FLUJOS TRIANGULARES PARA ECUACIONES CON RETARDO.-

V. Muñoz-Villarragut

El objetivo de estas notas es establecer un marco apropiado para el estudio de ecuaciones diferenciales no autónomas. En concreto, construiremos tal marco para ecuaciones con retardo, pero quedará claro cómo hacerlo en casos más y menos generales de forma análoga. Nuestro objetivo es claro: describir el comportamiento cualitativo de las soluciones en largos periodos de tiempo. La palabra más importante en la frase anterior es "cualitativo"; así, resultados que expresaríamos en lenguaje coloquial utilizando palabras como "(más) rápido" o "(más) grande" no estarán presentes aquí.

Vamos a fijarnos primero en una ecuación diferencial ordinaria

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0,$$

donde $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua.

Bajo condiciones de existencia y unicidad locales (cualesquiera), podemos considerar a la vez todas las soluciones de esta ecuación por medio de un semiflujo; veamos qué es esto.

Sea
$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (t, \varphi) &\longmapsto \text{valor en } t \text{ de la solución de } \begin{cases} x' = f(x), t \geq 0, \\ x(0) = \varphi \end{cases} \end{aligned}$$

Es claro que esta aplicación engloba a todas las soluciones.

Además, tiene dos propiedades importantes:

1.- $\tau(0, \cdot) = id_{\mathbb{R}^m}$;

2.- $\tau(t, \cdot) \circ \tau(s, \cdot) = \tau(t+s, \cdot), \quad t, s \in \mathbb{R}^+$.

A una aplicación como la anterior y con esas dos propiedades se la llama <u>semiflujo</u> (o flujo si, en vez de $\mathbb{R}^+$, hubiéramos puesto $\mathbb{R}$).

Se llama <u>(semi) trayectoria</u> o <u>(semi) órbita</u> al conjunto

$$\{ \tau(t, \varphi) : t \geq 0 \}$$

para cada $\varphi \in \mathbb{R}^m$.

Las soluciones acotadas dan lugar a trayectorias relativamente compactas (lo cual, en el caso que estamos estudiando, es evidente). Cuando no trabajemos en $\mathbb{R}^m$, se verá que esto no es trivial.

Un concepto importante es el de omega-límite. La idea intuitiva es que el omega-límite es aquello a lo que se acercan las soluciones. Vamos a definirlo. Dado un dato inicial $\varphi \in \mathbb{R}^m$, si denotamos por $x(\cdot, \varphi)$ la solución de la ecuación con ese dato inicial, el <u>omega-límite</u> de φ es el conjunto

$$O(\varphi) = \{ x \in \mathbb{R}^m : \exists t_n \uparrow +\infty \text{ tal que } \tau(t_n, \varphi) \longrightarrow x \}.$$

Es decir, es el conjunto de puntos del espacio de fase (i.e. del espacio en donde está definido el semiflujo) a los que nos acercamos desde φ según pasa el tiempo. ¿ Y por qué nos iba a interesar? Porque resulta que se comporta bien y allí, pasa casi lo mismo que cerca de allí (y estoy acercándome con las soluciones).

Si tenemos una solución acotada, ésta da lugar a un omega-límite que es no vacío (mejor, porque las propiedades topológicas del vacío son inescrutables), conexo, compacto y <u>positivamente invariante</u>; esto último significa que, en cuanto el semi flujo cae en este conjunto, ya no vuelve a salir nunca. Formalmente, si $\varphi \in \mathbb{R}^m$ y $x(\cdot, \varphi)$ está acotada, entonces, siempre que tengamos $\varphi \in \mathbb{R}^m$ y $t_0 \geq 0$ tales que $x(t_0, \varphi) \in \mathcal{C}(\varphi)$, tendremos que $x(t, \varphi) \in \mathcal{C}(\varphi) \quad \forall t \geq t_0$.

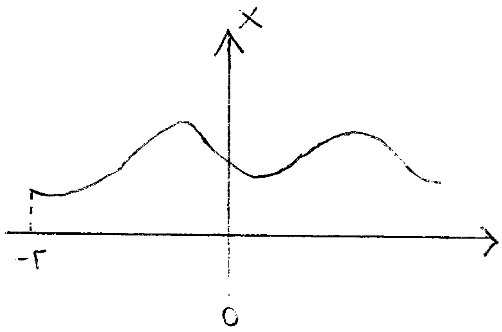
Podemos considerar, en la familia de todos los conjuntos que son compactos y positivamente invariantes, la relación de orden parcial dada por la inclusión. Siempre que se habla de conjuntos <u>minimales</u>, nos referimos a esta familia y a esta relación. Una caracterización conocida y útil de estos conjuntos es la que dice que son exactamente aquéllos en los que todas las órbitas son densas.

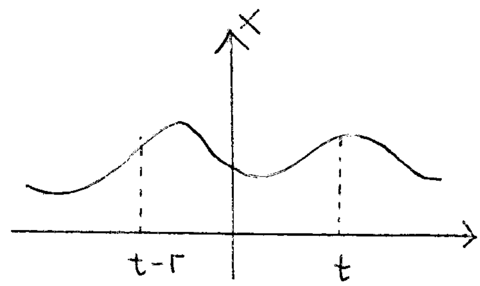
Introducimos ahora una nueva dificultad en la ecuación: el retardo. Estamos acostumbrados a que el futuro (del cual tenemos como única información la derivada de la solución en un instante t) solo dependa de datos que forman parte de la información disponible en el presente. Pero ésta no es la situación que nos encontramos en ciertos fenómenos de la naturaleza (ni en otros menos naturales, claro está).

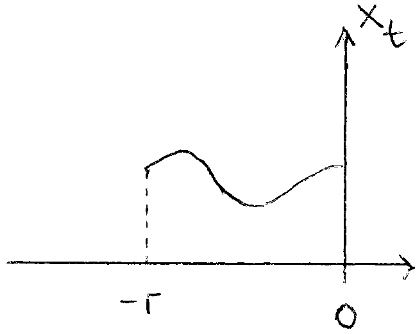
Un ejemplo claro es el del control de intensidades de tráfico; en un instante dado, los coches que llegan a Barcelona no dependen de cuántos coches hay en Madrid o Valencia saliendo hacia Barcelona ahora, sino de cuántos salieron hace unas horas (de hecho, cada coche tardará un tiempo distinto). Así pues, la cantidad de coches en Barcelona queda determinada por datos que vienen del pasado.

Vamos a introducir notación que sea capaz de retener la información que necesitamos. Sean $a, r \in \mathbb{R}^+$. Sean $x : [-r, a] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $t \in [0, a]$. La <u>historia</u> de x hasta t es

$$x_t : [-r, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$s \longmapsto x_t(s) = x(t+s).$$







Como se ve, hemos trasladado la función a $[-r,0]$ porque es más fácil ver a nuestras funciones como elementos de $C([-r,0],\mathbb{R}^m)$.

Por fin, podemos escribir una ecuación con retardo (finito, porque, según estamos razonando, nunca va más allá de $-r$).

$$x'(t) = f(x_t),\ t \geq 0,$$

donde ahora $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con $X = C([-r,0],\mathbb{R}^m)$.

En X, consideramos la norma del supremo.

Aquí, intentamos construir un semiflujo como antes definiendo

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}^+ \times X &\longrightarrow X \\ (t,\varphi) &\longmapsto \text{restricción de la solución de } \begin{cases} x' = f(x_t),\ t\geq 0 \\ x_0 = \varphi \end{cases} \\ &\qquad \text{a } [t-r,t] \text{ trasladada a } [-r,0]. \end{aligned}$$

Hemos tenido mucha suerte, porque τ es un semiflujo otra vez. Más concretamente, no teníamos suerte, sino una ecuación autónoma.

El resto de notaciones y conceptos son los mismos que antes, solo que esta vez el espacio de fase tiene unas cuantas dimensiones más.

¿Y qué pasa si la ecuación es no autónoma?

Consideremos la ecuación

$$x'(t) = f(t, x_t), \quad t \geq 0,$$

donde $f : \mathbb{R} \times X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua.

Queremos un semiflujo con el que trabajar, así que probamos con el del caso autónomo a ver qué pasa:

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}^+ \times X &\longrightarrow X \\ (t, \varphi) &\longmapsto \text{restricción a } [t-r, t] \text{ de la solución de } \begin{cases} x' = f(t, x_t), \ t \geq 0, \\ x_0 = \varphi \end{cases} \text{ trasladada a } [-r, 0]. \end{aligned}$$

$\tau(0, \cdot) = id_X$, pero la segunda propiedad de semiflujo no es cierta en general. Vaya.

Una solución habitual a este problema es considerar el tiempo como una variable espacial, i.e. resolver

$$\begin{cases} x' = f(t, x_t), \quad t \geq 0, \\ t' = 1. \end{cases}$$

Así, podemos definir un semiflujo, en efecto. Pero todas las soluciones son no acotadas. Los resultados en la línea de "esta solución se va más rápido hacia el infinito que esta otra" no son cualitativos, según habíamos dicho. Habrá que hacer algo para que las cosas se queden cerca y las podamos describir de forma cualitativa.

Paso I: trasladar la función.

Vamos a trasladar f en su variable temporal dejando la otra fija. Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$f \cdot t : \mathbb{R} \times X \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(s, x) \longmapsto f \cdot t(s, x) = f(t+s, x).$$

Así, tenemos el conjunto de trasladadas de f

$$\{ f \cdot t : t \in \mathbb{R} \} \subseteq C(\mathbb{R} \times X, \mathbb{R}^m).$$

Se llama <u>envolvente</u> de f, y la denotaremos por Ω, a la adherencia del conjunto de trasladadas cuando consideramos la topología compacto-abierta en $C(\mathbb{R} \times X, \mathbb{R}^m)$, i.e.

$$\Omega = \text{cls} \{ f \cdot t : t \in \mathbb{R} \} \subseteq C(\mathbb{R} \times X, \mathbb{R}^m)$$

Por otro lado, diremos que f es <u>admisible</u> si f es uniformemente continua y acotada en los conjuntos de la forma $\mathbb{R} \times \{v\}$, $v \in X$. Si f es admisible, entonces Ω es compacto. Así pues, asumiremos la admisibilidad de f de aquí en adelante, con lo que Ω será compacto.

Vamos a dotar a Ω de un flujo. Éste no será el flujo que andamos buscando, así que no nos pararemos aquí. Lo llamaremos σ para diferenciarlos bien.

PASO II: dotar a Ω de un flujo.

El flujo σ será de los llamados flujos de traslación (por razones evidentes). Definimos

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} \times \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (t, \omega) &\longmapsto \omega \cdot t , \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega \cdot t : \mathbb{R} \times X &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (s, x) &\longmapsto \omega \cdot t(s,x) = \omega(t+s, x) . \end{aligned}$$

(Recordemos que $\Omega \subseteq C(\mathbb{R} \times X, \mathbb{R}^m)$.)

La aplicación σ satisface las dos propiedades de flujo, con lo que es un flujo. De todas formas, es muy habitual escribir $\omega \cdot t$ en vez de $\sigma(t, \omega)$ (aunque no es algo universalmente aceptado como notación)

Diremos que f es <u>recurrente</u> si este flujo sobre Ω es minimal, i.e. si $\{\omega \cdot t : t \in \mathbb{R}\}$ es denso en Ω para cada $\omega \in \Omega$.

¿Qué funciones son recurrentes? Son muchas de las que nos interesan; así, las constantes, las periódicas, las cuasi-periódicas y las casi periódicas están entre ellas (pero las recurrentes son más).

Ya casi hemos acabado. Solo nos falta definir el semiflujo que andábamos buscando. La diferencia con los anteriores será que ahora el espacio de fase no será X, sino $\Omega \times X$.

PASO III: definir un semiflujo para la ecuación.

Definamos, pues, el semiflujo en $\Omega \times X$:

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}^+ \times (\Omega \times X) &\longrightarrow \Omega \times X \\ (t, \omega, \varphi) &\longmapsto (\omega \cdot t, \tau_2(t, \omega, \varphi)) \end{aligned}$$

donde $\tau_2(t, \omega, \varphi)$ es la restricción a $[t-r, t]$ de la solución de

$$\left\{ \begin{aligned} x'(t) &= \omega(t, x_t), \ t \geq 0 \\ x_0 &= \varphi \end{aligned} \right. \qquad (*)_\omega$$

trasladada a $[-r, 0]$, claro. Este τ se llama semiflujo triangular.

Observemos que la primera componente del semiflujo está dada por el flujo σ en Ω. Y démonos cuenta de que en $(*)_\omega$ tenemos ω y no f.

Se comprueba con facilidad que τ es un semiflujo.

Destaca el hecho de que ahora tenemos una familia de ecuaciones (una para cada $\omega \in \Omega$). Pero $f \in \Omega$, con lo que nuestra ecuación es una de ésas.

Vamos a ver cómo manejar esta familia de ecuaciones fácilmente. Para ello, solo necesitamos introducir una nueva notación que es muy simple.

Definimos la evaluación en tiempo cero como sigue:

$$F : \Omega \times X \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(\omega, x) \longmapsto \omega(0, x).$$

Observemos que, $\forall (t, \omega, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega, X$, se tiene que $\omega(t, x) = \omega \cdot t(0, x) = F(\omega \cdot t, x)$. Así pues, nuestra familia de ecuaciones se puede escribir como

$$x'(t) = F(\omega \cdot t, x_t), \quad t \geq 0, \qquad (**)_\omega$$

para $\omega \in \Omega$.

Nuestra ecuación original era

$$x'(t) = f(t, x_t), \quad t \geq 0.$$

Hablando a nivel intuitivo, la única diferencia entre esta ecuación y $(**)_\omega$ es que ahora el tiempo varía sobre un compacto, que es Ω. Y es por eso por lo que vamos a conseguir que haya soluciones acotadas que poder estudiar de manera cualitativa con este semiflujo. Una vez más, haciendo $\omega = f \in \Omega$, recuperamos nuestra ecuación a partir de $(**)_\omega$.

APÉNDICE.-

En relación con el caso cuasiperiódico, vamos a ver cómo se puede ver la envolvente. Consideramos la ecuación $x' = f(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, donde f es cuasiperiódica en t, i.e.

$$f(t,x) = g(\gamma \cdot t, x)$$

con $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ racionalmente independientes y $g = g(t_1, \ldots, t_m, x)$ periódica en $t_1, \ldots, t_m$.

Consideramos el flujo de Kronecker en $\mathbb{T}^m$ asociado a γ, i.e.

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^m &\longrightarrow \mathbb{T}^m \\ (t, \varphi) &\longmapsto \varphi + \gamma \cdot t . \end{aligned}$$

Es fácil ver que la aplicación

$$\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{T}^m$$

que extiende a

$$\sigma(t, f) = f \cdot t \longmapsto \gamma \cdot t$$

(solo hay que ver que pasa bien al límite; y lo hace) hace el siguiente diagrama conmutativo para cada $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\sigma(s,\cdot)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{T}^m \arrow[d, "S(s,\cdot)"] \\ \Omega \arrow[r, "\xi"] & \mathbb{T}^m \end{tikzcd}$$

Se dice que ξ es un <u>homomorfismo de flujos</u>.

Más aún, ξ es biyectiva y ξ^{-1} satisface lo mismo. Así, ξ es un isomorfismo de flujos. Intuitivamente, es el mismo flujo el que tenemos en Ω que el que tenemos en $\mathbb{T}^m$, solo que está escrito de otra manera.

En este caso, es claro que nuestra ecuación se reescribe como

$$x' = g(\gamma \cdot t, x) \quad , t \in \mathbb{R},$$

y que tenemos una ecuación distinta para cada $\gamma \in \mathbb{T}^m$.