgeb. 3. Folge, Bd. 2, Springer, 1984.
- [Ful93] W. FULTON, *Introduction to toric varieties*, Ann. Math. Studies **131**, Princeton Univ. Press, 1993.
- [GKZ94] I.M. GELFAND, M.M. KAPRANOV, A.V. ZELEVINSKY, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Birkhäuser, 1994.
- [HLP67] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, 1967.
- [Hei83] J. HEINTZ, *Definability and fast quantifier elimination in algebraically closed fields*, Theoret. Comput. Sci. **24** (1983) 239-277.
- [KPS01] T. KRICK, L.M. PARDO, M. SOMBRA, *Sharp estimates for the arithmetic Nullstellensatz*, Duke Math. J. **109** (2001) 521-598.
- [Lau84] M. LAURENT, *Équations diophantiennes exponentielles*, Invent. Math. **78** (1984) 299-327.
- [Mai00] V. MAILLOT, *Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables*, Mém. Soc. Math. Fr. **80** (2000), vi+129 pp..
- [OV90] A.L. ONISHCHIK, E.B. VINBERG, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Series in Soviet Math., Springer, 1990.
- [PS93] P. PEDERSEN, B. STURMFELS, *Product formulas for resultants and Chow forms*, Math. Z. **214** (1993) 377-396.
- [Phi95] P. PHILIPPON, *Sur des hauteurs alternatives III*, J. Math. Pures Appl. **74** (1995) 345-365.
- [Roj00] J.M. ROJAS, *Algebraic geometry over four rings and the frontier to tractability*, Contemp. Math. **270** 275-321, Amer. Math. Soc., 2000.
- [Sha74] I.R. SHAFAREVICH, *Basic algebraic geometry*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **213**, Springer, 1974.
- [Stu94] B. STURMFELS, *On the Newton polytope of the resultant*, J. Algebraic Combin. **3** (1994) 207-236.
- [Stu02] B. STURMFELS, *Solving systems of polynomial equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **97**, Amer. Math. Soc., 2002.
- [Ull98] E. ULLMO, *Positivité et discrétion des points algébriques des courbes*, Ann. of Math. **147** (1998) 167-179.

[Wey50] H. WEYL, *The theory of groups and quantum mechanics*, Dover, 1950.

[Zha95] S.-W. ZHANG, *Positive line bundles on arithmetic varieties*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995) 187-221.

MARTÍN SOMBRA : Université de Paris 7, UFR de Mathématiques, Équipe de Géométrie et Dynamique, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.

E-mail : [sombra@math.jussieu.fr](mailto:sombra@math.jussieu.fr)