Conjunts invariants per l'aplicació logística forçada quasi-periodicament

Pau Rabassa Sans

Presentació del problema

En aquest treball estudiarem els sistemes forçats quasi-periodicament:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = f_\mu(x,\theta), \\ \bar{\theta} = \theta + \omega \quad (\text{mod } 1), \end{array}\right\} \tag{1}$$

ón $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{T}^1$, $f_\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ pamatres i ω irracional.

En particular ens centrarem en l'existència de conjunts invariants.

Aquests conjunts poden ser:

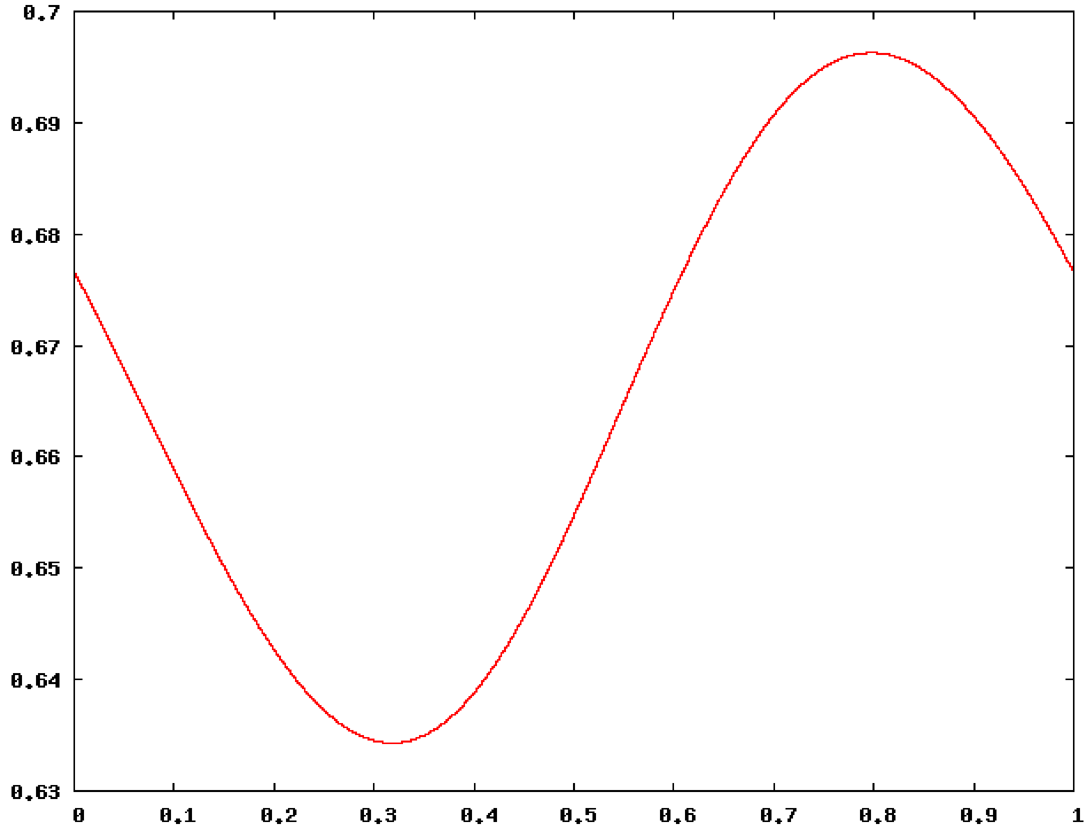
- Corbes invariants (aplicacions diferenciables $u : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$, tals que $u(\theta + \omega) = f_\mu(u(\theta), \theta)$).

- Corbes invariants periòdiques (concepte anàleg a punt periòdic però per a corbes invariants).

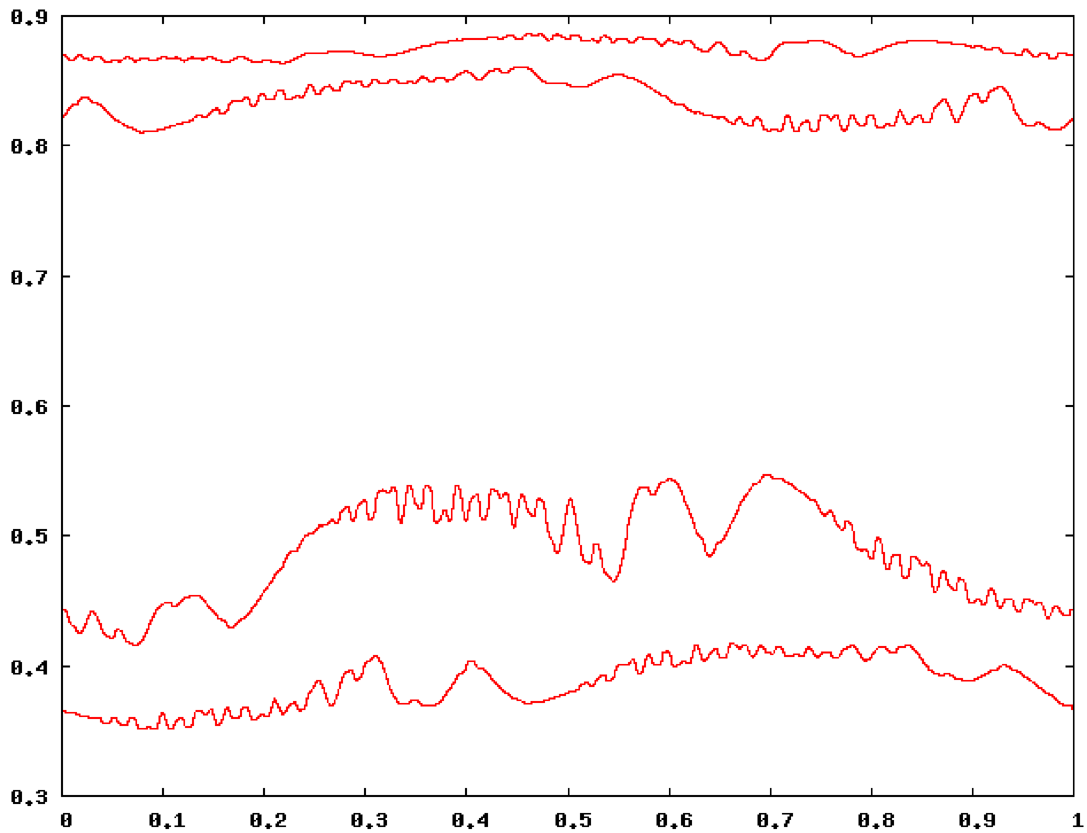
- Atractors estranys.

- Atractors estranys no caòtics (SNAs).

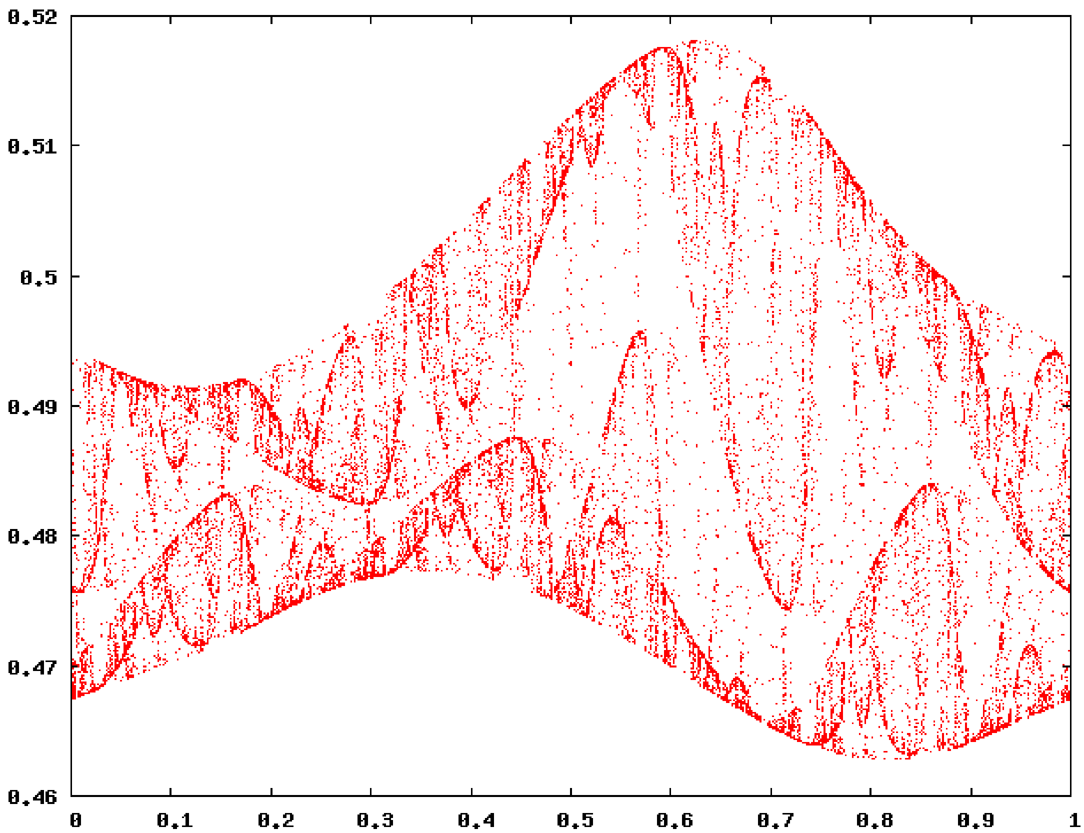
Exemple de corba invariant 1-periodica



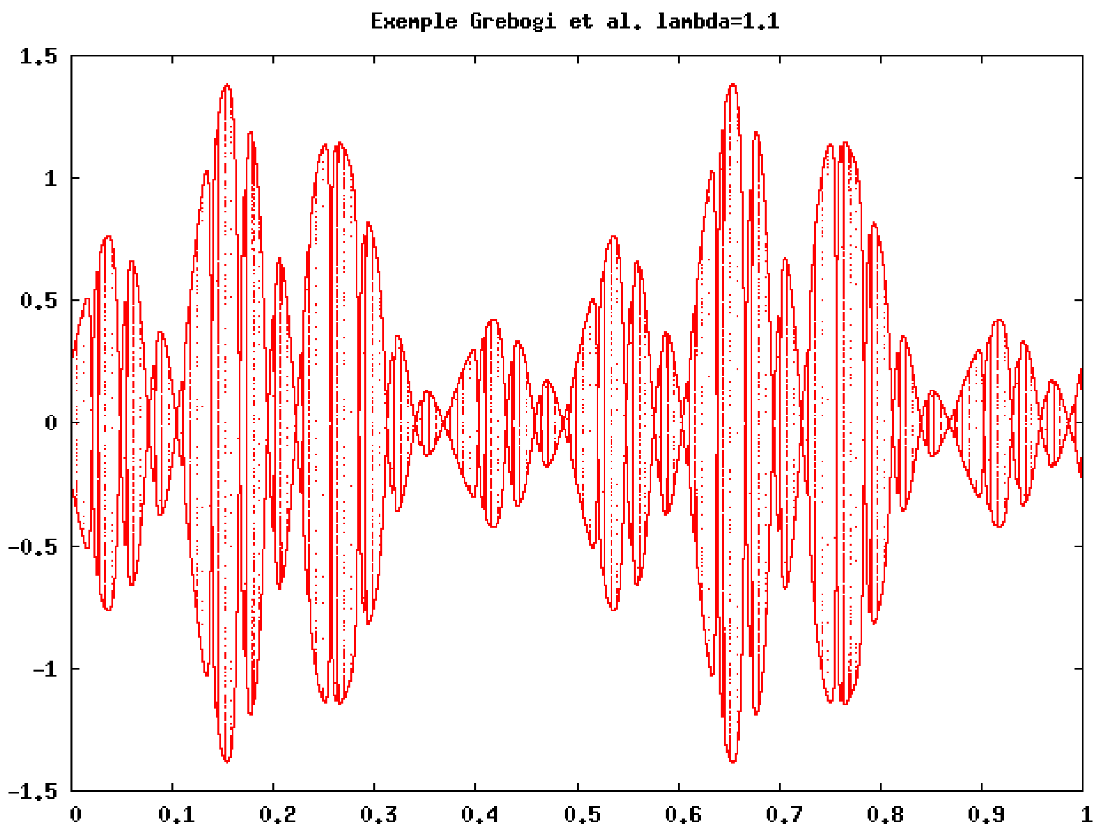
Exemple de corba invariant 4-periodica



Exemple de atractor estrany



Exemple de atractor estrany no caotic



Com a principal exemple prendrem l'aplicació logística forçada periodicament (DLM):

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = \alpha x(1-x)(1+\varepsilon \cos(2\pi\theta)) \\ \bar{\theta} = \theta + \omega \quad (\mathrm{mod}\ 1), \end{array}\right\}$$

ón (α, ε) són paràmetres, i ω és la raò aurea.

Objectius

1. Qüestionar l'existència de SNA per alguns valors dels paràmetres de la DLM.

2. Estudiar la reductibilitat de les corbes invariants i el mecanisme de fractalització en la DLM.

3. Classificar l'espai de paràmetres de la DLM, en funció de les propietats del conjunt atractor invariant. Aquestes propietats seràn la caocitat, i en el cas de tindre una corba invariant atractora, el grau de no-reductibilitat i el periode de la corba invariant.

Definició de reductibilitat

Sigui $u_\mu(\theta)$ una corba invariant de classe C^r de (1), $r \geq 0$. El comportament linealitzart normal a la corba ve descrit per el seguen "linear skew product":

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = a(\theta)x, \\ \bar{\theta} = \theta + \omega \quad (\mathrm{mod}\ 1), \end{array}\right\} \tag{2}$$

ón $a(\theta) = D_x f_\mu(u_\mu(\theta), \theta)$ és també de classe C^r, $x \in \mathbb{R}$ i $\theta \in \mathbb{T}^1$. Assumirem que la corba invariant no és degenerada, en el sentit que la funció $a(\theta)$ no és identicament igual a zero.

Definició *Direm que el sistema (2) és reductible si, i només si, existeix un canvi de variables $x = c(\theta)y$, continu respecte θ, tal que (2) es transforma en*

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y} = by, \\ \bar{\theta} = \theta + \omega. \end{array}\right\} \tag{3}$$

ón b no depèn de θ.

Eines numèriques

- Exponents de Liapunov.

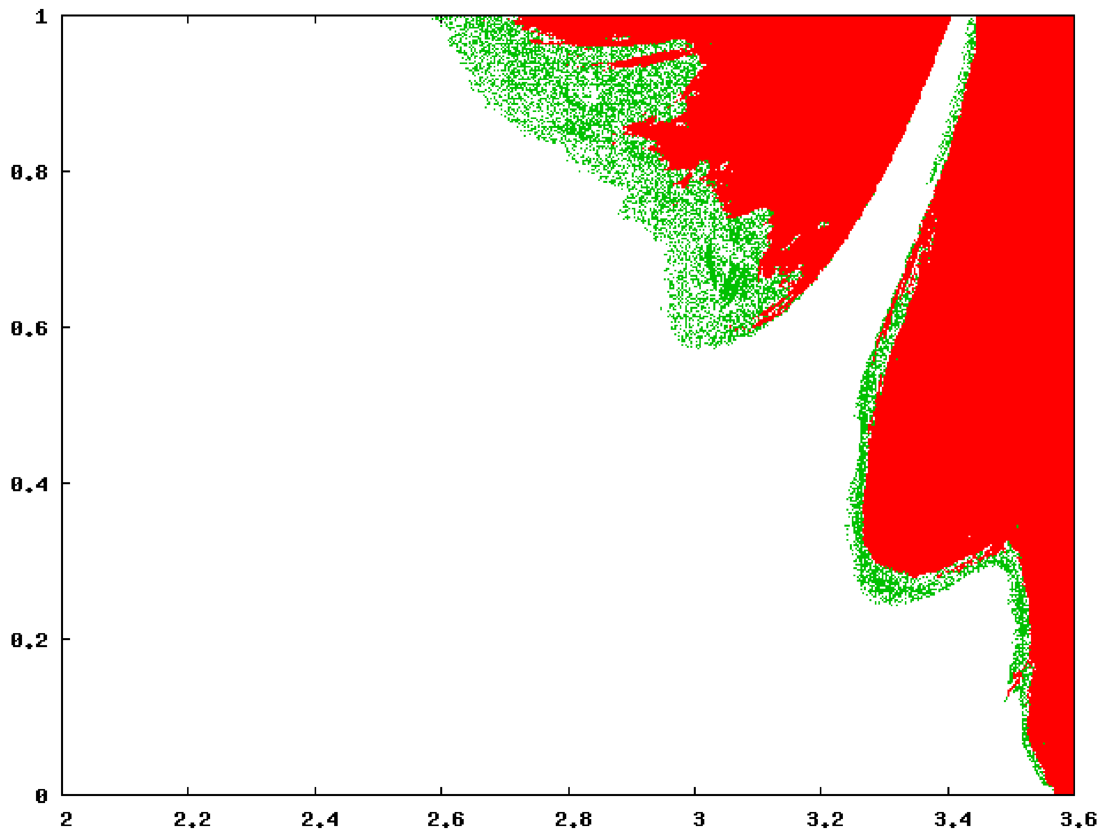
- "Phase sensitivity indicator".

- "Zooming algorithm".

- Càlcul de corbes invariant de un sistema forçat quasi-periodicament, a travès del desenvolupament en serie de Fourier de la corba invariant.

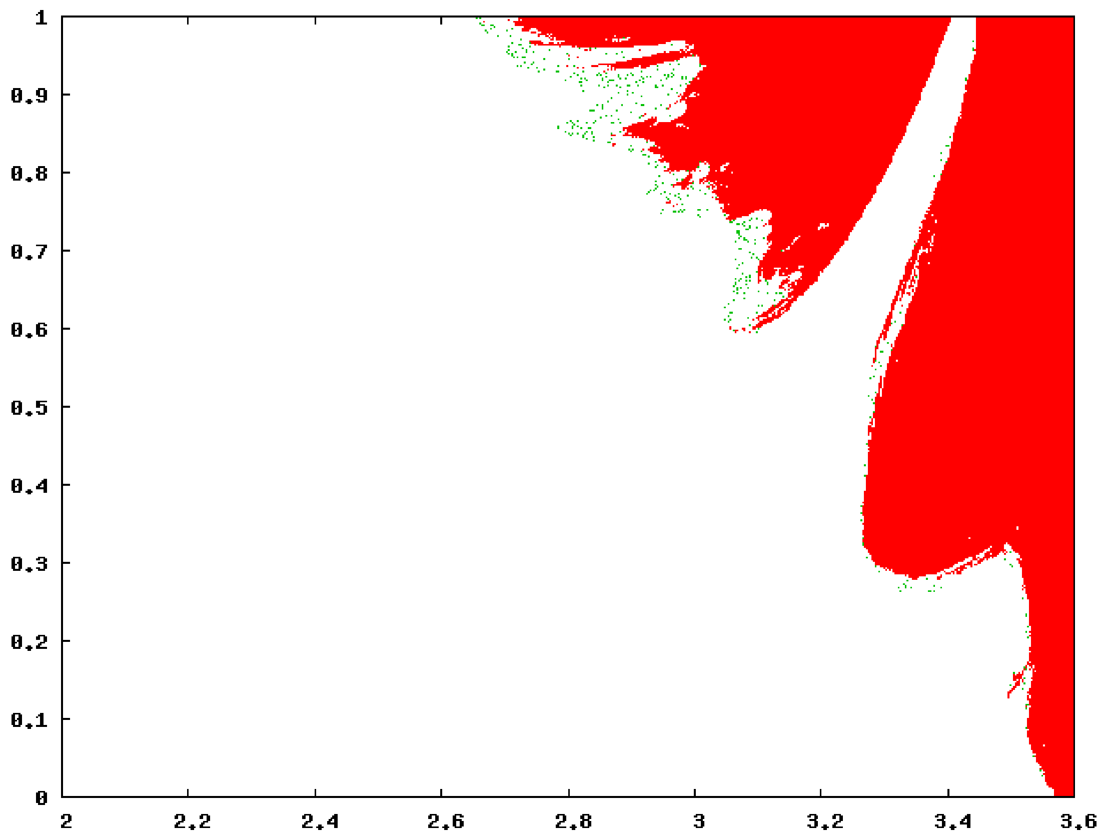
Parameter space of the q.p. driven logistic map

El calcúl de numèric de l'exponent de Liapunov i del Phase sensivity indicator, ens permet fer una exploració de l'espai de paràmetres per a detectar candidats a SNAs.



Candidats a SNAs, usant l'exponents de Liapunov i el Phase Sensitivity indicator. Amb un transitori de 10^3 iterats, i càlcul dels indicadors amb 10^4 iterats. Però ...

... si usem els indicadors amb més pressició, en concret usant un transitori de 10^6 iterats i 10^7 iterats per al càlcul dels indicators, aleshores tenim:



Recordem l'equació que ens definia la DLM:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x} = \alpha x(1-x)(1+\varepsilon\cos(2\pi\theta)) \\ \bar{\theta} = \theta + \omega,\end{array}\right\}$$

Farem un canvi de paràmetres

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4/\alpha - 1}$$

ja que així estudiarem els paràmetres $(\alpha, \varepsilon') \in [0,4] \times [0,1]$.

Observem que per $\varepsilon' = 0$ tenim $\varepsilon = 0$, per tant l'aplicació es desacopla i coincideix amb l'aplicació logística. Es conegut que aquesta aplicació exhibeix varies cascades de bifurcacións de doblament de periode.

Els nostres estudis indiquen que quan $\varepsilon' \neq 0$ aquestes cascades de bifurcacions són truncades a cert ordre. Veurem com està relacionat aquest fet amb el fenomen de fractalització.

Cascada bifurcacions aplicació logística

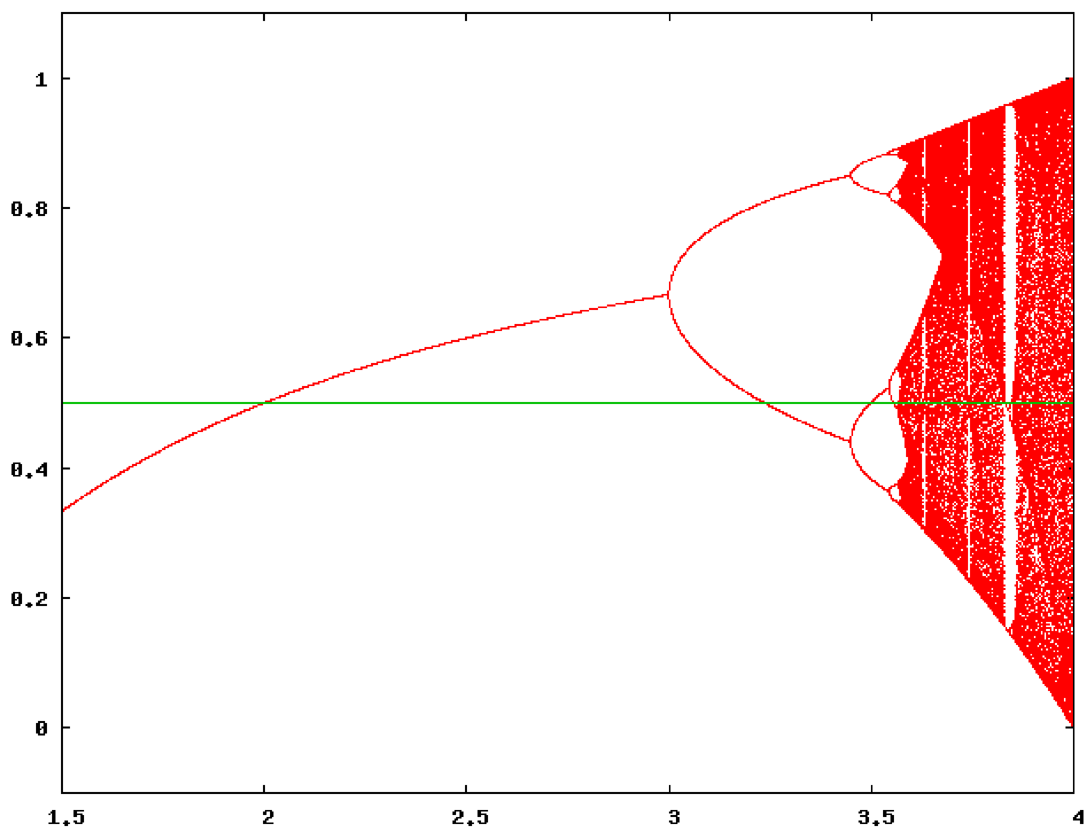
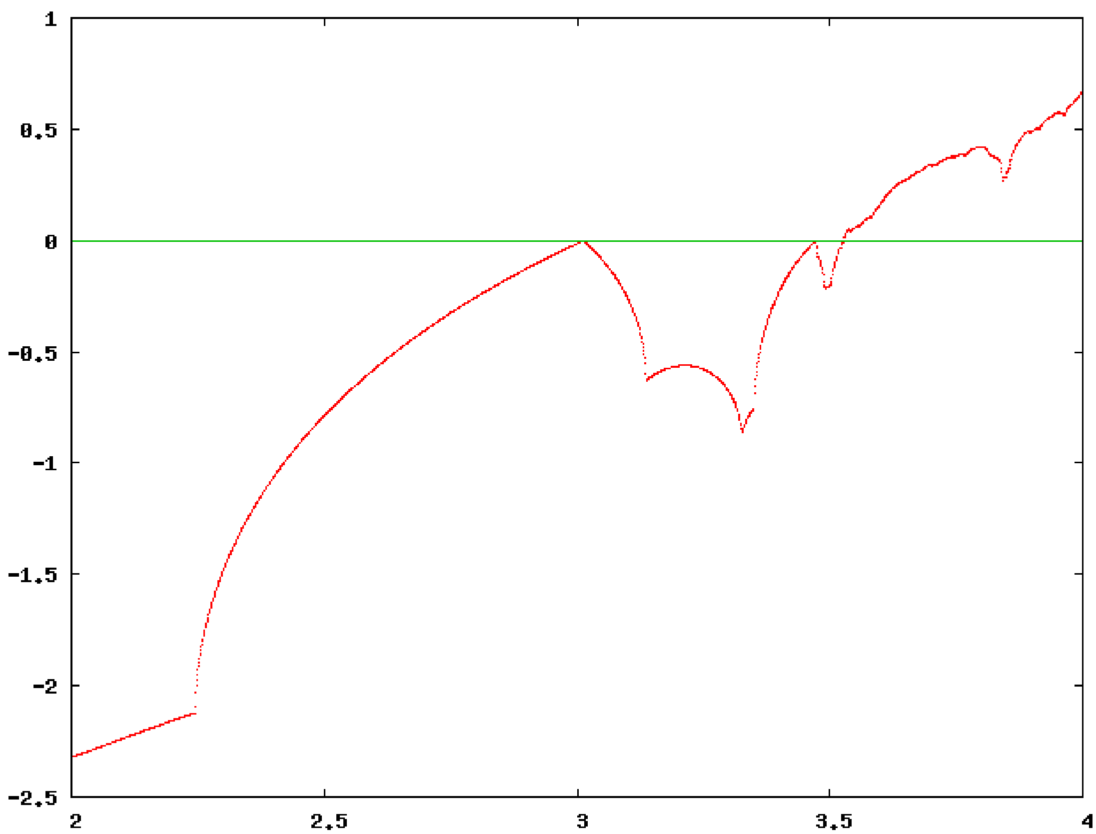


Diagrama de bifurcacions de l'aplicació logística. La orbita atractora correspon al eix y, i el paràmetre de la logística al eix x.

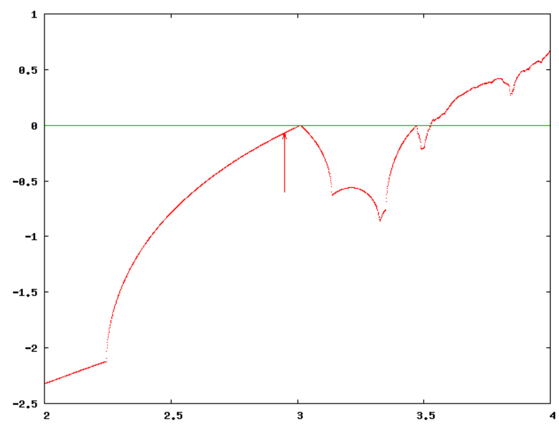
Estudi de fractalització

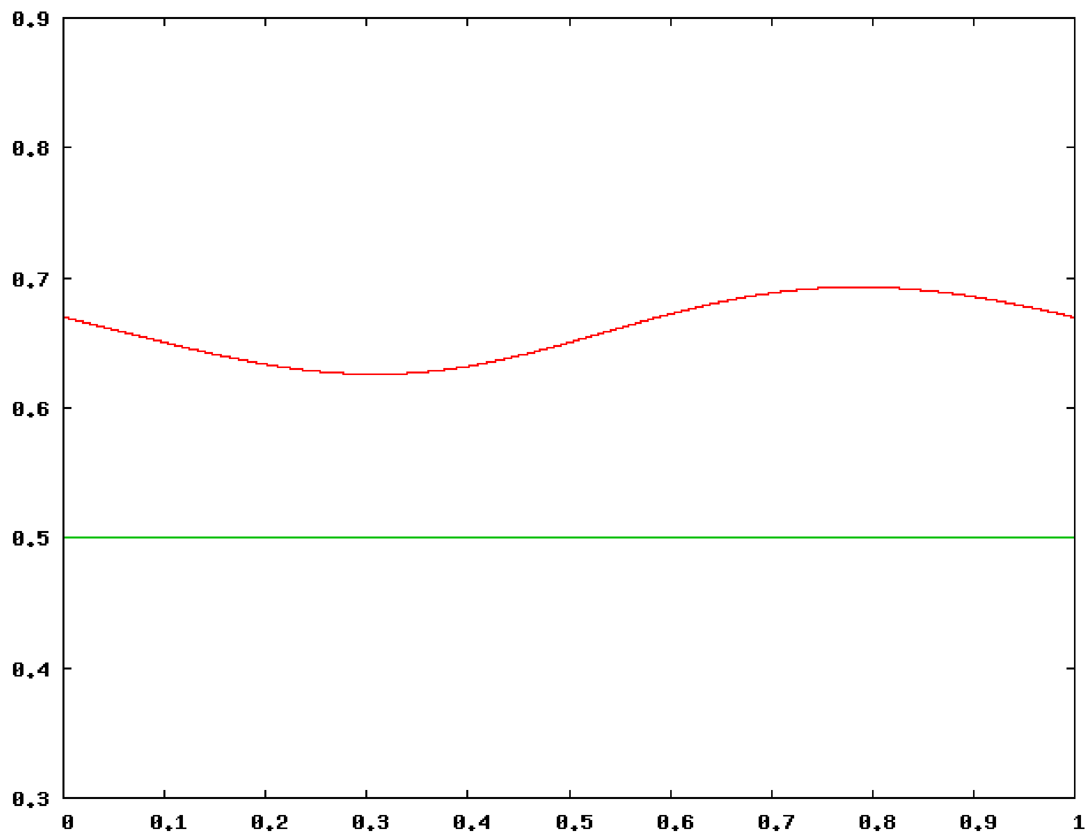
Passem ara a estudiar al mecanisme de fractalització en la FLM.

Per a fer un primer estudi fixem $\varepsilon' = 0.1$, i variarem el paràmetre α.

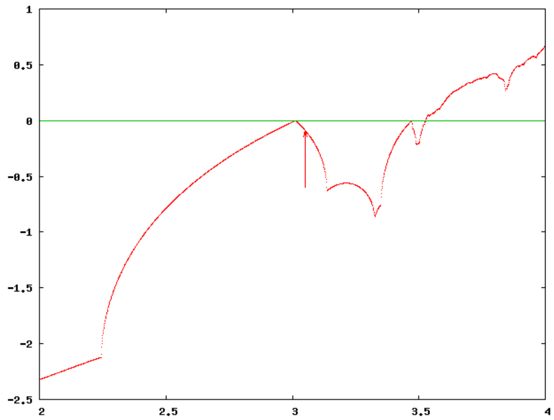


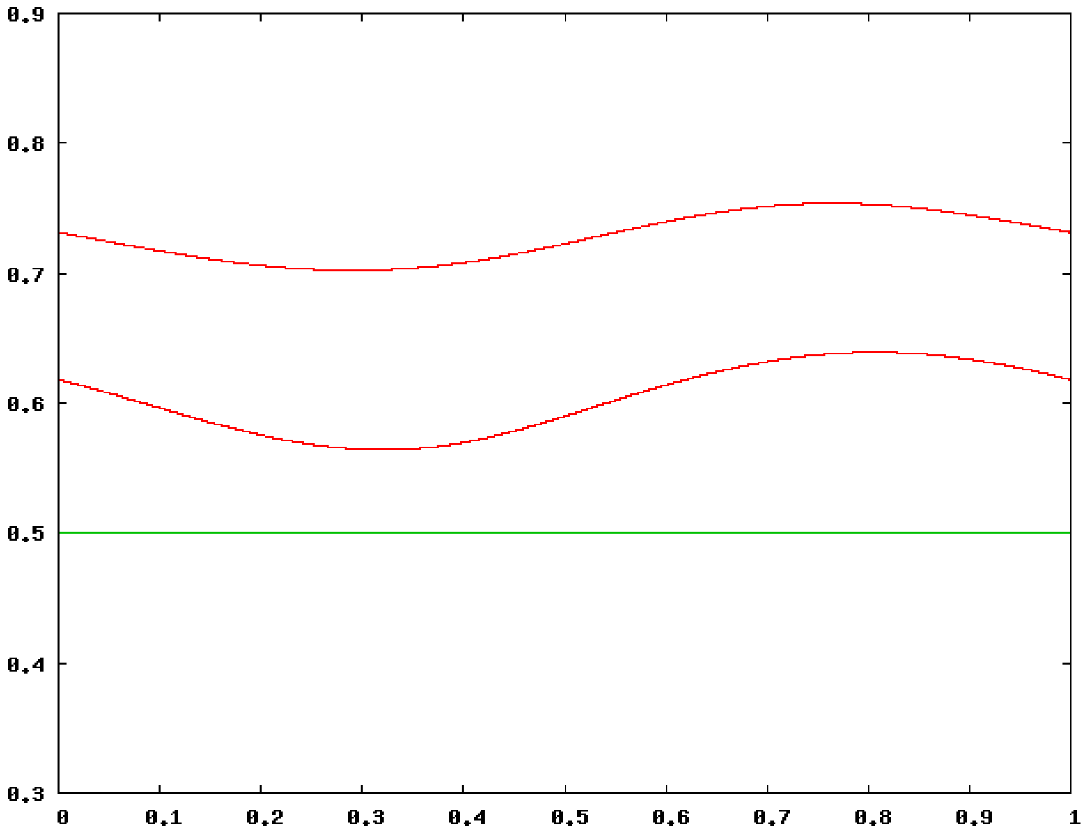
Gràfica de l'exponent de Liapunov en funció del paràmetre α.



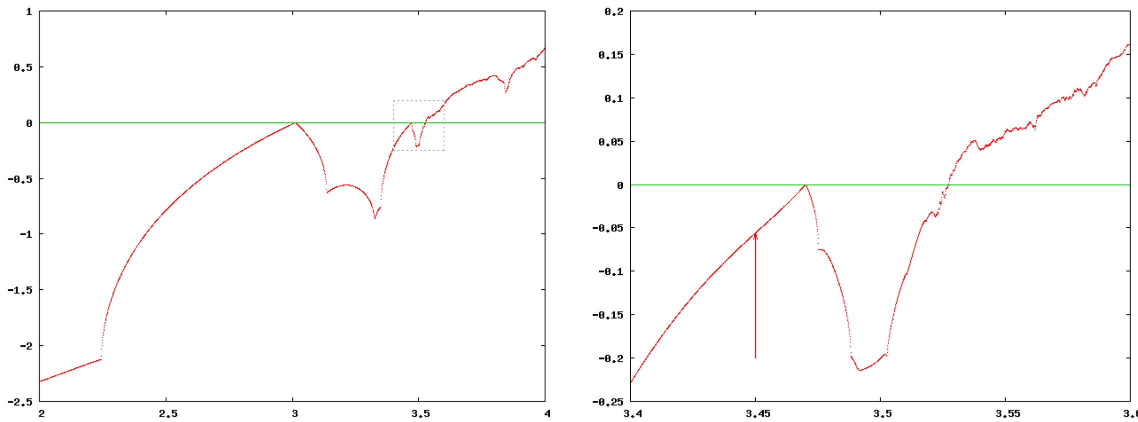


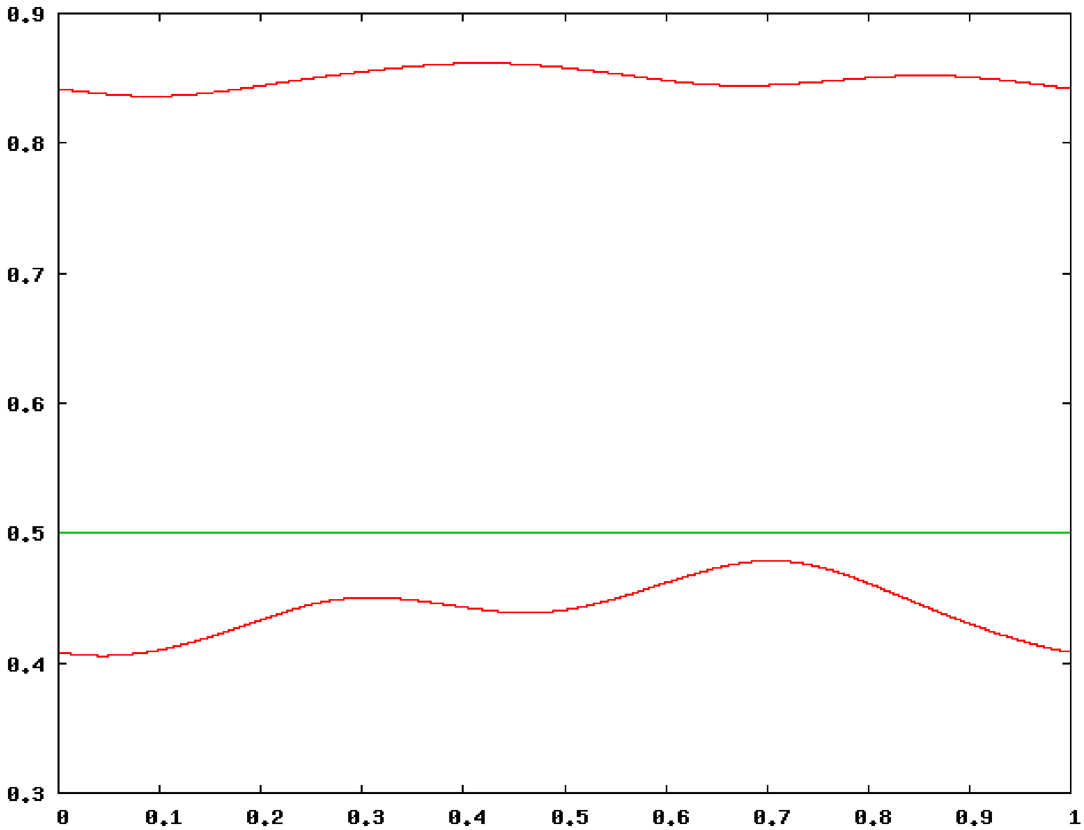
Paràmetres $\alpha = 2.95$ i $\varepsilon' = 0.1$. L'exponent de Liapunov és igual a -0.068609



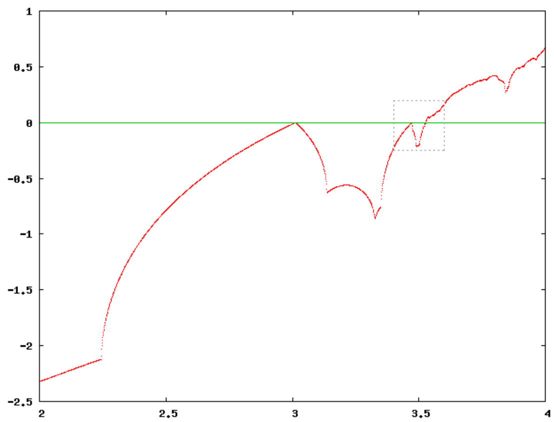


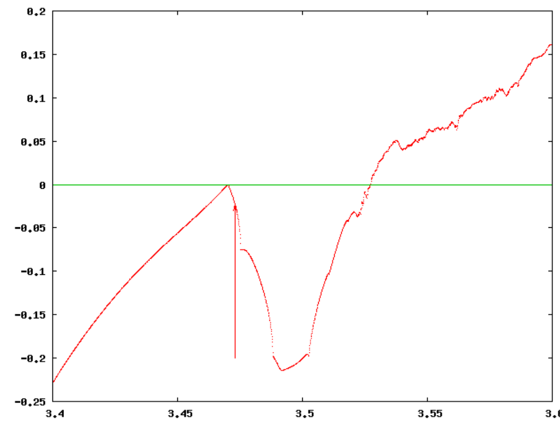
Paràmetres $\alpha = 3.05$ i $\varepsilon' = 0.1$. L'exponent de Liapunov és igual a -0.086277

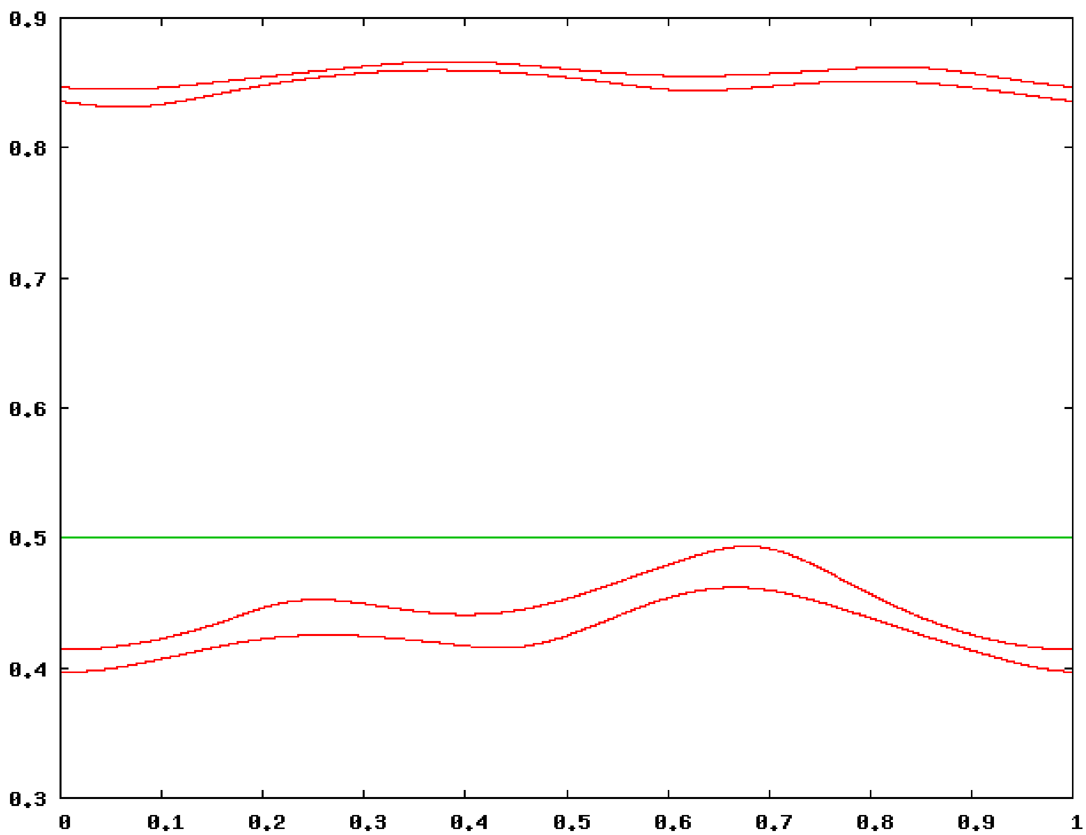




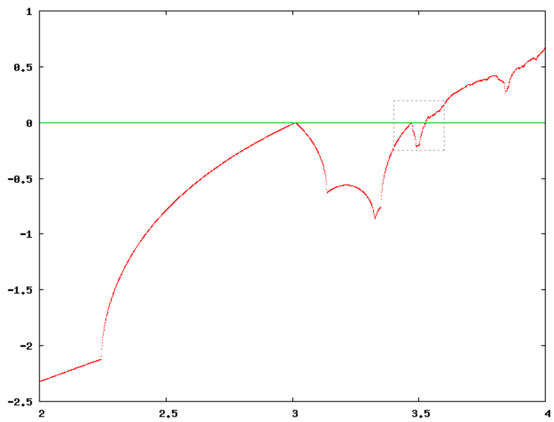
Paràmetres $\alpha = 3.45$ i $\varepsilon' = 0.1$. L'exponent de Liapunov és igual a -0.055926

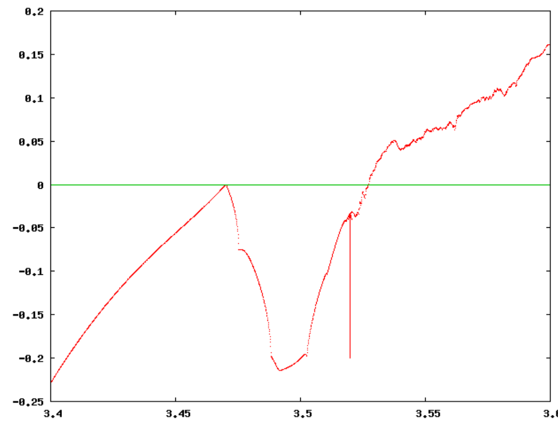


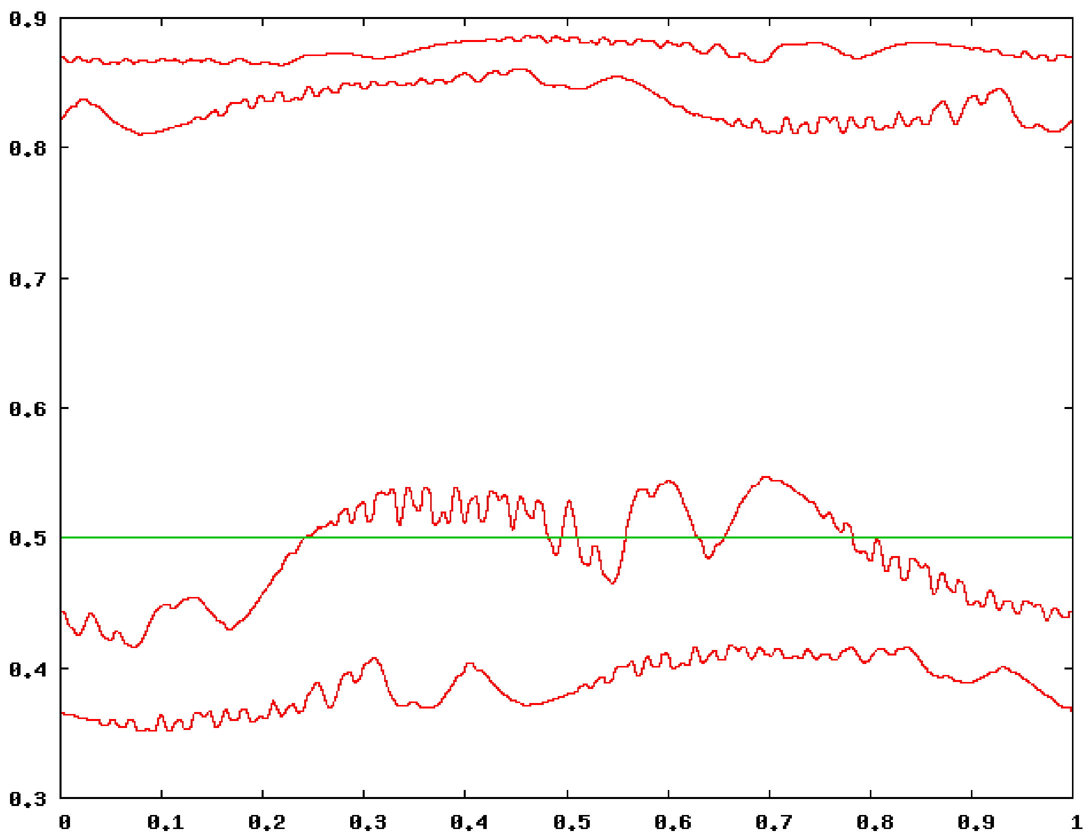




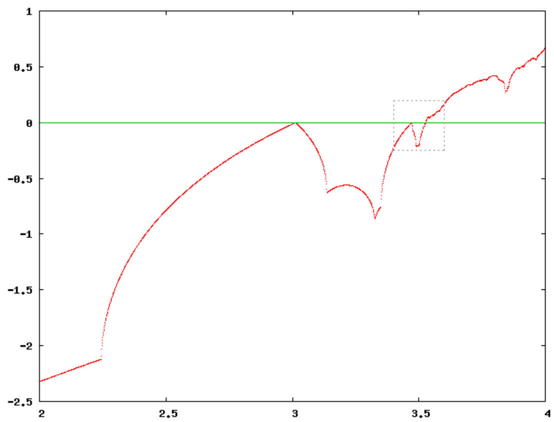
Paràmetres $\alpha = 3.473$ i $\varepsilon' = 0.1$. L'exponent de Liapunov és igual a -0.022783

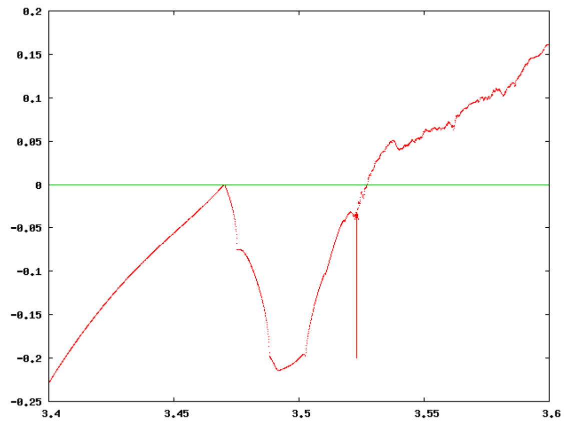


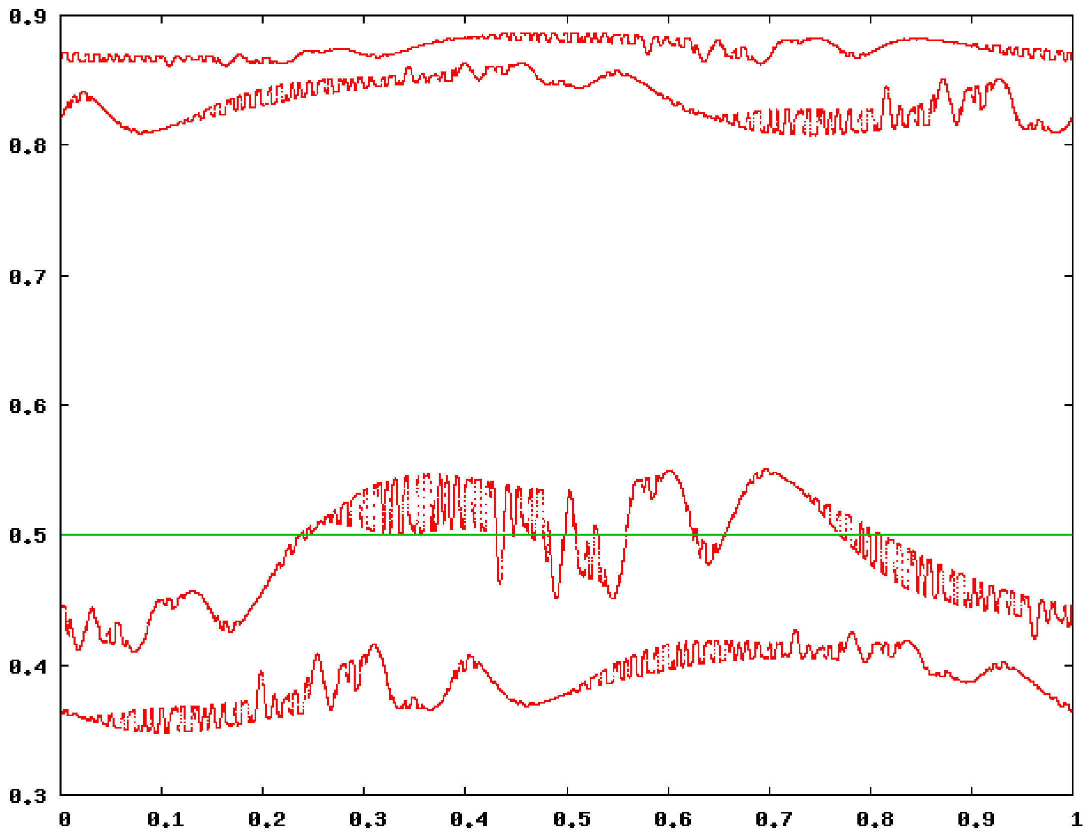




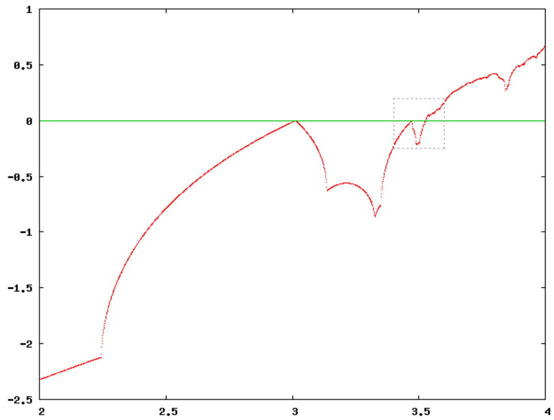
Paràmetres $\alpha = 3.52$ i $\varepsilon' = 0.1$. L'exponent de Liapunov és igual a -0.033643

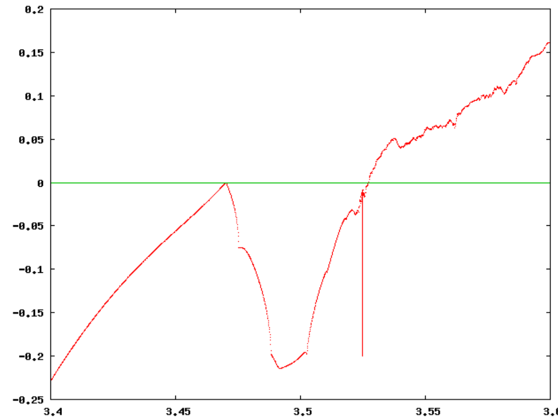


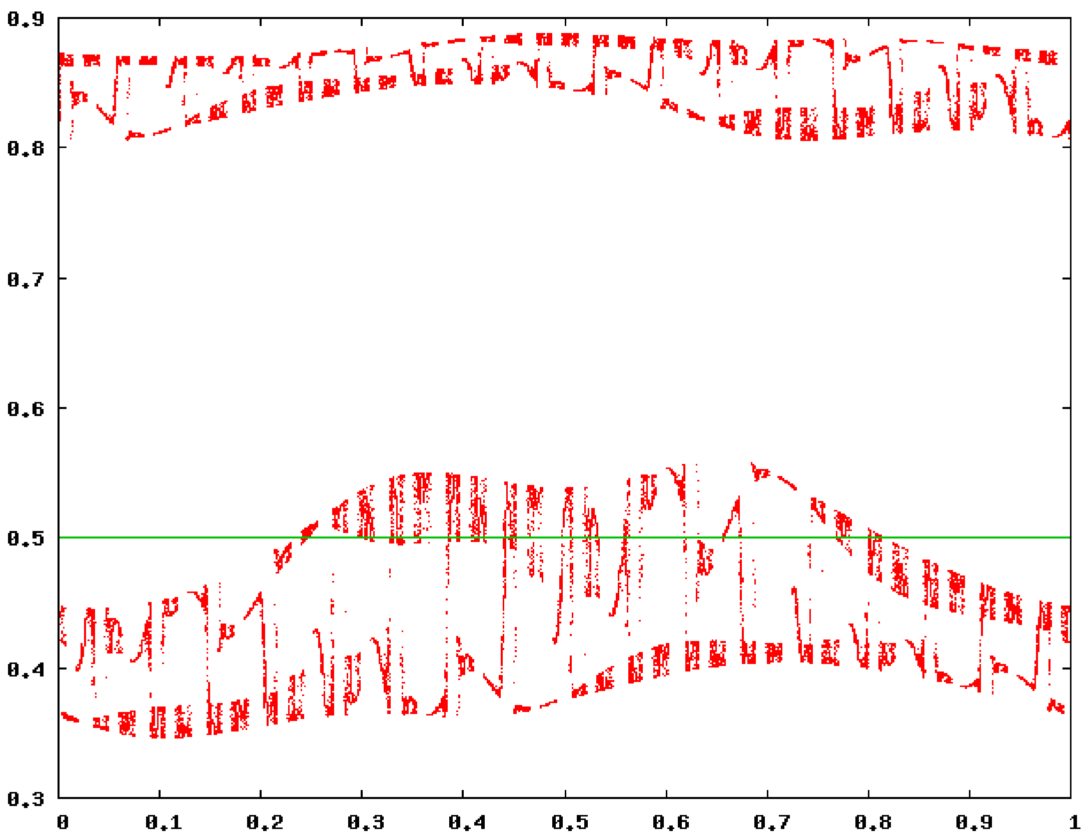




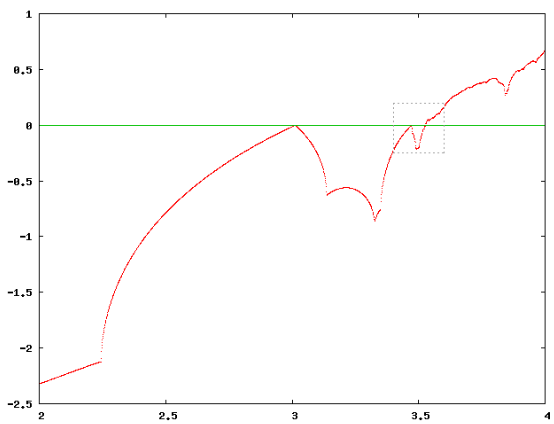
Paràmetres $\alpha = 3.523$ i $\varepsilon' = 0.1$. L'exponent de Liapunov és igual a -0.032756

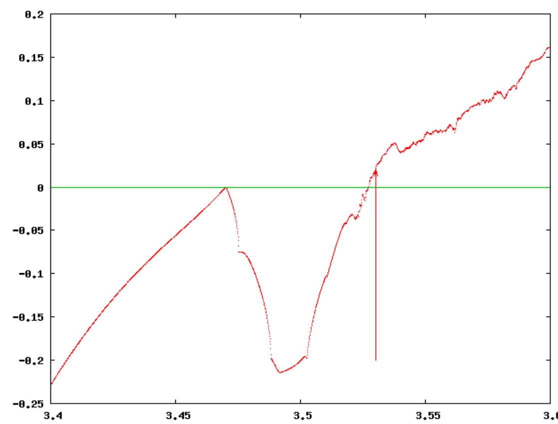


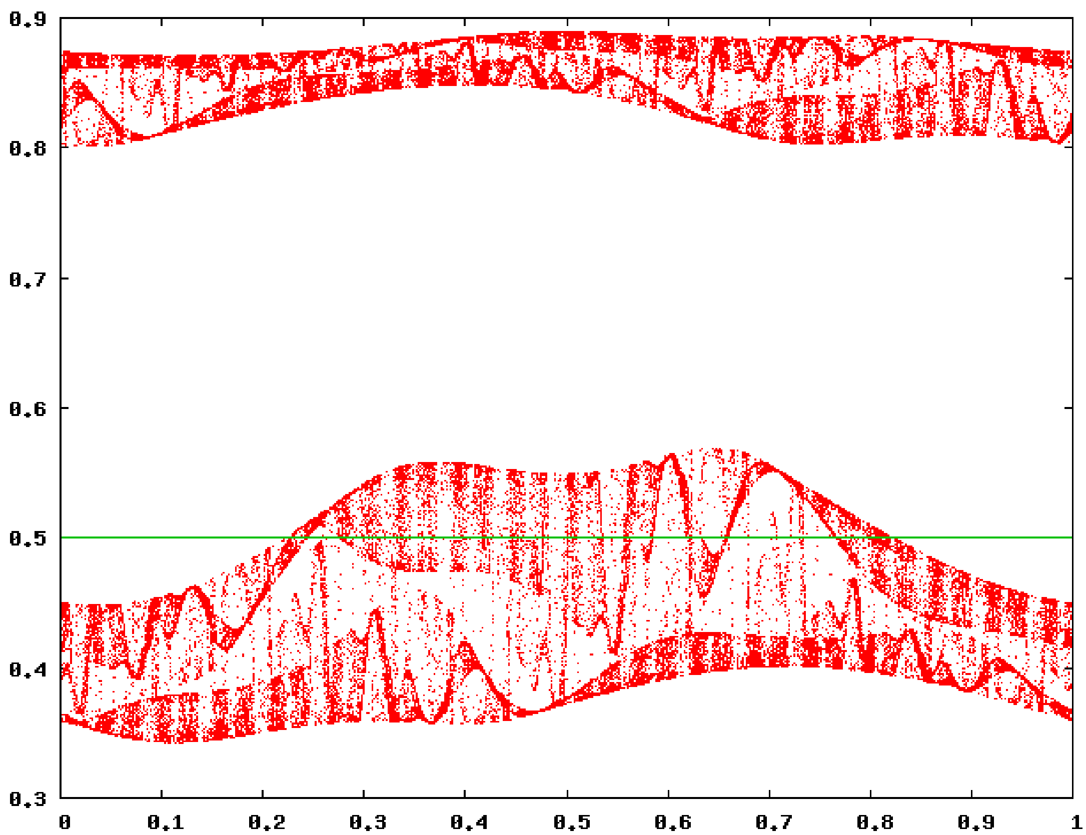




Paràmetres $\alpha = 3.525$ i $\varepsilon' = 0.1$. L'exponent de Liapunov és igual a -0.009929







Paràmetres $\alpha = 3.53$ i $\varepsilon' = 0.1$. L'exponent de Liapunov és igual a 0.019923

Això ens porta a formular la següent conjectura:

Conjectura 1 *Suposem que el paràmetre ε de la DLM està fixat (diferent de zero).*

Sigui $u_\alpha(\theta)$ una familia diferenciable de corbes atractores de periode n. Sigui $\Lambda(\alpha)$ el exponent de Liapunov de aquesta família de corbes. Suposem que existeix α_0 tal que $\Lambda(\alpha) < 0$, per $\alpha < \alpha_0$ (amb $|\alpha - \alpha_0|$ petit) i que $\lim_{\alpha \to \alpha^-} \Lambda(\alpha) = 0$. Llavors:

- *Si la corba atractora era reductible, la corba n-periodica passa a ser repulsora (però persisteix) per $\alpha > \alpha_0$, i apareix una nova corba atractora diferenciable de periode $2n$ per $\alpha > \alpha_0$.*

- *Si la corba atractora no era reductible, la corba fractalitza quan α tendeix a α_0 (i la corba es destruida). Per $\alpha_0 > \alpha$ apareix un atractor estrany.*

Estudi de DLM respecte el dos paràmetres

Ara volem estudiar la reductibilitat respecte els dos paràmetres (α, ε).

Suposarem que totes el conjunts invariants no caòtics són corbes invariants.

Un primer càlcul es usar el grau de no-reductibilitat. Donada $u(\theta)$ una corba invariant el grau de no-reductibilililitat de la corba es defineix com el número de zeros de $D_x f(u(\theta), \theta)$.

Per a un segon càlcul inclourem les corbes de doblament de periòde.

Diagrama de l'espai de paràmetres segons els grau de reductibilitat.

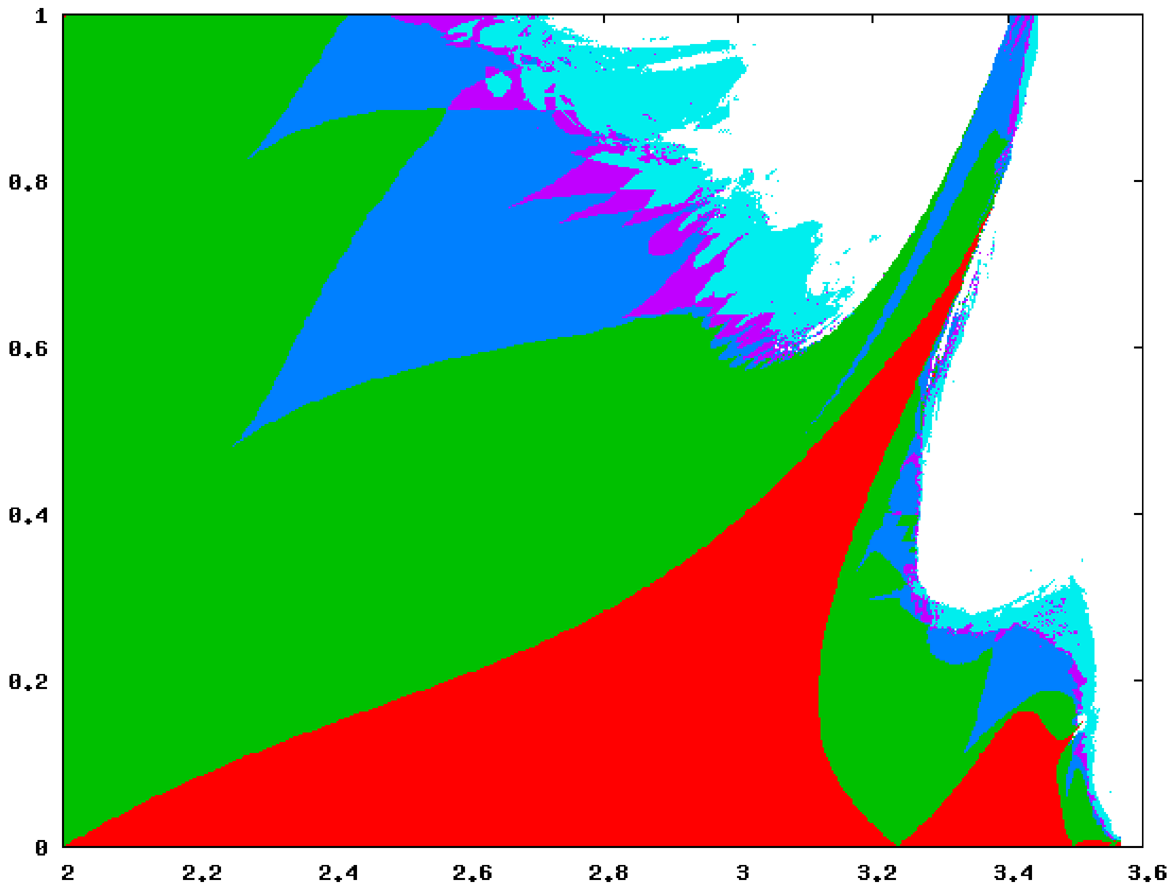
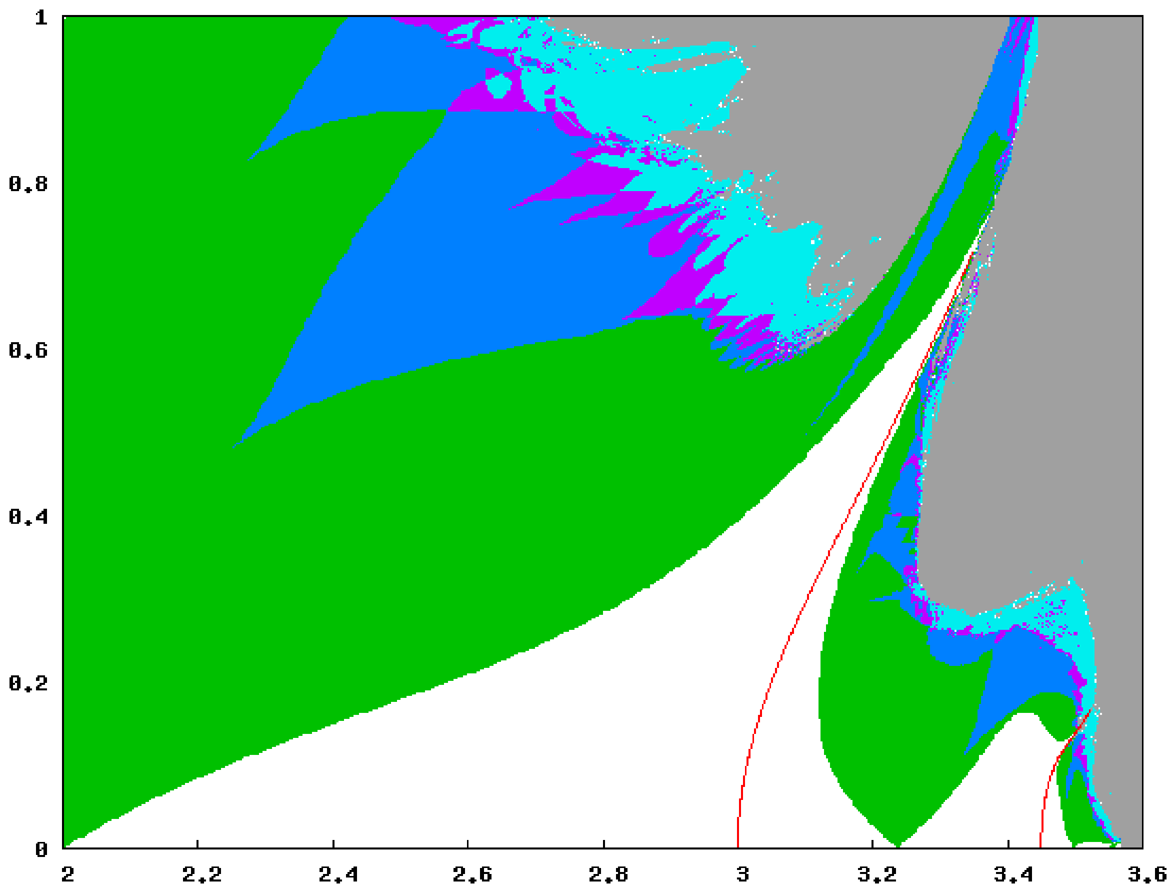
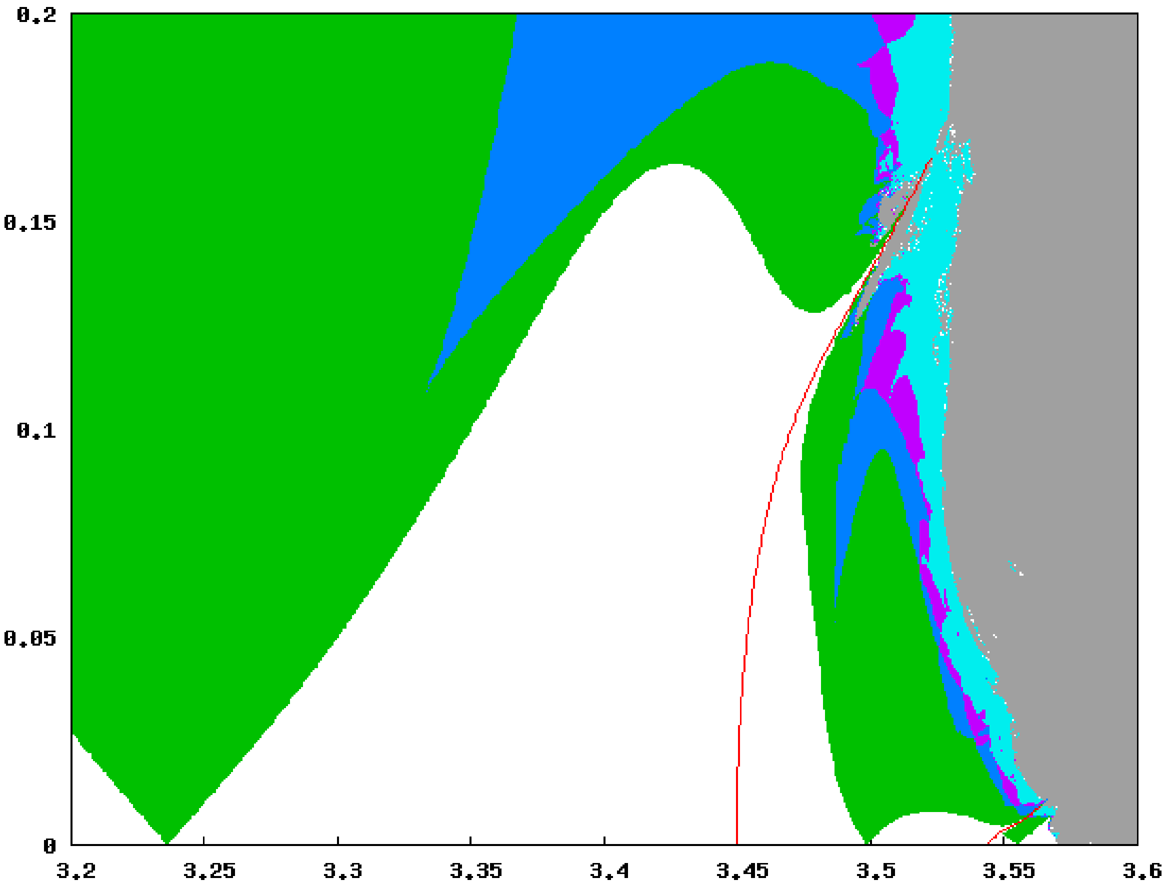


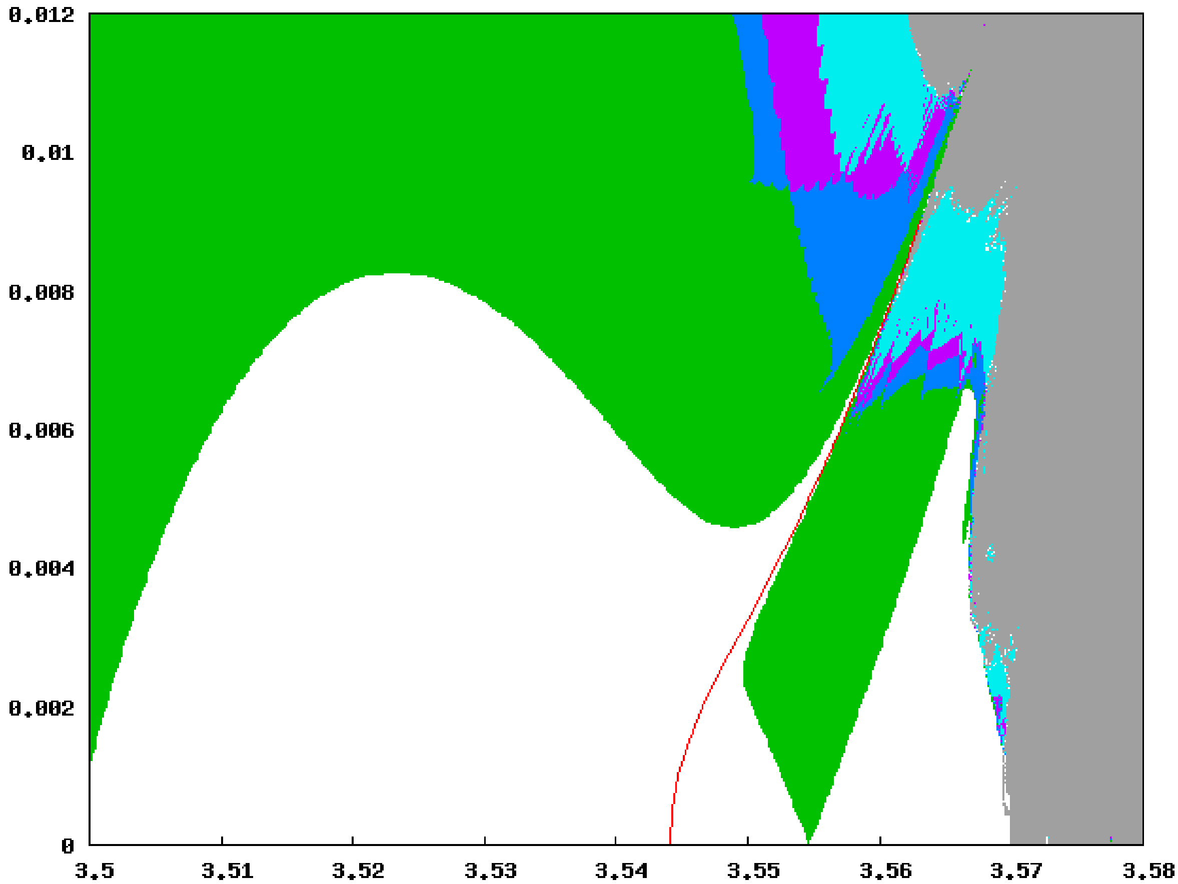
Diagrama de reductibilitat més corbes de doblament de període.



Una apliació del diagrama:



Una segona apliació:



El comportament observat, ens porta a proposar dues conjectures.

Una primera conjectura sobre el comportament de les corbes de doblament de periòde:

Conjectura 2 *Sigui α_k el valor del paràmetre α tal que el punt periòdic de l'aplicació logística (DLM amb $\varepsilon = 0$) dobla el seu periode de k a $2k$.*

Llavors, de cada valor dels paràmetres $(\alpha, \varepsilon) = (\alpha_k, 0)$ de la DLM, neix una corba (en l'espai de paràmetres) de doblament de periode del conjunt atractor.

A més, per $(\alpha, \varepsilon) = (\alpha_k, 0)$ el conjunt atractor es reductible; i la corba de doblament de periode es pot continuar sempre que el conjunt atractor sigui reductible.

Una segona conjectura sobre el comportament de les zones de reductibilitat:

Conjectura 3 *Sigui h_k el valor del paràmetre α tal que el punts k-periòdic de l'aplicació logistica (DLM amb $\varepsilon = 0$) és superatractor.*

Llavors, existeix un ε_0 suficient petit, i dues corbes en l'espai de paràmetres $h_k^+ : [0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}$ i $h_k^- : [0, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ de la forma $h_k^\pm(\varepsilon) = (s_k^\pm, \varepsilon)$ amb

$$s_k^\pm(0) = h_k.$$

Tals que per qualsevol valor dels paràmetres (α, ε) amb $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ and $\alpha \in [s_k^-(\varepsilon), s_k^+(\varepsilon)]$, els conjunt atractor de la DLM es una corba invariant no reductible.