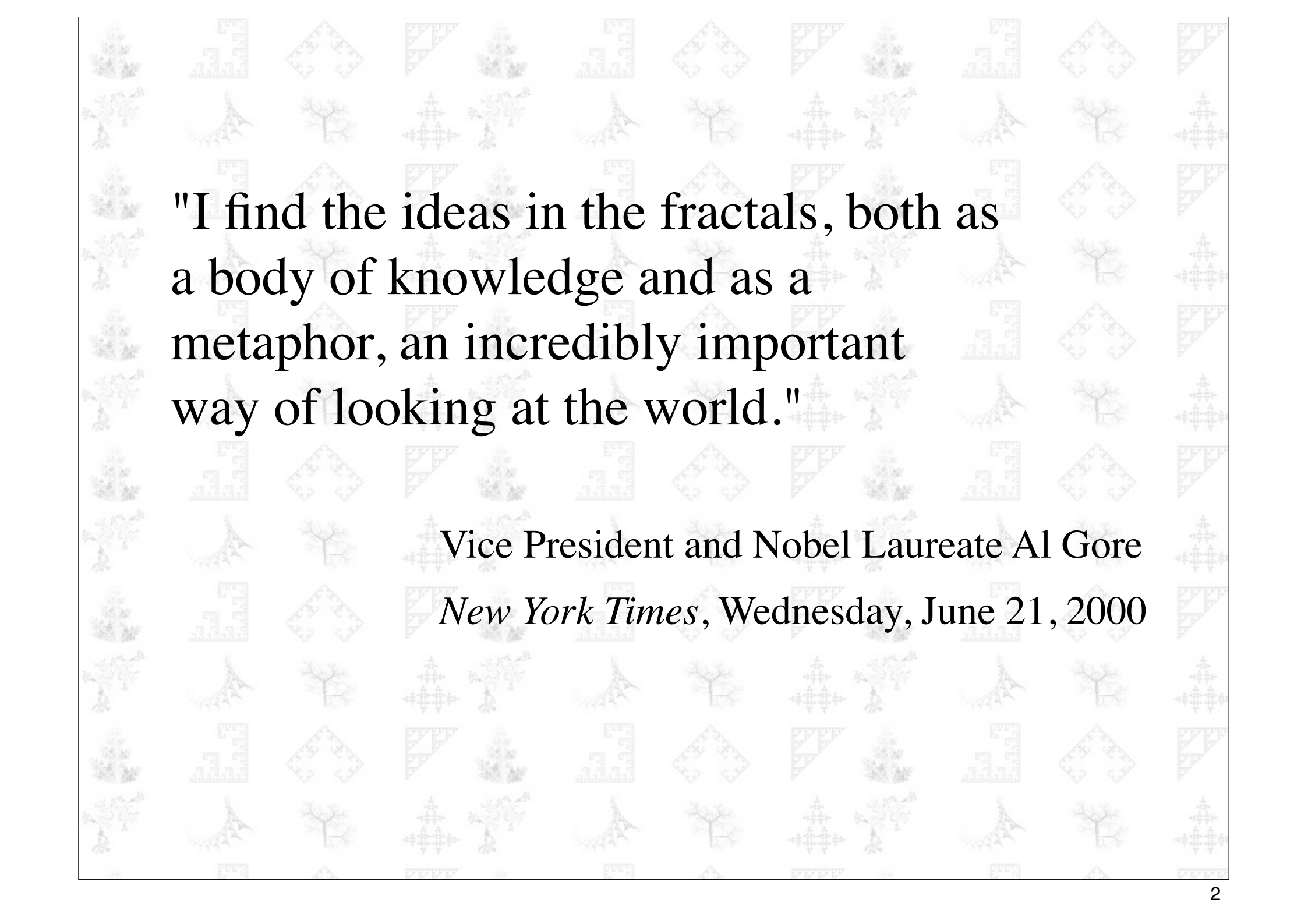




FRACTALS

Núria Fagella i Àlex Haro
Facultat de Matemàtiques, UB

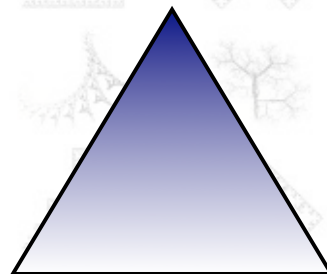
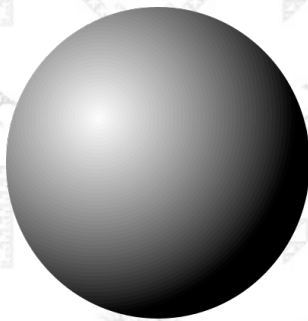
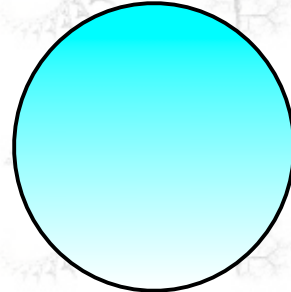
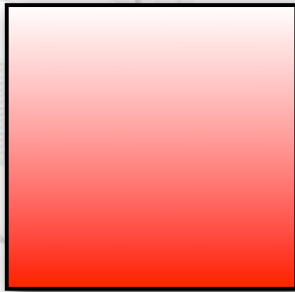


"I find the ideas in the fractals, both as
a body of knowledge and as a
metaphor, an incredibly important
way of looking at the world."

Vice President and Nobel Laureate Al Gore
New York Times, Wednesday, June 21, 2000

Natura i fractals

Les figures clàssiques són les figures perfectes.



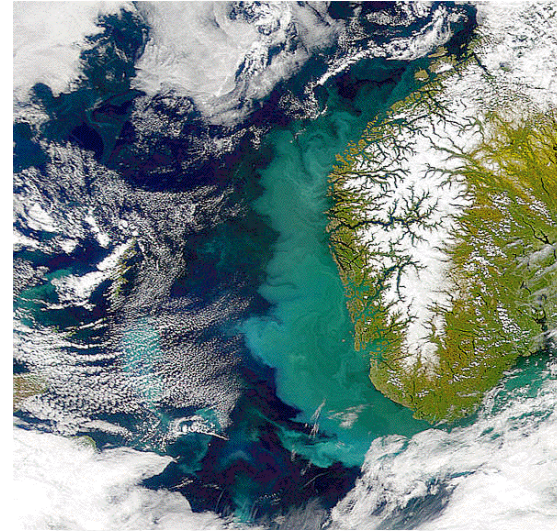
Natura i Fractals

Però la natura ens mostra formes molt més complicades....

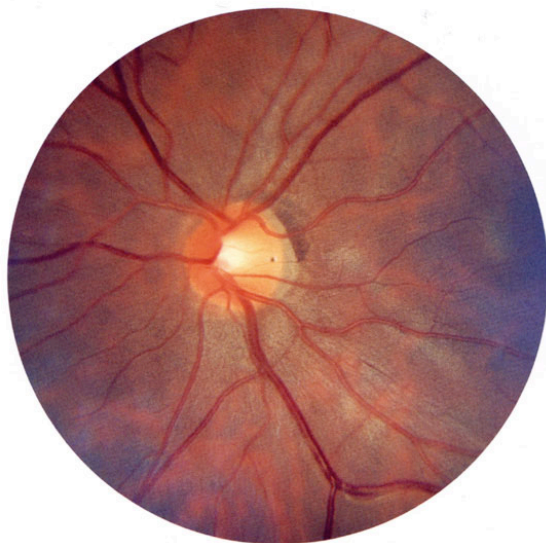
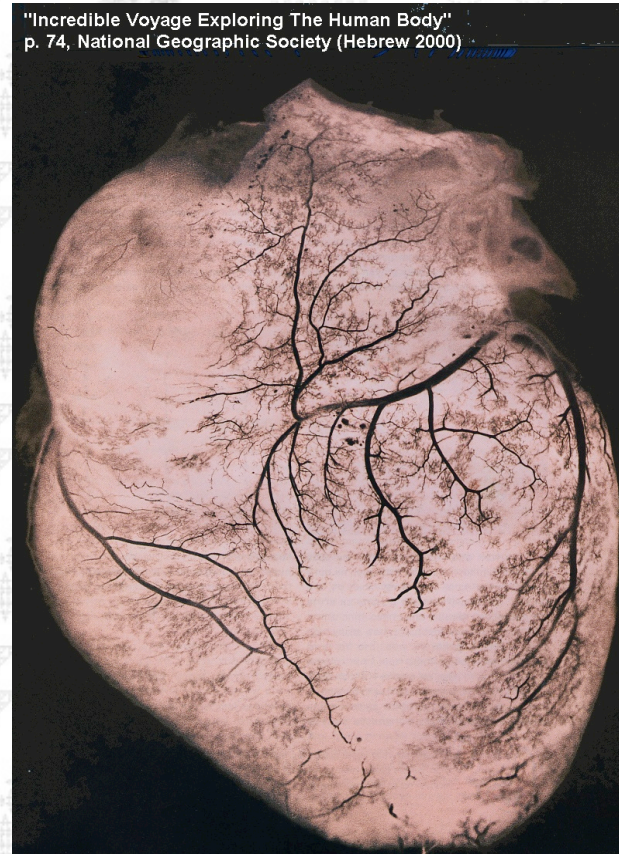
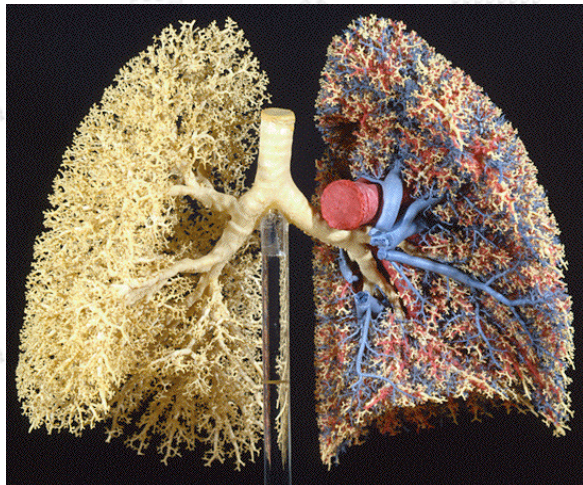


Natura i fractals

...difícils de modelar fen servir rectes i cercles....



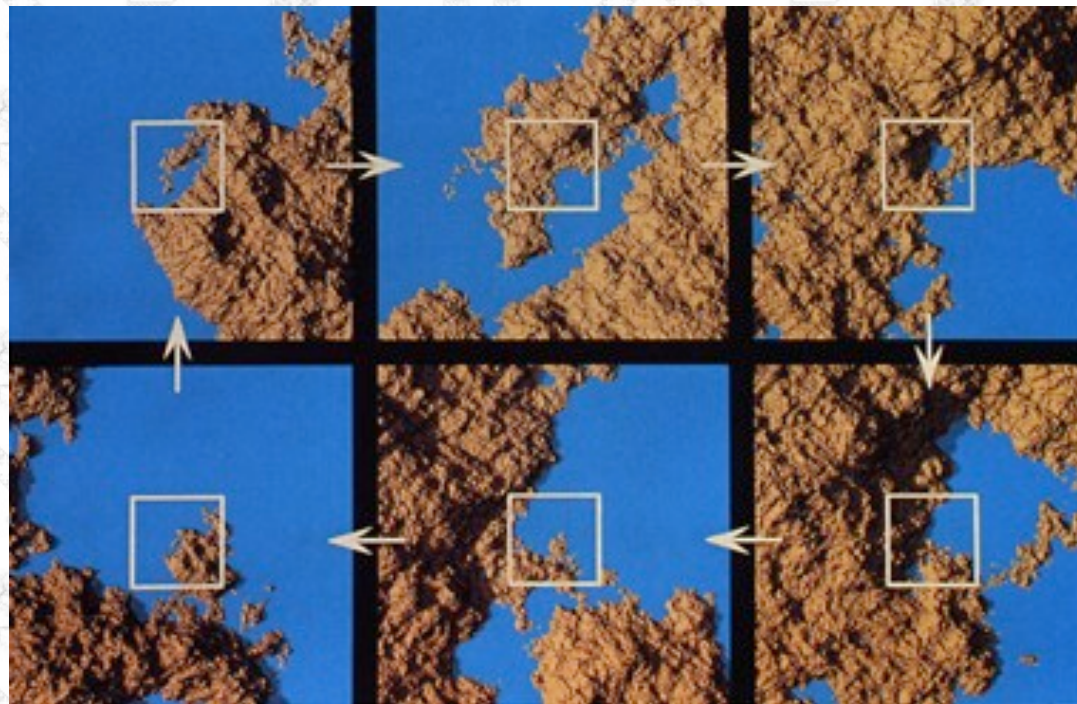
fractals al cos humà



Roy McClenaghan

Natura i Fractals

Per calcular la longitud d'una costa, per exemple, fariem zooms d'una fotografia ...



... i difícilment ens en sortirem.

Objectes fractals

Benoit Mandelbrot, a finals dels anys 60, va començar a parlar de **FRACTALS**, defenent que són més naturals que els objectes geomètrics clàssics.

“Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas, ni los relámpagos viajan en línea recta”

(Fractal Geometry of Nature, 1982)



Alguns fractals

Els fractals són molt diferents dels cercles o les rectes, i tenen propietats molt sorprenents.

Alguns dels més famosos van ser descoberts fa més de 130 anys!

Conjunt de Cantor (1883)

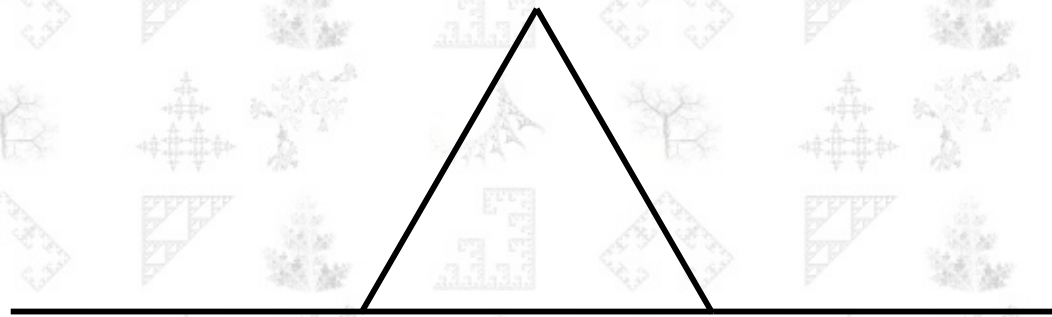
Iniciador: segment inicial $[0,1]$

Regles generadores: escalar (per $1/3$)
dos còpies del dibuix, i traslladar-les a
0 i 1.

Generador: Primera iteració del procés
(còpies escalades de l'iniciador)



La corba de Koch (1904)

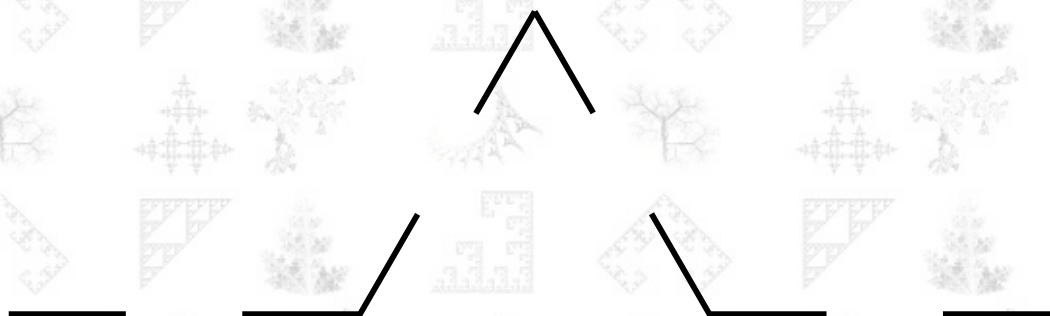


L'iniciador

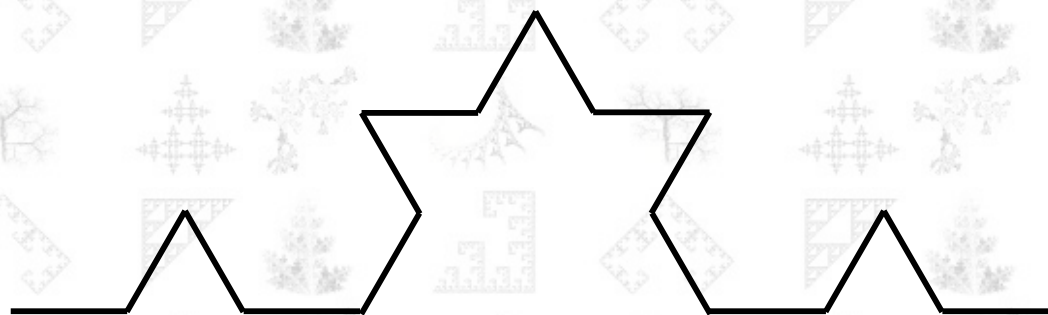
Ara repetim el proces amb els 4 segments

El generador

La corba de Koch

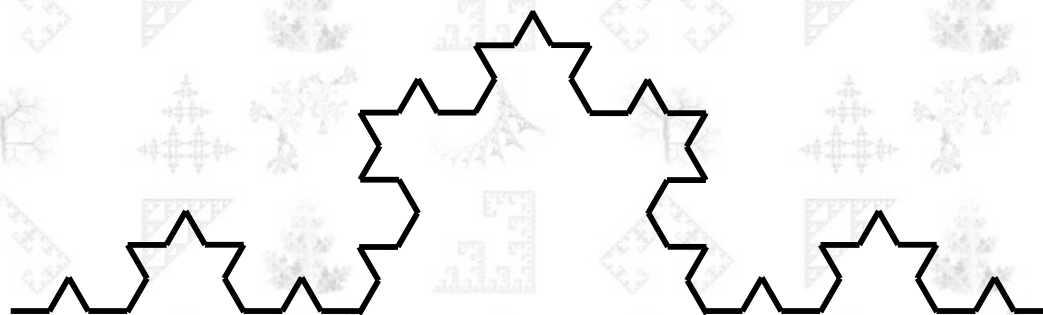


La corba de Koch



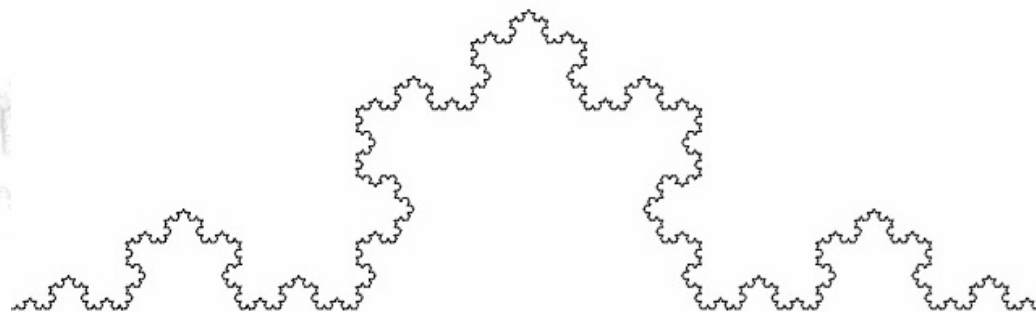
I repetim el proces amb els $4^2 = 16$ segments

La corba de Koch



l així successivament, fins a
l'infinit!

La corba de Koch



I així successivament, fins a
l'infinit!

La corba de Koch

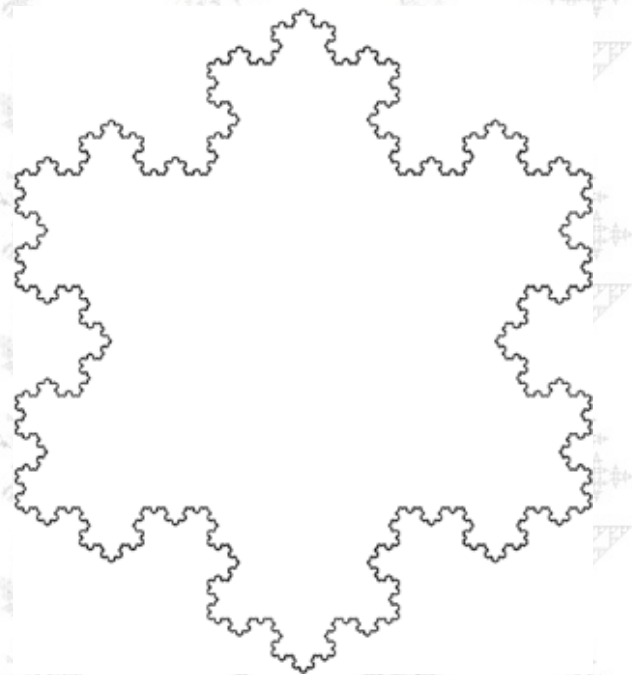


I així successivament, fins a
l'infinit!

Observem l'autosemblança

Els floquet de Koch

Sovint es considera en forma de corba tancada i s'anomena el **floquet de Koch** (The Koch snowflake)



El floquet de Koch: àrea?

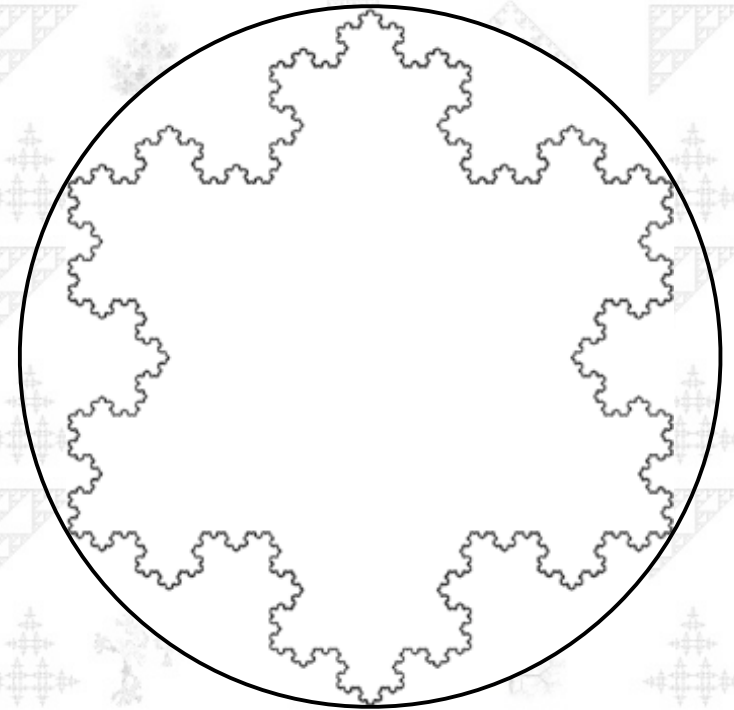
Suposem que la longitud del segment iniciador sigui $\ell = 1$

El foc cap dins un cercle de radi

$$r = \frac{\ell}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Lavors:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 < A < \pi r^2 = \frac{\pi}{3}$$



El floquet de Koch: àrea?

Suposem que la longitud del segment iniciador sigui $\ell = 1$

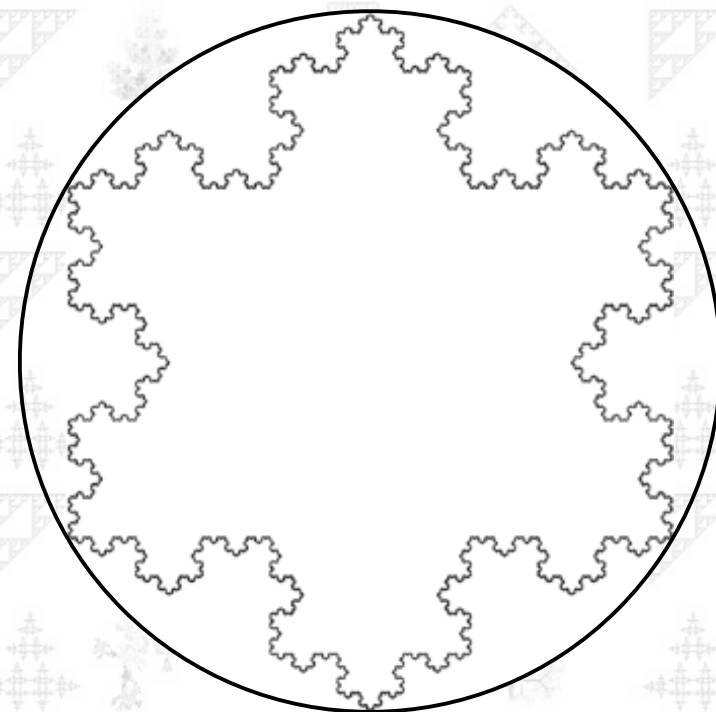
El foc cap dins un cercle de radi

$$r = \frac{\ell}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Lavors:

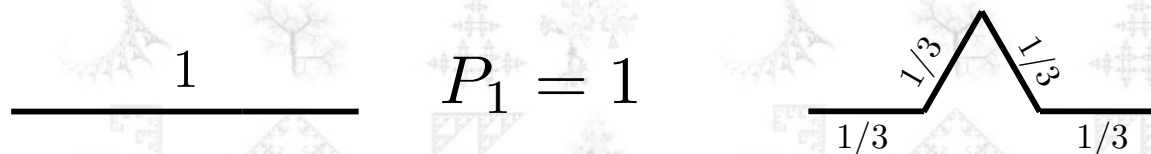
$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 < A < \pi r^2 = \frac{\pi}{3}$$

Premi especial: Calcular A !



El floquet de Koch: perímetre?

Longitud de la corba de Koch


$$P_1 = 1 \qquad P_2 = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

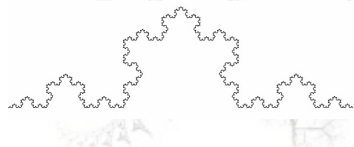

$$P_3 = 4 \times 4 \times \frac{1}{9} = \frac{4^2}{3^2}$$


$$P_4 = 4 \times 4 \times 4 \times \frac{1}{27} = \frac{4^3}{3^3}$$

$$P_{10} = \frac{4^9}{3^9} = \left(\frac{4}{3}\right)^9 = 13.3182\dots$$

...

$$P_{100} = \left(\frac{4}{3}\right)^{99} = 23384868076559507$$


$$P_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$
 Longitud INFINITA!!!

La corba de Koch

La corba de Koch és un fractal. Molt adequat per MODELAR la costa, per exemple.

Hi ha molts altres fractals interessants.

- El triangle de Sierpinski
- El fractal de la caixa
-

El triangle de Sierpinski (1915)

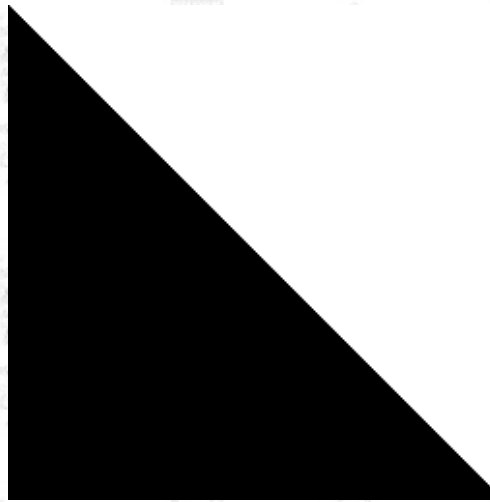
Com abans, comencem amb dues figures:
l'**iniciador** i el **generador** (que dóna les
regles generadores)



Observem que el generador té 3 còpies de l'iniciador.

El triangle de Sierpinski

Comencem la **iteració**.



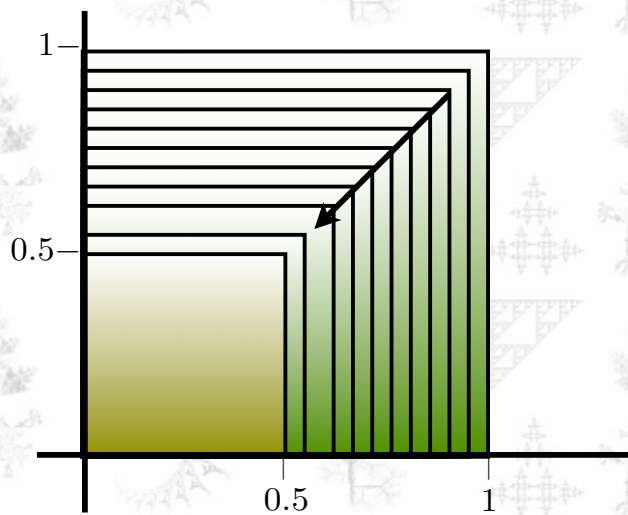
La figura convergeix a una **figura límit** que anomenem el triangle de Sierpinski.

Afinitats

En els exemples anteriors, el generador consisteix en vàries còpies de l'iniciador, obtingudes mitjançant **afinitats** del pla, com són:

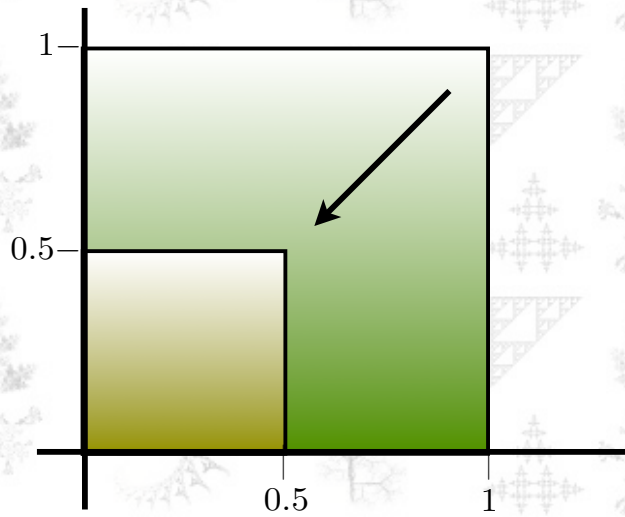
- homotècies o escalaments
- translacions
- rotacions

Afinitats

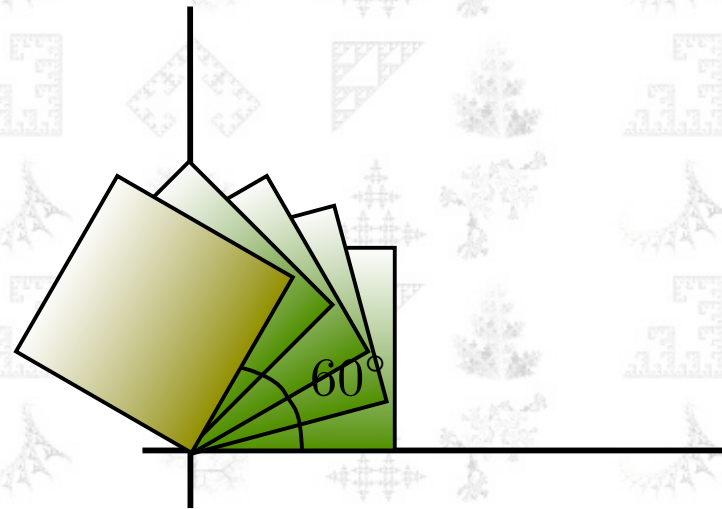


escalament $r = 0.5$

Afinitats

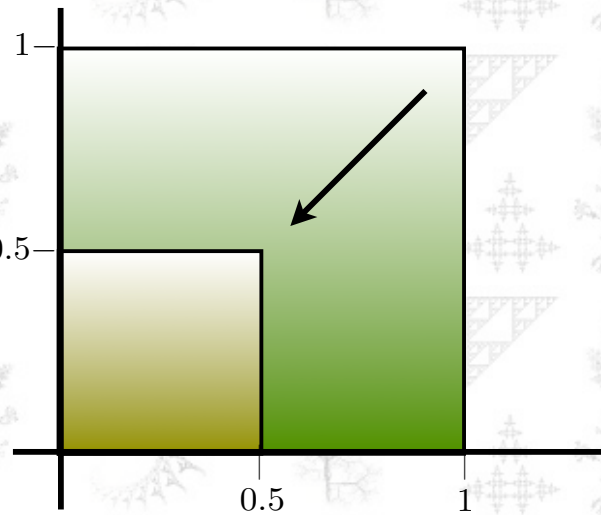


escalament $r = 0.5$

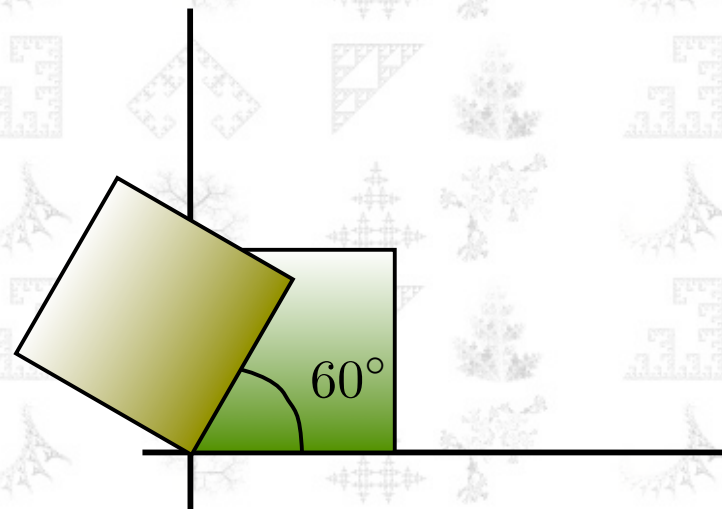


rotació $\theta = 60^\circ$

Afinitats

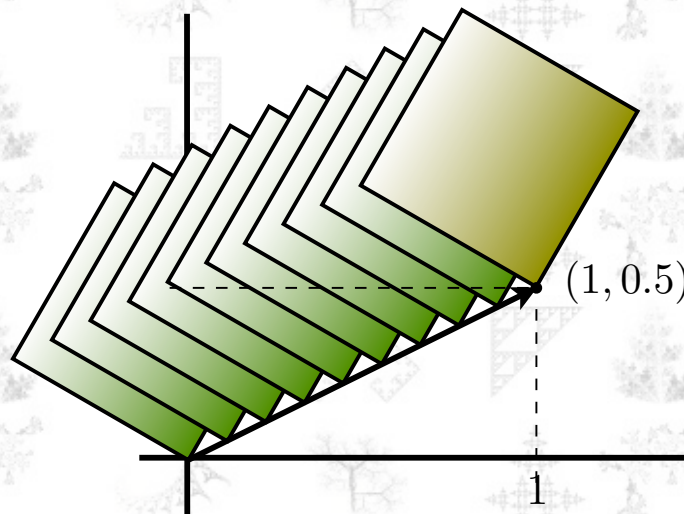


escalament $r = 0.5$



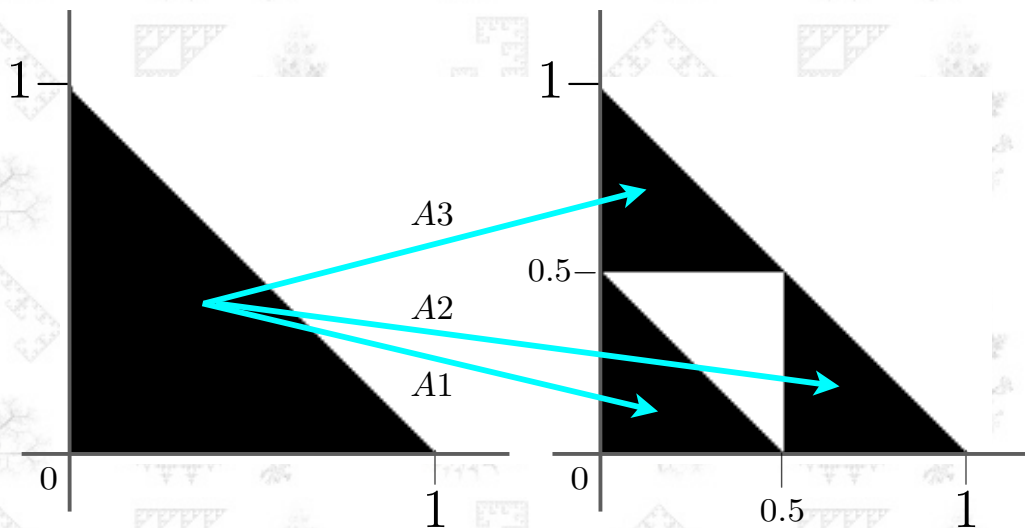
rotació $\theta = 60^\circ$

translació
 $(e, f) = (1, 0.5)$



Regles del triangle de Sierpinski

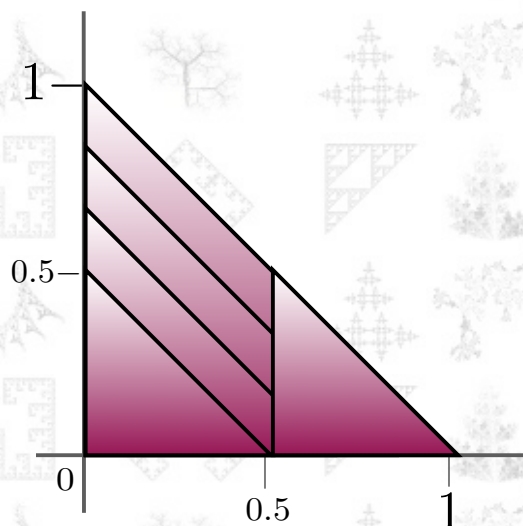
Veiem que el generador té 3 còpies de l'iniciador



Cada una s'aconsegueix amb una regla o afinitat diferent.

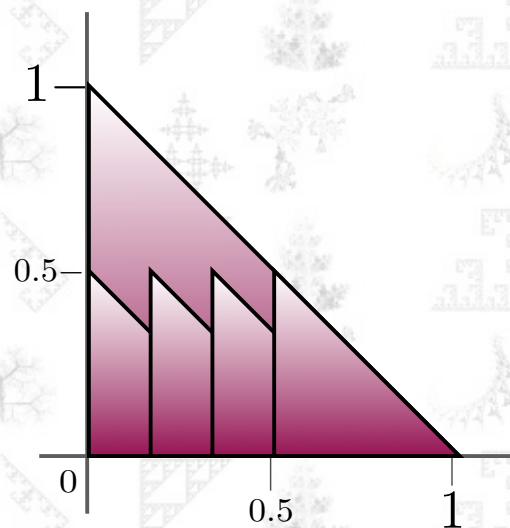
Regles del triangle de Sierpinski

La primera afinitat A1:



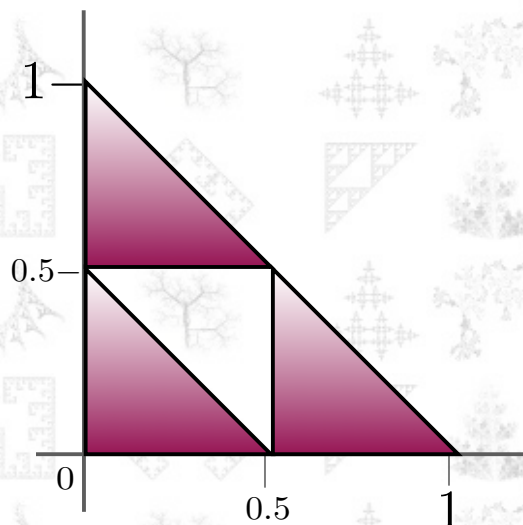
A1: escalament $r=0.5$

La segona afinitat A2:



A2: escalament $r=0.5$ + translació $(e,f)=(0.5,0)$

Regles del triangle de Sierpinski

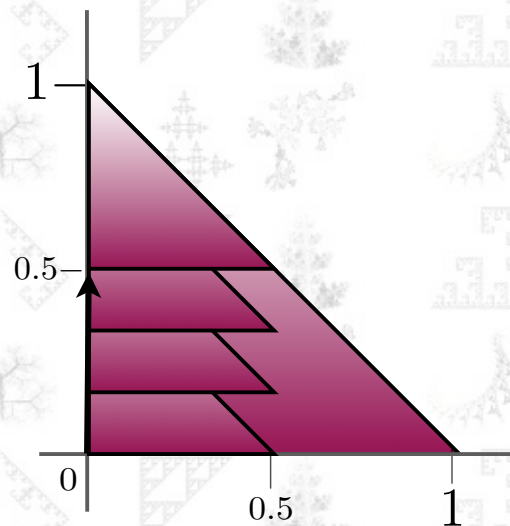


A1: escalament $r=0.5$

A2: escalament $r=0.5$

A3: escalament $r=0.5$

La tercera afinitat A3:

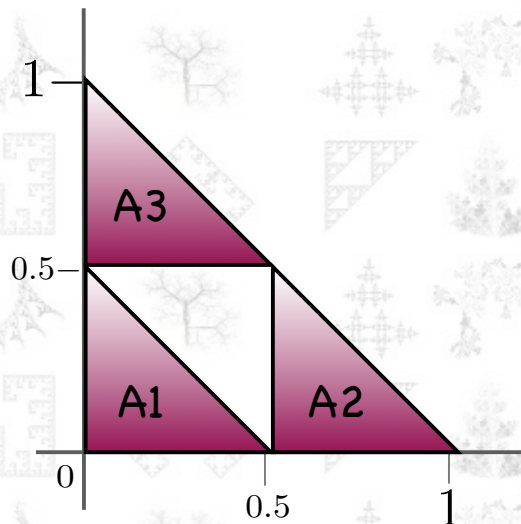


+ translació $(e,f)=(0.5,0)$

+ translació $(e,f)=(0,0.5)$

Regles del triangle de Sierpinski

Ho resumim en la següent taula



afinitats	r	θ	e	f
A1	0.5	0	0	0
A2	0.5	0	0.5	0
A3	0.5	0	0	0.5

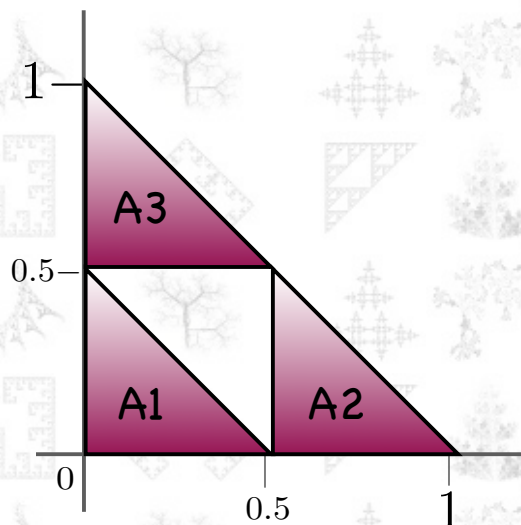
A1: escalament $r=0.5$

A2: escalament $r=0.5$ + translació $(e,f)=(0.5,0)$

A3: escalament $r=0.5$ + translació $(e,f)=(0,0.5)$

Regles del triangle de Sierpinski

Ho resumim en la següent taula

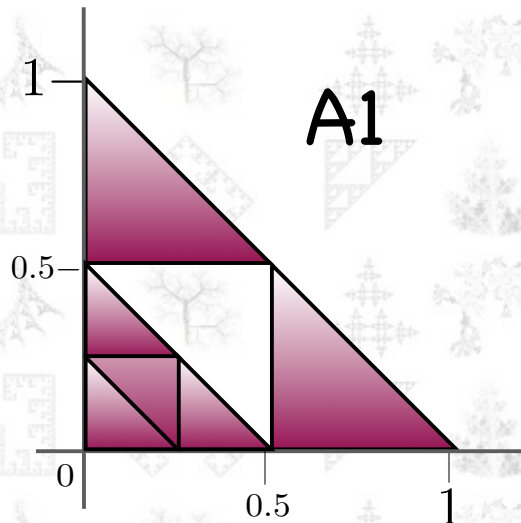


afinitats	r	θ	e	f
A1	0.5	0	0	0
A2	0.5	0	0.5	0
A3	0.5	0	0	0.5

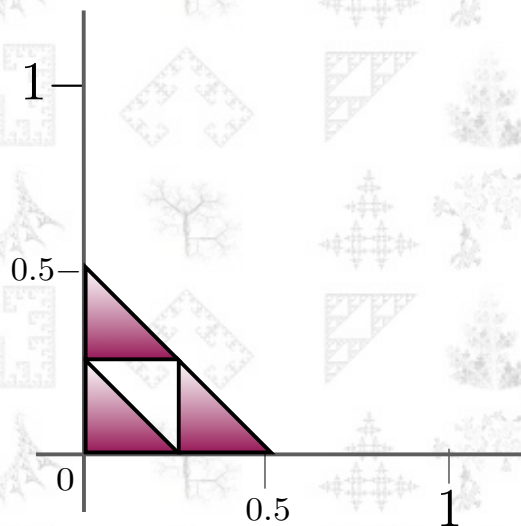
Un conjunt de regles com aquest s'anomena un **IFS** (Iterated function system, o sistema de funcions iterades)

Regles del triangle de Sierpinski

I ara iterem les afinitats.

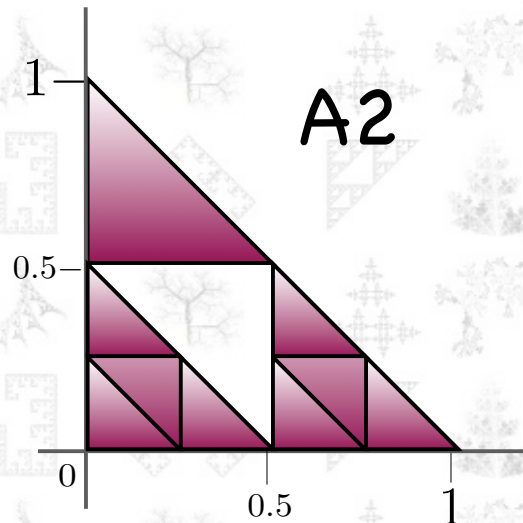


afinitats	r	θ	e	f
A1	0.5	0	0	0
A2	0.5	0	0.5	0
A3	0.5	0	0	0.5

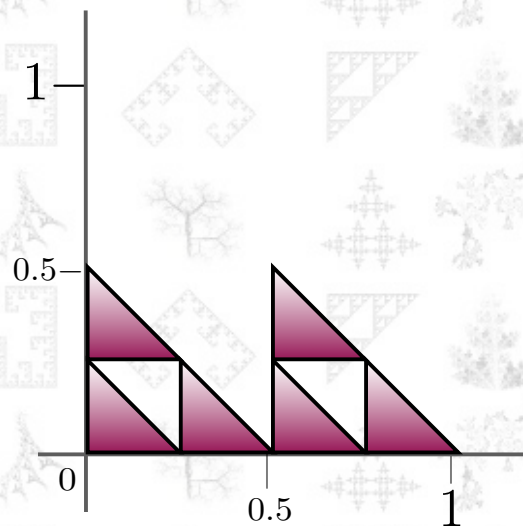


Regles del triangle de Sierpinski

I ara iterem les afinitats.

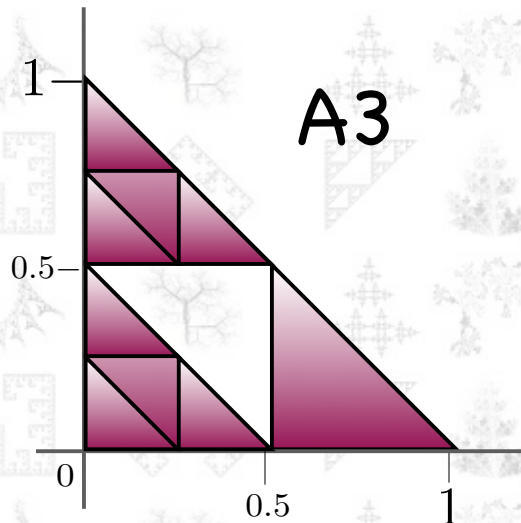


afinitats	r	θ	e	f
A1	0.5	0	0	0
A2	0.5	0	0.5	0
A3	0.5	0	0	0.5

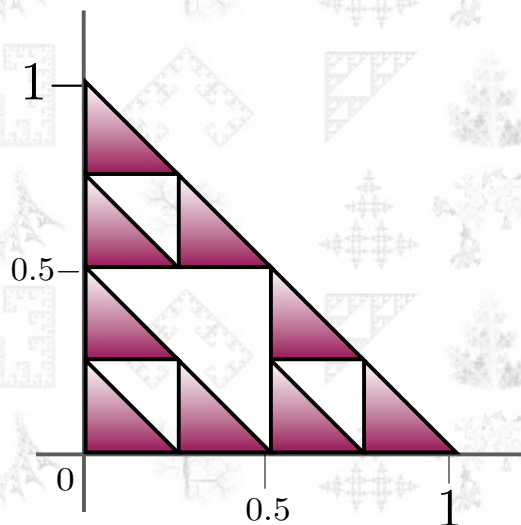


Regles del triangle de Sierpinski

I ara iterem les afinitats.

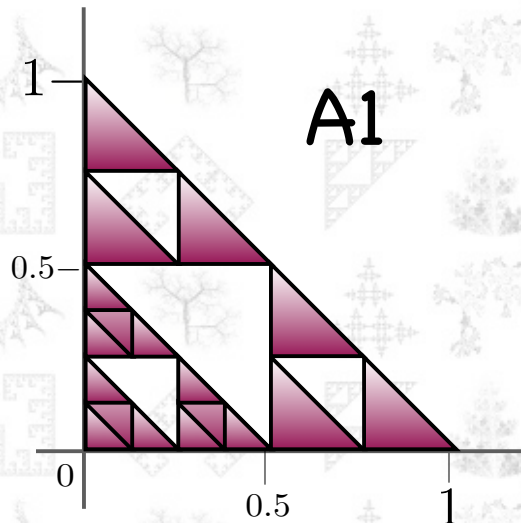


afinitats	r	θ	e	f
A1	0.5	0	0	0
A2	0.5	0	0.5	0
A3	0.5	0	0	0.5

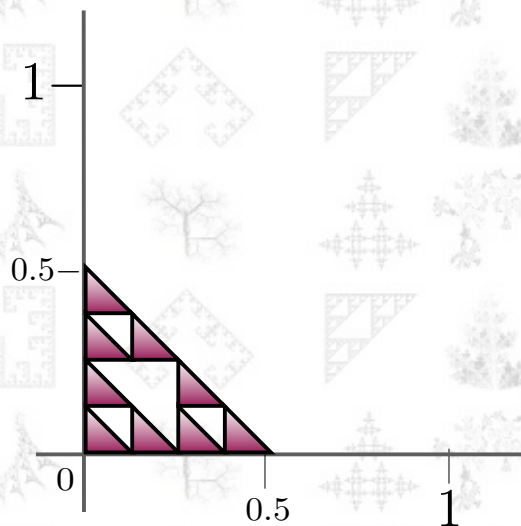


Regles del triangle de Sierpinski

I ara iterem les afinitats.

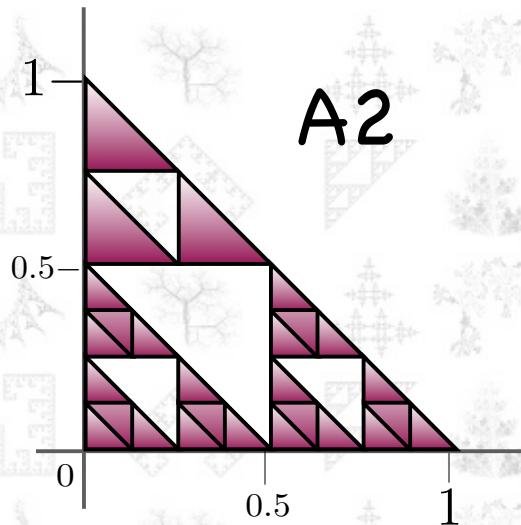


afinitats	r	θ	e	f
A1	0.5	0	0	0
A2	0.5	0	0.5	0
A3	0.5	0	0	0.5

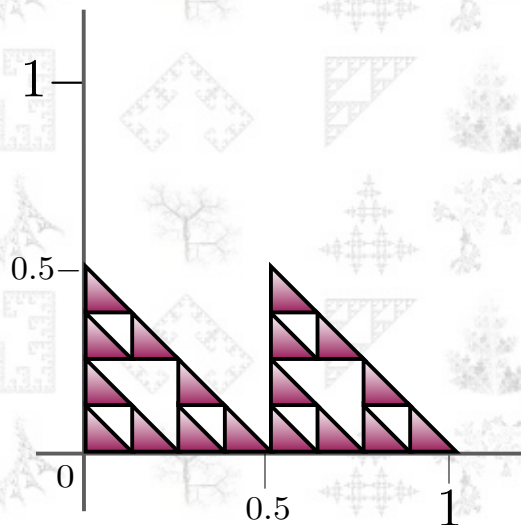


Regles del triangle de Sierpinski

I ara iterem les afinitats.

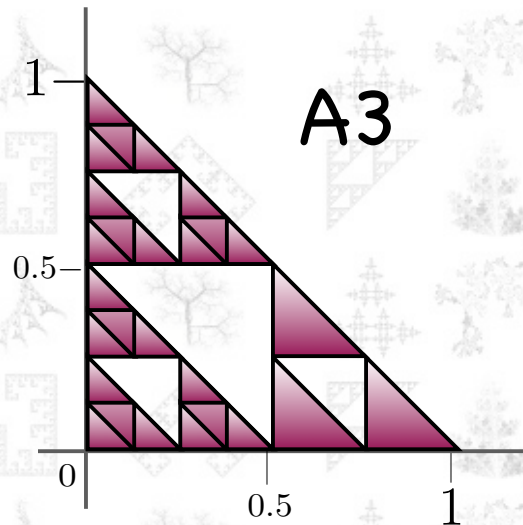


afinitats	r	θ	e	f
A1	0.5	0	0	0
A2	0.5	0	0.5	0
A3	0.5	0	0	0.5

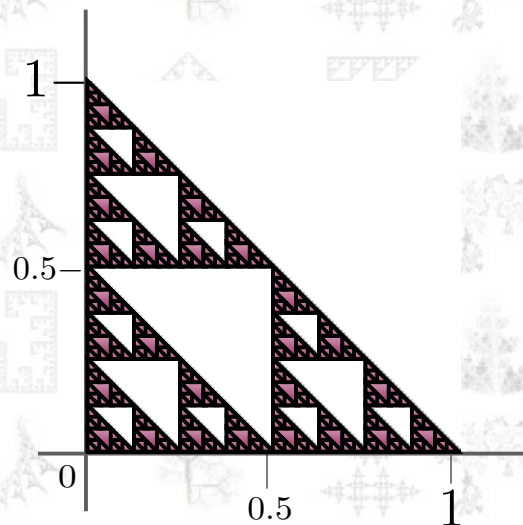


Regles del triangle de Sierpinski

I ara iterem les afinitats.



afinitats	r	θ	e	f
A1	0.5	0	0	0
A2	0.5	0	0.5	0
A3	0.5	0	0	0.5

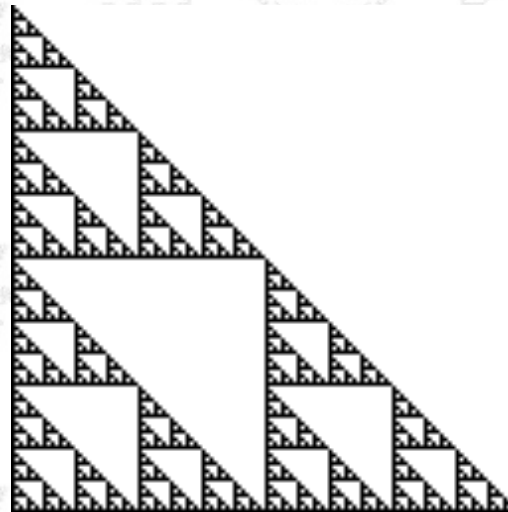


I així successivament....

Fins al límit, on trobem el triangle de Sierpinski.

El triangle de Sierpinski

El triangle és **invariant** per les regles que el generen. Això vol dir que si li apliquem les regles ens torna a sortir ell mateix.



De fet és l'**ÚNIC** dibuix (compacte) invariant per aquestes regles!!

El triangle de Sierpinski

El triangle és el **LÍMIT** d'aplicar les regles a l'iniciador.

Però podriem fer servir **QUALSEVOL INICIADOR!**

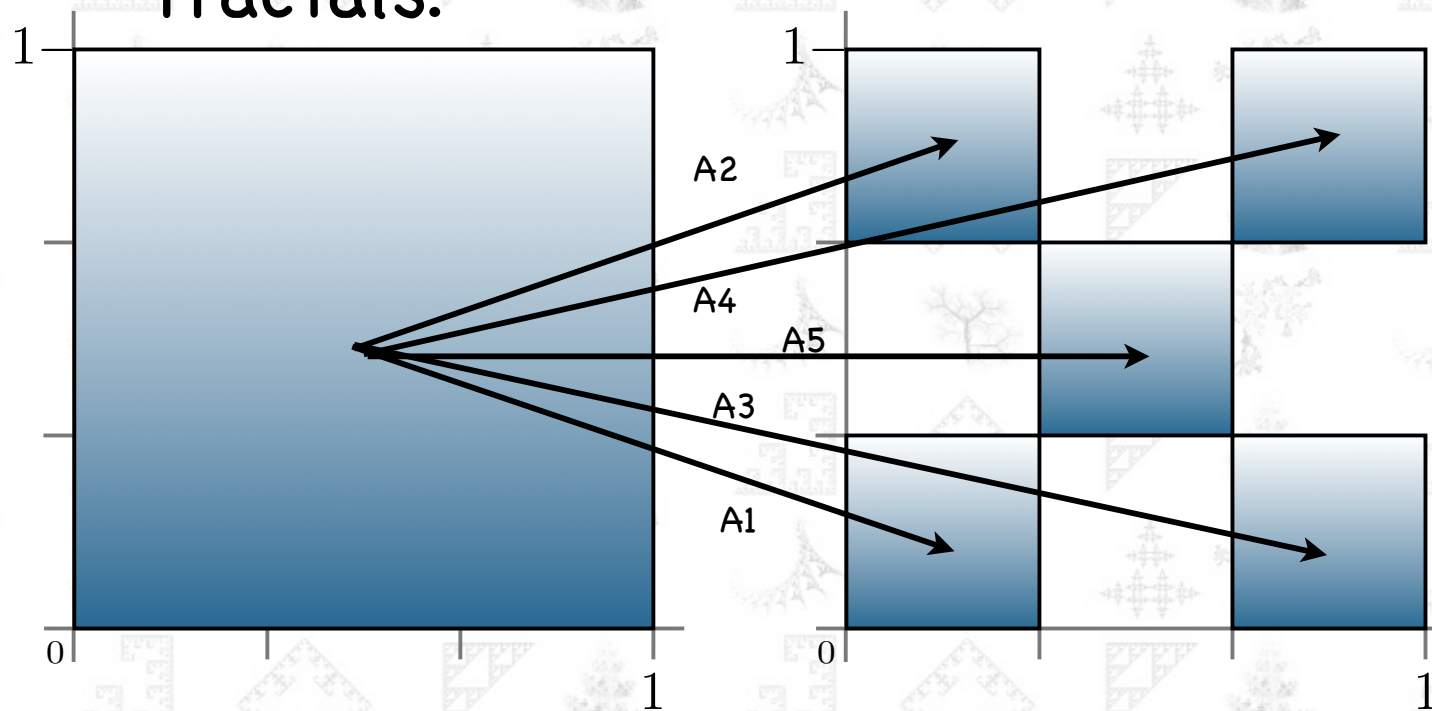


El límit és sempre el mateix.

Diem que és l'**ATRACTOR** dels sistema

El fractal de la caixa

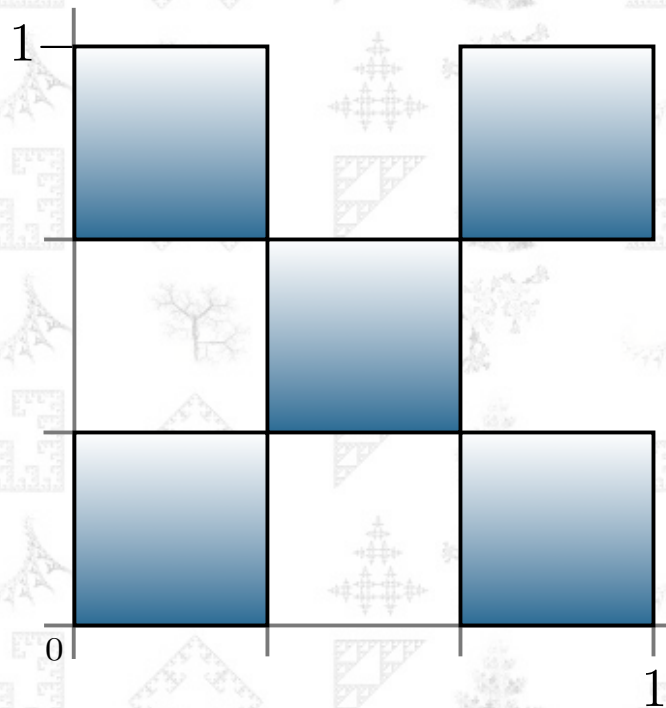
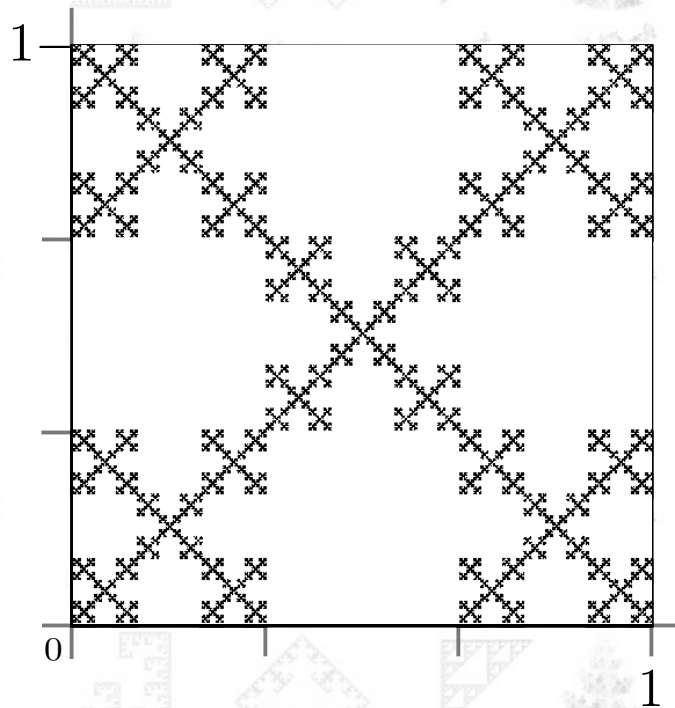
Diferents afinitats produeixen diferents fractals.



afinitats	r	θ	e	f
A1	$1/3$	0	0	0
A2	$1/3$	0	0	$2/3$
A3	$1/3$	0	$2/3$	0
A4	$1/3$	0	$2/3$	$2/3$
A5	$1/3$	0	$1/3$	$1/3$

El fractal de la caixa

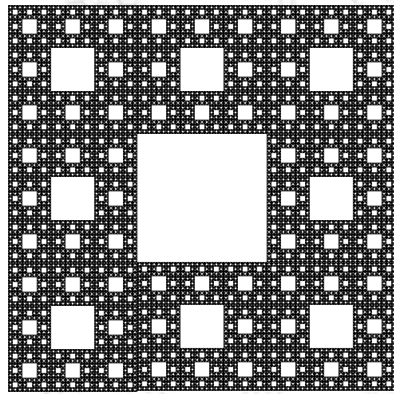
I ara apliquem les regles successivament...



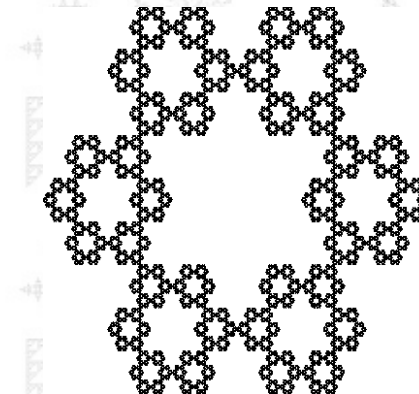
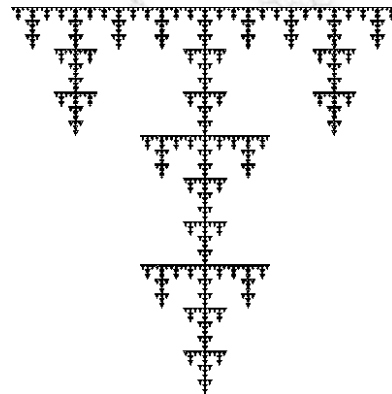
afinitats	r	θ	e	f
A1	1/3	0	0	0
A2	1/3	0	0	2/3
A3	1/3	0	2/3	0
A4	1/3	0	2/3	2/3
A5	1/3	0	1/3	1/3

Altres fractals

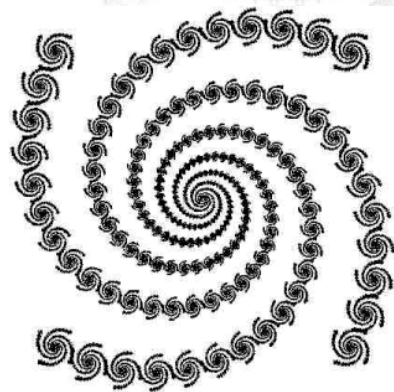
Hi ha molts altres fractals interessants...



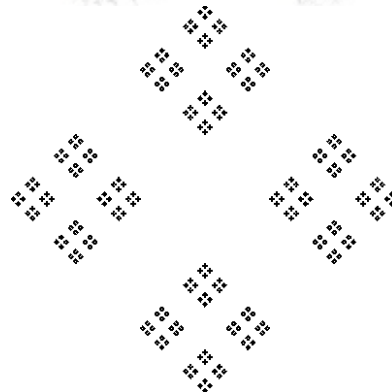
Catifa de Sierpinski



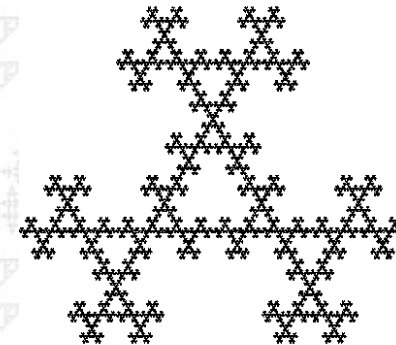
Hexàgon de Sierpinski



Espiral de 4 braços

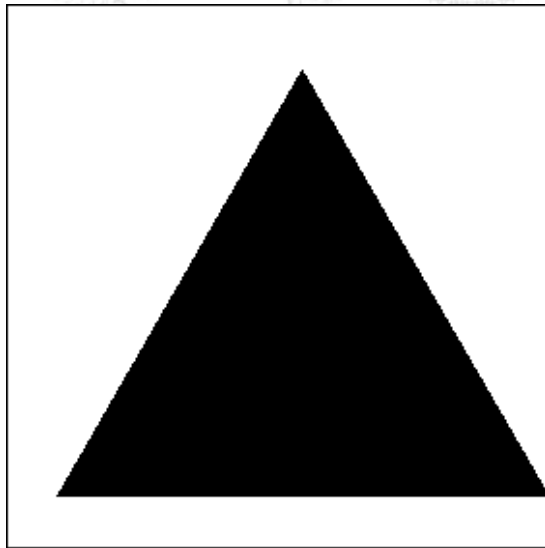


Pols de Cantor

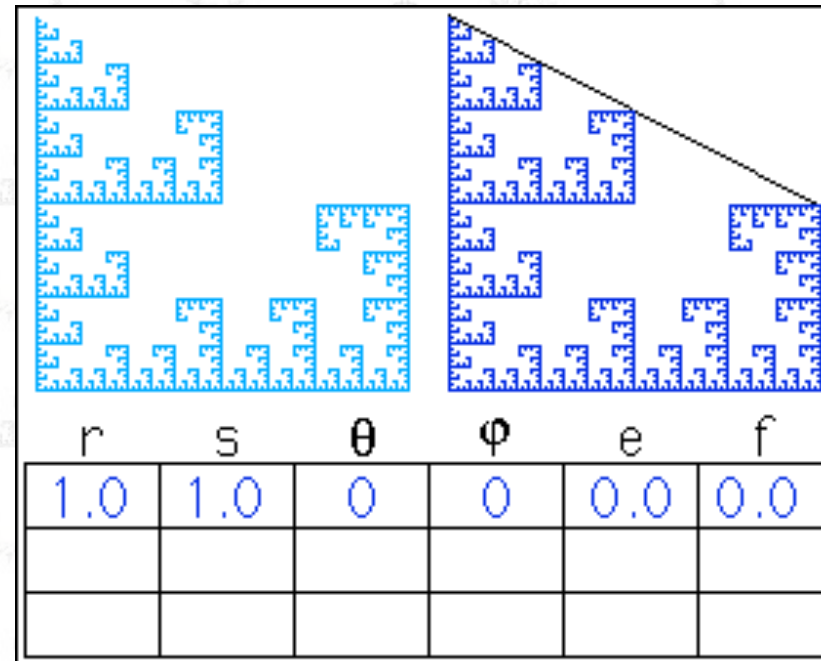


Rotacions

Les regles d'alguns d'aquests exemples tenen rotacions.



Lleugera rotació a la
peça de l'esquerra



IFS (iterated function systems)

Amb aquest mètode, posant més o menys afinitats, més o menys elaborades, potser introduint color.... es poden construir fractals molt complexos i realistes.

Amb pocs números (24), tenim tota la informació necessària per reproduir la falguera!!

Hi ha un veritable Art Fractal, i s'han utilitzat per fer pel·lícules.



IFS i Art fractal



IFS i Art fractal



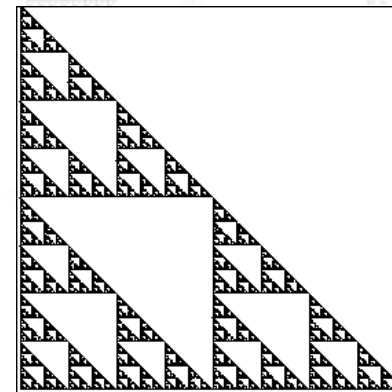
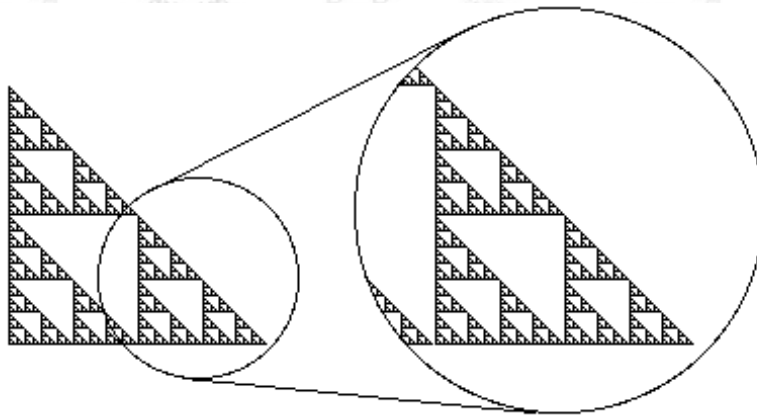
KEITH SALES 2003

Autosemblança

Tots els fractals que hem vist són

AUTOSEMBLANTS:

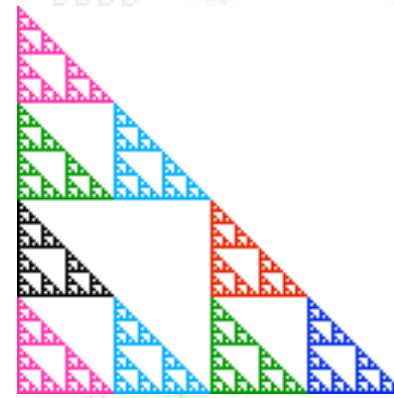
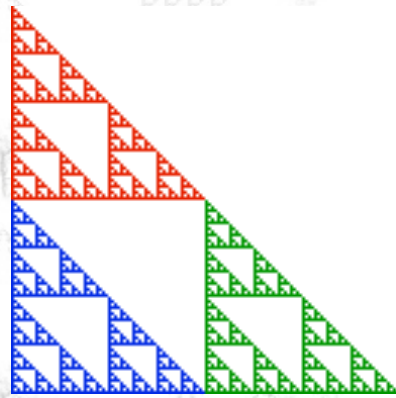
Si augmentem certes porcions del conjunt, obtenim de nou tot el conjunt original!



Tenim 3 peces auto similars
O també 9. O 27, 3^n
Fins l'infinit!

Autosemblança

Cada número de peces autosemblants, té associat un factor d'augment.



nº peces	factor augment
3	2
$9 = 3^2$	$4 = 2^2$
3^n	2^n

Dimensió fractal

Sabem quina és la dimensió de punts,
rectes, etc

dim 0



dim 1



dim 2

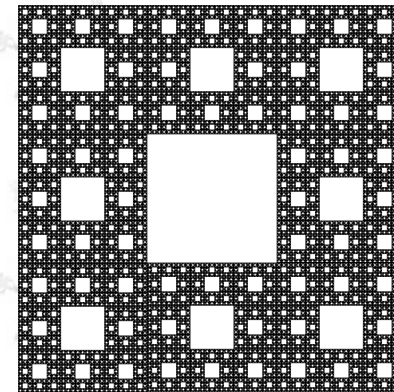
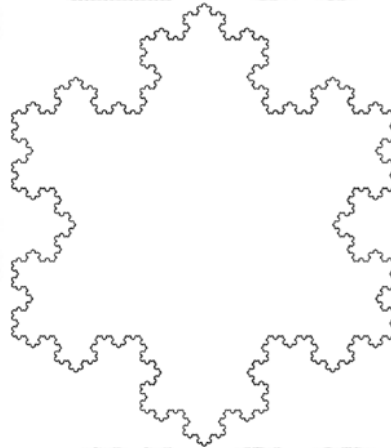
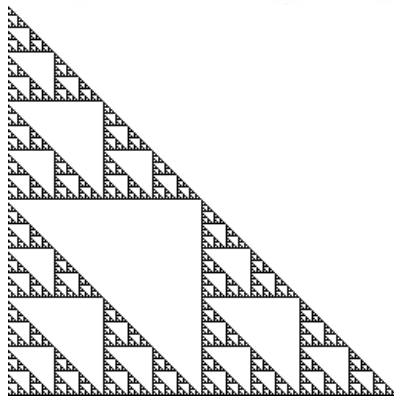


dim 3



Dimensió fractal

Però quina és la dimensió dels fractals
que hem vist?



Dimensió 0, 1 o 2??

(Tots tenen dimensió topològica 1)

Dimensió fractal

La dimensió topològica (l'habitual) no és prou bona pels objectes fractals.

Necessitem un **nou tipus de dimensió** que ens mesuri la "complexitat" del fractal.

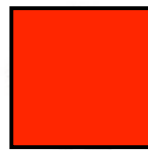
Aquesta serà la **DIMENSIÓ FRACTAL**.

Dimensió fractal

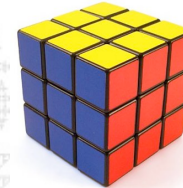
Volem que la dimensió fractal **extengui** la topològica, és a dir que segueixi funcionant pels objectes clàssics.



$$D_F = 1$$



$$D_F = 2$$



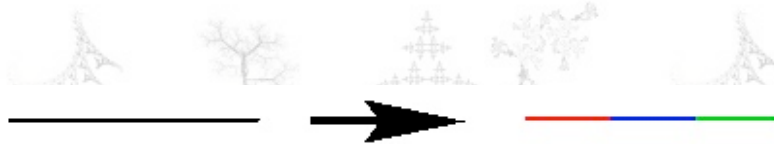
$$D_F = 3$$

Podriem utilitzar l'autosemblança.
Contarem:

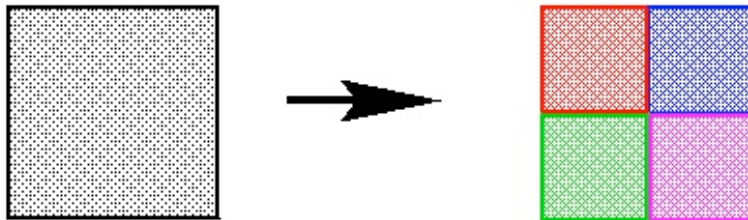
- el número de peces autosemblants
- i el factor d'augment

Dimensió fractal

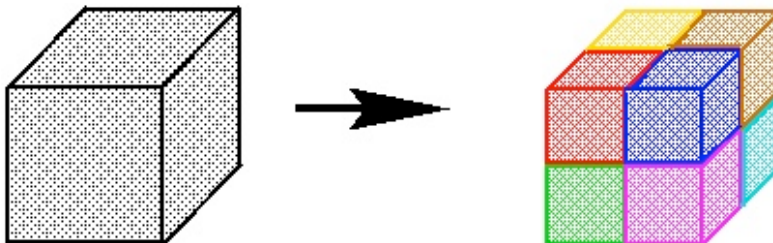
Fem-ho primer amb les figures clàssiques:



peces: 3	factor = 3
N	N



peces: 4	factor = 2
N^2	N



peces: 8	factor = 2
N^3	N

Dimensió fractal

Veiem doncs que en els casos fàcils la dimensió és l'exponent.

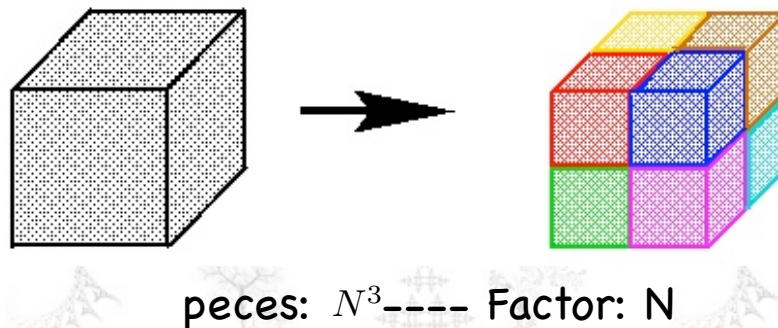
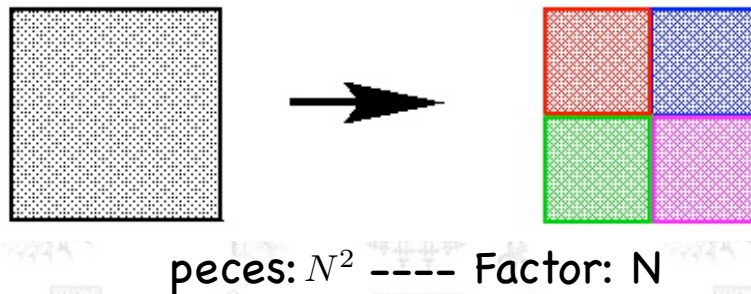
Podem definir doncs, per començar:

$$D_F = \frac{\log(\text{número de peces})}{\log(\text{factor d'augment})}$$

I provar a veure si funciona....

Dimensió fractal

$$D_F = \frac{\log(\text{número de peces})}{\log(\text{factor d'augment})}$$



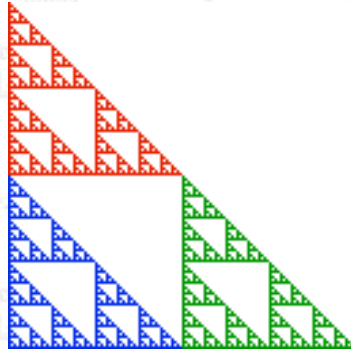
$$D_F = \frac{\log N}{\log N} = 1$$

$$D_F = \frac{\log N^2}{\log N} = \frac{2 \log N}{\log N} = 2$$

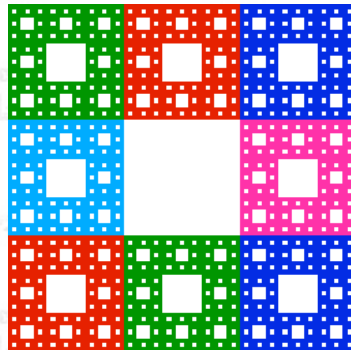
$$D_F = \frac{\log N^3}{\log N} = \frac{3 \log N}{\log N} = 3$$

$$D_F = \frac{\log(\text{número de peces})}{\log(\text{factor d'augment})}$$

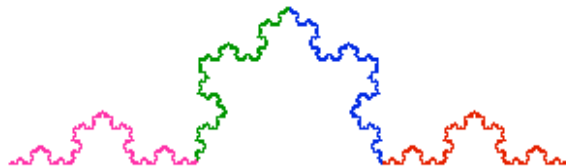
Dimensió fractal



$$D_F = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58 \dots$$



$$D_F = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.892 \dots$$



$$D_F = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26 \dots$$

Dimensió fractal

Fixem-nos que pels nostres fractals:

- nº peces autosemblants = nº afinitats
- factor d'augment = $1 / r$

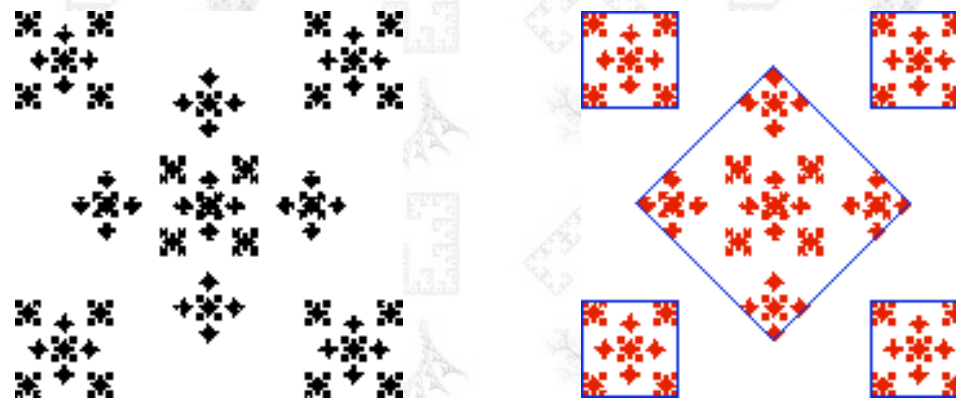
Per tant tenim:

$$D_F = \frac{\log(\text{número d'afinitats})}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Ull!! Només val quan el factor d'augment és igual per totes les peces (és a dir quan r és igual per totes les afinitats)!!!

Dimensió fractal

Què passa quan les afinitats tenen diferents escalaments?



La fórmula es pot modificar per que també serveixi per aquests casos.

Dimensió box-counting

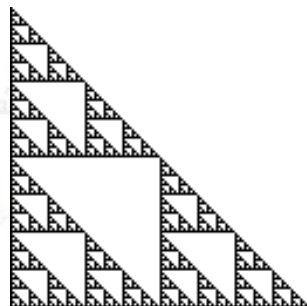
La manera més general de calcular la dimensió fractal és el mètode de **comptar caixes**, o la **dimensió box-counting**.

Es tracta de comptar quants quadrats d'una certa mida r necessitem per cobrir la figura.

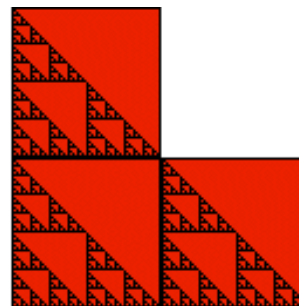
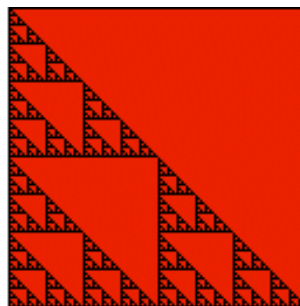
Aquest número és aproximadament (per mida suficientment petita):

$$N(r) \sim Cr^{-d} \implies d \sim \frac{\log N(r)}{-\log r}$$

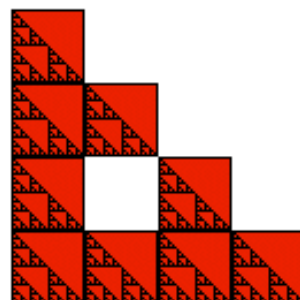
Dimensió box-counting



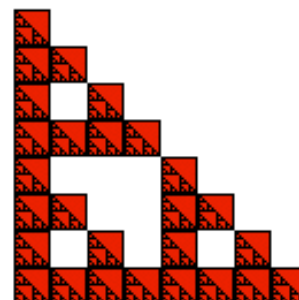
Sierpinski gasket



$r_1 = 1/2, N(r_1) = 3$



$r_2 = 1/4, N(r_2) = 9$

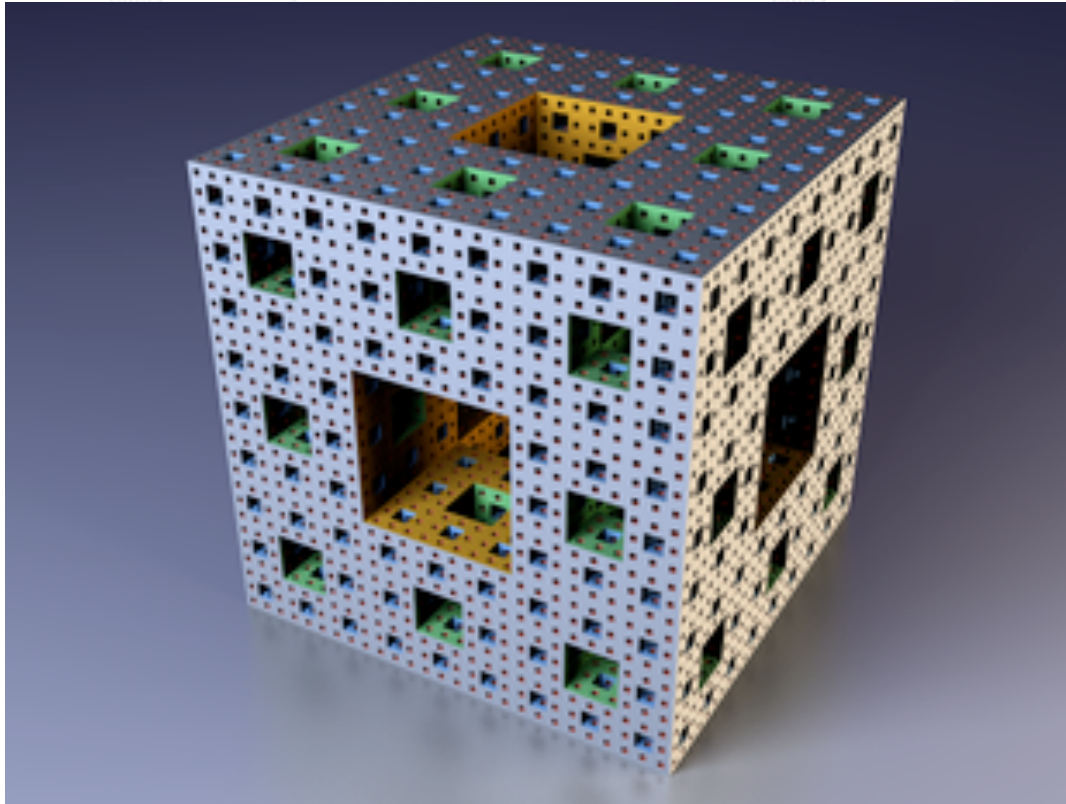


$r_3 = 1/8, N(r_3) = 27$

$$r_n = 2^{-n} \Rightarrow N_n = N(r_n) = 3^n$$

$$\Rightarrow d_n = \frac{\log N_n}{-\log r_n} = \frac{\log 3}{\log 2}$$

Dimensió box-counting



$$d = \frac{\log 20}{\log 3}$$

Esponja de Menger (1926)

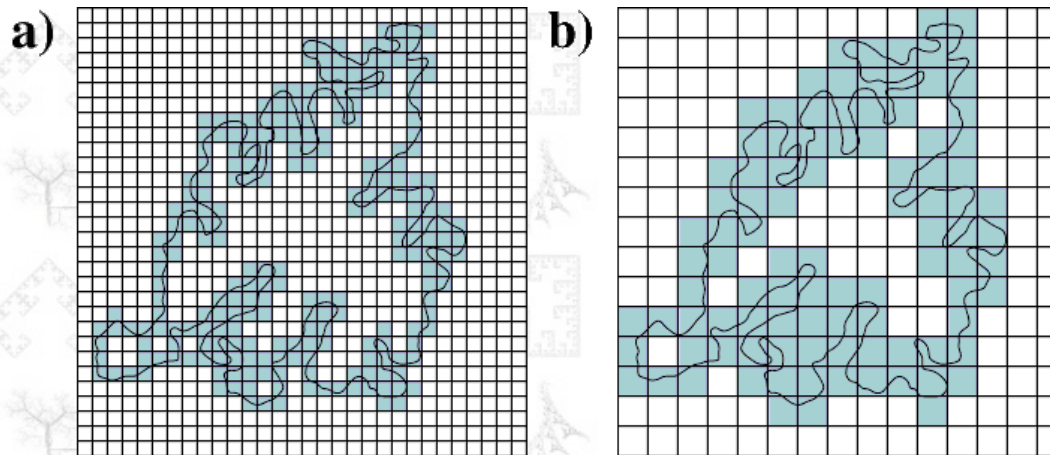
Dimensió box-counting

Per un fractal autosimilar amb k còpies d'escalaes $r_1, r_2, \dots, r_k$, la dimensió fractal és el nombre d que satisfà l'**equació de Moran**

$$r_1^d + r_2^d + \dots + r_k^d = 1$$

Dimensió fractal

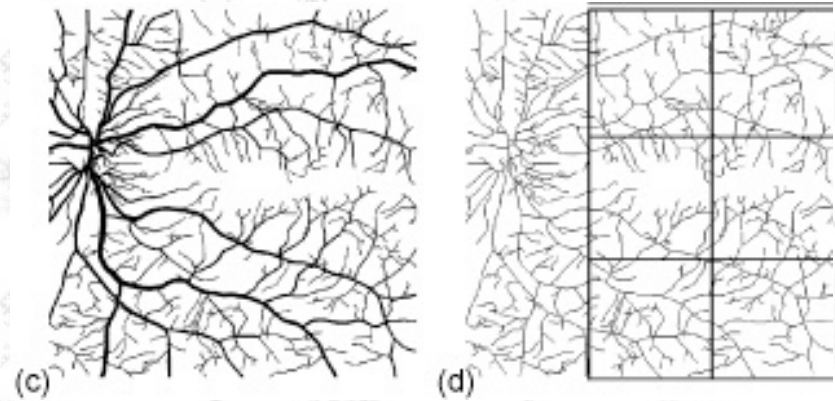
Amb aquest mètode podem calcular (o estimar, per que és un límit) la dimensió fractal de qualsevol objecte, artificial o natural!



I això té moltes aplicacions....

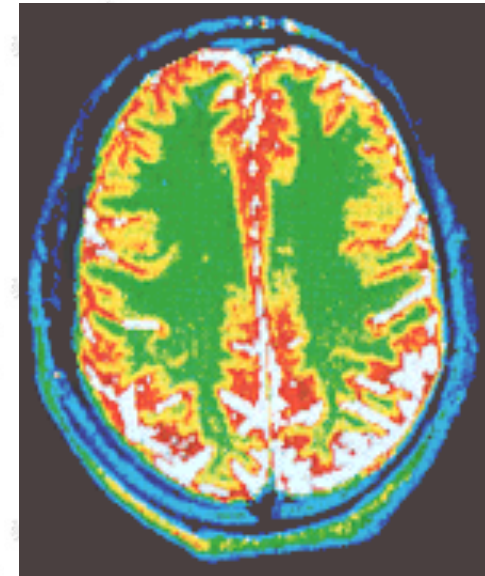
Aplicacions mèdiques

- Identificació de retina



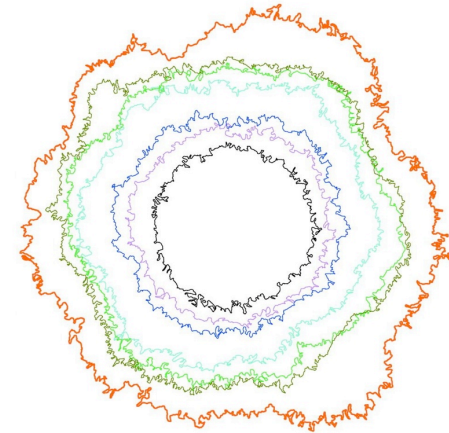
- Dimensió fractal de l'estructura òsea (TACS) i risc de fractura.

- Dimensió fractal del cervell (escàner) → diagnosi



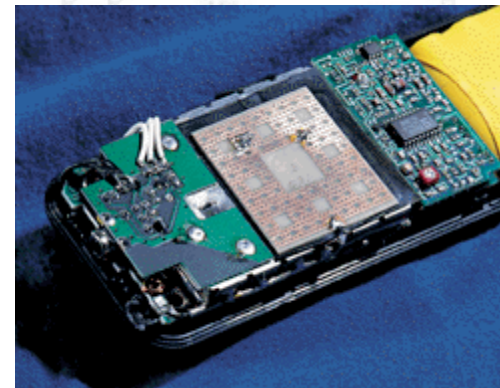
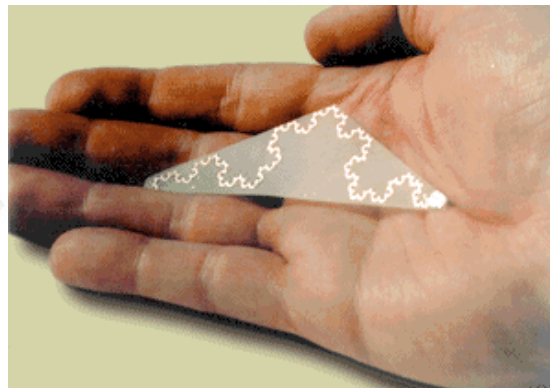
Aplicacions mèdiques

- Cicatrius -> avaluació tractaments.
- Dimensió fractal de tumors -> diagnosi, dinàmica tumoral.



Aplicacions tècniques i informàtiques

- Compressió d'imatges
- Antenes fractals (FRACTUS, Sant Cugat)
Augment del rang de freqüències en un mínim d'espai.



Aplicacions arquitectòniques i esculturals



Efectes especials



Star Trek II (1982)

Definició de fractal

La dimensió fractal també ens proporciona una eina per a contestar rigurosament a la pregunta:

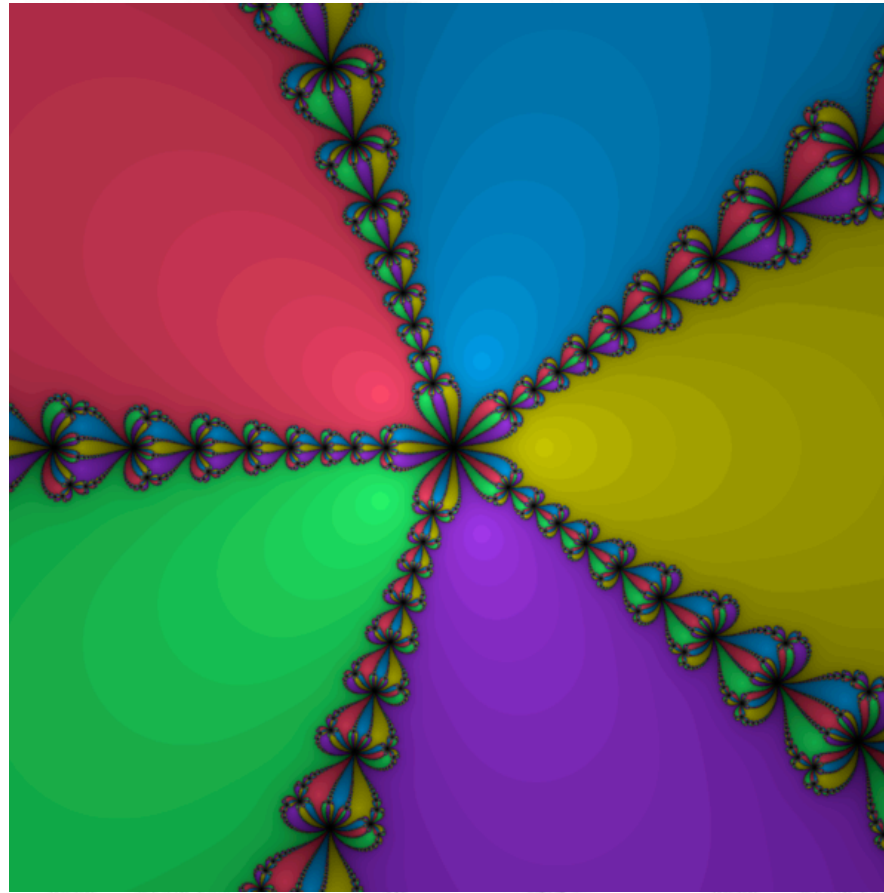
Què és un fractal?

Fractal = Objecte amb dimensió fractal més gran que la seva dimensió topològica.

Hi ha molts tipus de fractals. Nosaltres només hem construït fractals molt particulars ... i la natura també ens assorteix de molts exemples ...

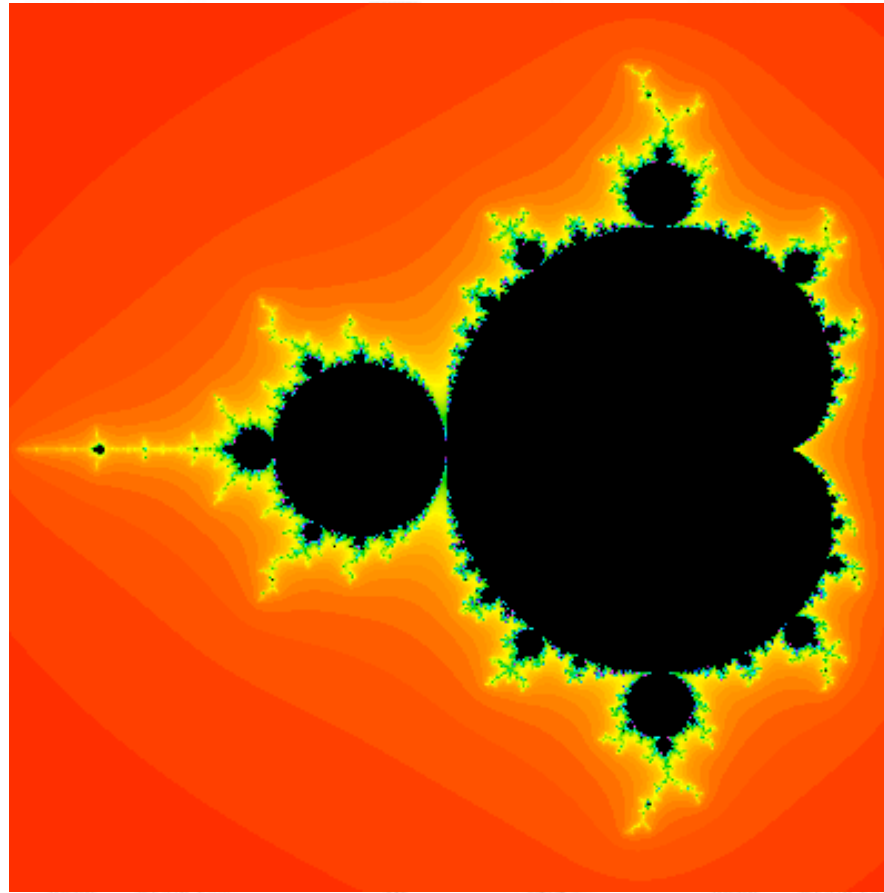
Altres fractals

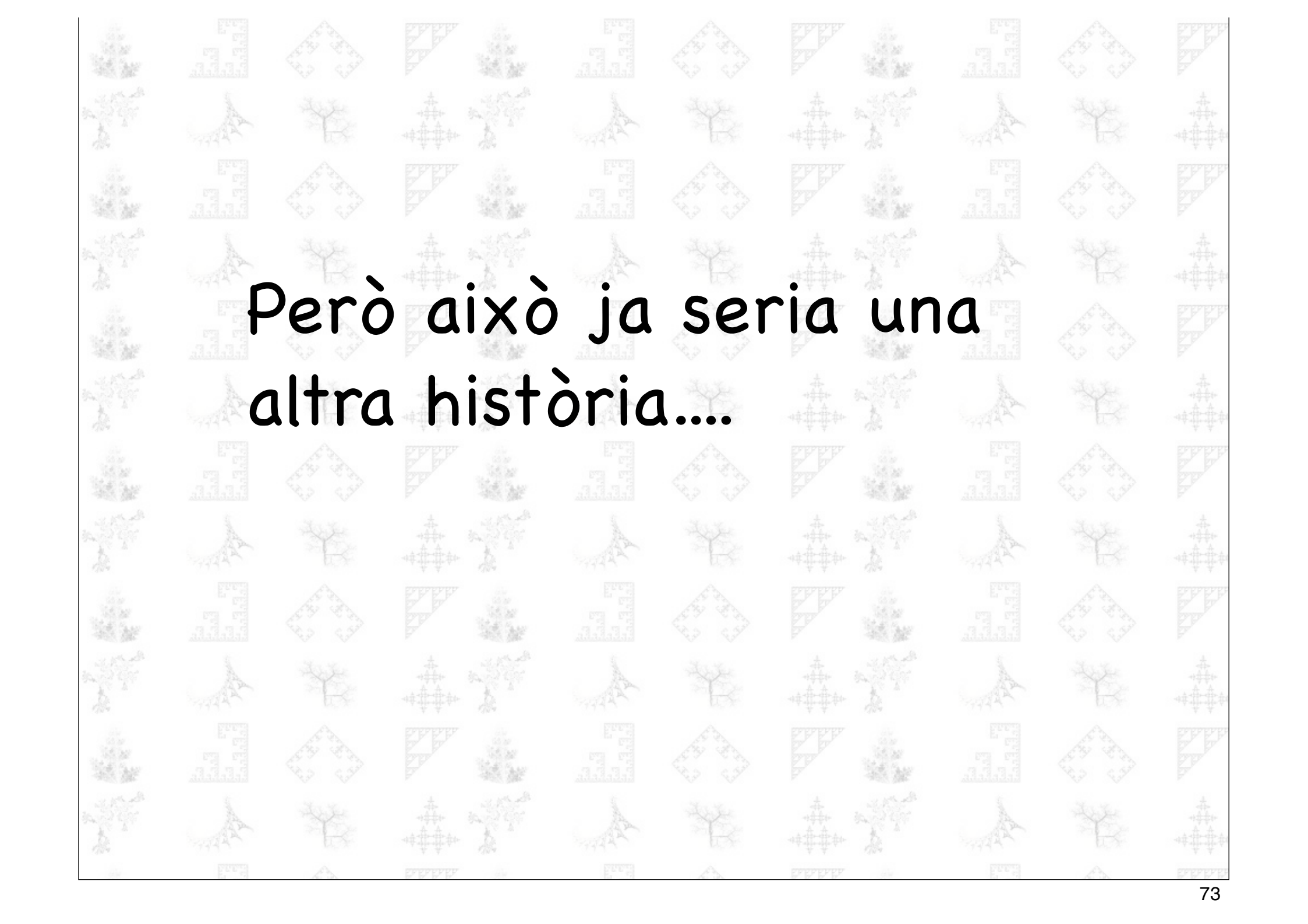
Un altre grup important prové d'iterar funcions al pla de nombres complexos.



Altres fractals

Un altre grup important prové d'iterar funcions al pla de nombres complexos.





Però això ja seria una
altra història...