# Acceleren les Matemàtiques les Telecomunicacions?

Joaquim Ortega Cerdà

13 de juliol de 2001

# El cable transatlàntic

En la primera meitat del segle XIX es va estendre per tota Europa i Nord Amèrica una xarxa de telègraf seguint les línies de ferrocarrils.

El senyal elèctric que es transmet al llarg d'un fil elèctric suspès en l'aire compleix aproximadament la equació d'ones:

$$c^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}.$$

En Faraday havia predit que un cable submarí presenta una major capacitància i que això produiria una retras en la transmissió del senyal elèctric al llarg d'un cable sota el mar. Això es va confirmar empíricament quant al 1850, Crampton va llençar un cable entre França i el Regne Unit.

La equació que governa el corrent en un cable submarí és aproximadament la equació de la calor:

$$K\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}.$$

# Comparem les solucions

Suposem que tenim un cable (de llargària molt gran) a voltatge 0 i en un dels extrems apliquem un senyal $f(t)$ $0 < t < a$. Volem saber com es transmet el corrent al llarg del cable. Tenim els dos teoremes següents:

**Teorema.** *Sigui* $\phi : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definida mitjançant*

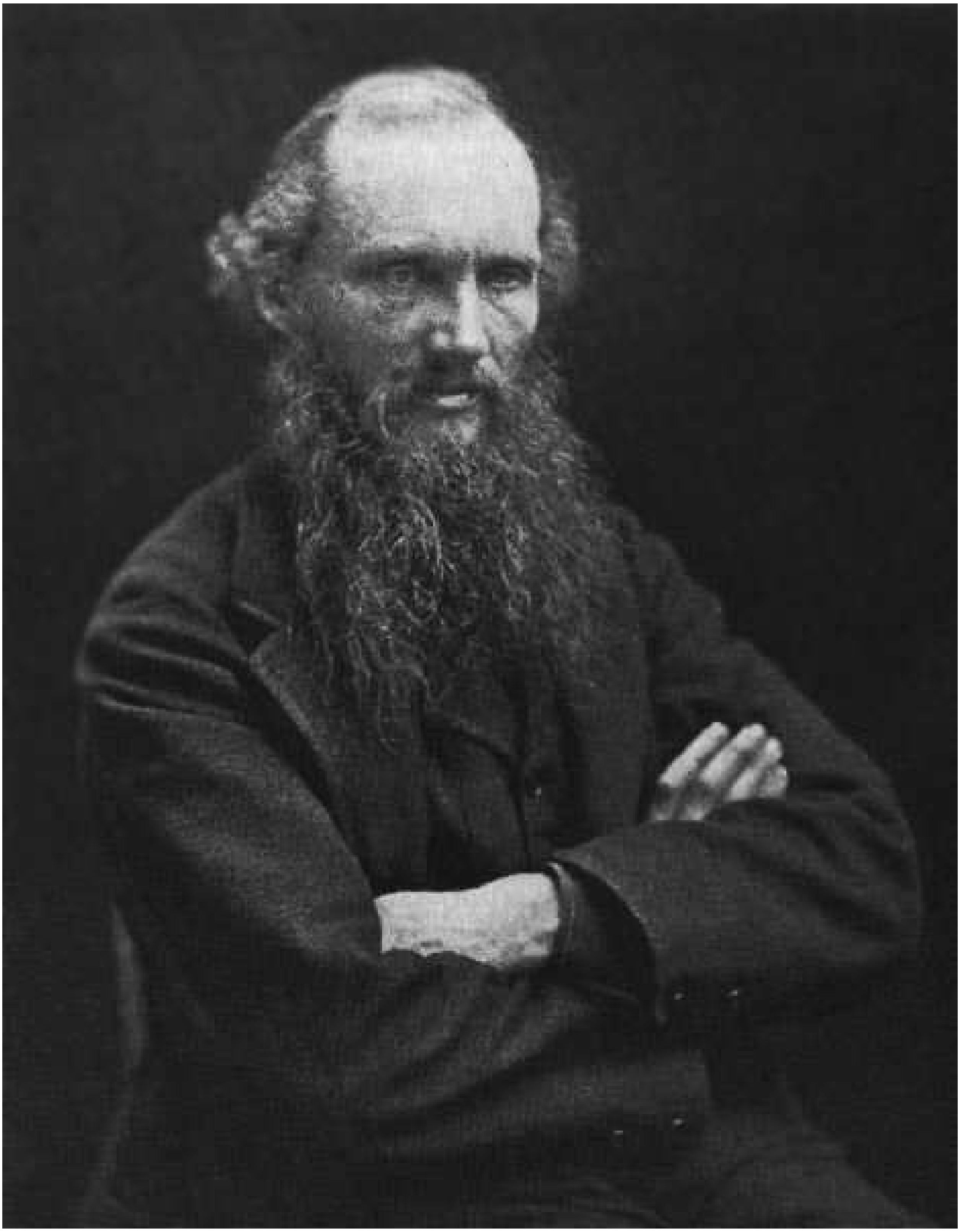
$$\phi(x,t) = \begin{cases} f(t - x/c) & \text{si } x \leq ct \\ 0 & \text{si } x \geq ct \end{cases}$$

*aleshores* $\phi$ *satisfà l'equació d'ones* $\phi_{xx} = \phi_{tt}$ *per a tot* $x, t > 0$. *També compleix les condicions de contorn* $\phi(x,0) = \phi_t(x,0) = 0$ *i* $\phi(0,t) = f(t)$ *per a tot* $t \geq 0$.

En l'equació d'ones un puls original $f(t)$ es desplaça a velocitat constant $c$ al llarg del cable sense perdre la forma ni la mida al llarg del recorregut.

Els senyals es poden enviar tant junts com l'operador pugui transmetre i el receptor distingir sense por de que es barregin (unes 40 paraules per minut en codi Morse).

# Lord Kelvin



# L'equació de la calor

Sir William Thomson (Lord Kelvin), va estudiar l'equació de la calor en una semirecta (motivat originalment per l'estudi de l'edat de la Terra) i els seus resultat van ser

**Teorema.** *Sigui* $\phi : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$*,*

$$\phi(x,t) = \int_0^t f(s) \frac{x}{2\sqrt{\pi K(t-s)^3}} e^{\frac{-x^2}{4K(t-s)}} \, ds$$

*aleshores* $\phi$ *satisfà l'equació de la calor* $\phi_t = K\phi_{xx}$ *per a tot* $x, t > 0$*. També compleix les condicions de contorn* $\phi(x, 0) = 0$ *i* $\phi(0, t) = f(t)$ *per a tot* $t > 0$*.*

D'aquest resultat Thomson va obtenir tot una col·lecció interessant de conseqüències. Suposem que emetem un puls inicial $f(t)$ amb $t \in [0, a]$ i $f(t) = 0$ si $t > a$. Quin és el comportament de la solució?

La solució té les següents propietats:

- Si $f(t) > 0$ per a tot $t \in (0, a)$, aleshores $\phi(x,t) > 0$ per a tot $t, x > 0$. Es a dir hi ha un efecte instantani en tots els punts. Tot i així, la solució satisfà

  $$|\phi(x,t)| \leq C \sup_{u \in \mathbb{R}} |f(u)| Kt/x^2.$$

  Per tant, si $x^2 \gg Kt$ aleshores el senyal és imperceptible.

- Si deixem passar prou temps $t \gg a$, aleshores la solució és comporta com

  $$\phi(x,t) \simeq P_{2K/x^2}(t) \int_0^a f(s)\, ds,$$

  on $P_\lambda(t) = \lambda P(\lambda t)$ i

  $$P(t) = \frac{e^{-1/2t}}{\sqrt{2\pi u^3}}.$$

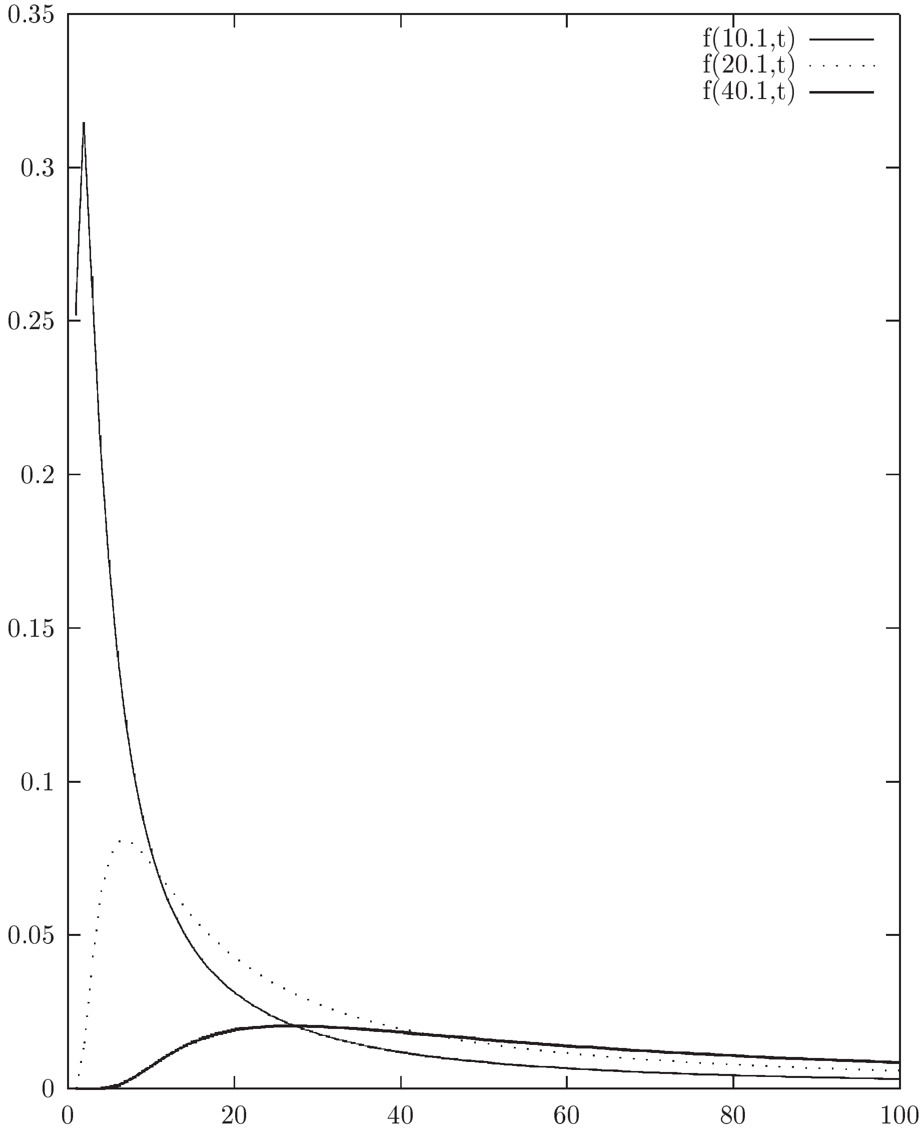
  Es a dir la forma del senyal $\phi$ quan $t \gg a$ no depèn de la forma de $f$.

- Finalment si $x^2 \gg Ka$ aleshores la forma de la senyal només depèn de $x$.

- Estudiant amb detall el nucli $P$ veiem que si $x^2 \gg Ka$ aleshores el senyal s'aixeca durant un temps proporcional a $x^2$ (i inversament proporcional a $K$) fins a un màxim que és inversament proporcional a $x^2$ (i proporcional a $K$) com al dibuix.

L'efecte que té això sobre un cable submarí molt llarg és que un puls elèctric enviat es llegirà de forma molt feble i durant una durada de temps $T$ proporcional a $x^2$. Si enviem una nova senyal abans de $T$ segons, es barreja amb la prèvia i no la podem distingir.

Al passar de cables submarins de 30 milles (França-UK) a un cable transatlàntic de 2000 milles els efectes de retard no es multipliquen per 50 sinó per 2500!



f(10.1,t)
f(20.1,t)
f(40.1,t)
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
20
40
60
80
100

# El primer intent

Cap al 1857 Cyrus Fields va engegar la empresa de tirar un cable que unís Europa i els EEUU.

L'assessor elèctric, en Whitehouse, tenia un model (compartit per en Faraday i en Morse) que el corrent elèctric es desplaçava com un líquid en una tuberia. El retard era degut a la dificultat d'omplir la tuberia. Per subsanar-ho van decidir de fer un cable molt prim i utilitzar voltatges molt elevats.

Això contradeia les observacions de Thomson que s'hi va oposar (sense èxit). Segons els càlculs que hem mostrat la $K$ (que depèn de la conductivitat) ha de ser molt gran per contrarestar els efectes de la distància. Això exigeix un cable gruixut i de molta puressa. El voltatge utilitzat és irrellevant.

Al 1858 (després de un primer intent on es va trencar el cable a meitat de camí) es va llençar el primer cable transatlàntic. El missatge de salutació de la Reina Victòria al President Buchanan de 100 paraules va trigar en ser transmès 16.5 hores. Al cap de 4 setmanes amb voltatges cada cop més elevats, el cable es va fondre.

## El segon intent

Aquest fracàs va costar la feina a en Whitehouse (i 350.000£ als accionistes de la companyia Field). Al 1864 es va redisenyar el cable segons els principis de Thomson.

El cable era tan pesat que només un vaixell el podia transportar (el “Great Eastern” dissenyat per anar de UK a Austràlia sense repostar i que el canal de Suez havia deixat fora de servei).

Simultaneament la Western Union va engegar un projecte alternatiu de tirar un cable a traves de Canada, Alaska, l’estret de Bering, Sibèria, Rusia i Europa Occidental.

En Thomson va dissenyar un galvanòmetre òptic extremadament sensible per captar els senyals elèctrics molt febles. El 28 de juliol de 1866 el cable va entrar en funcionament. La Western Union va abandonar el projecte després de llençar milers de kilometres en cable i perdre 3.000.000$.

## La revolució digital

La informació que es transmet a transmet a distància moltes vegades esta modelitzada per funcions amb propietats especials.

En particular, el so i la imatge no estan representades per funcions arbitraries sinó que tenen propietats molt especials que es poden estudiar i aprofitar per transmetre de forma més eficient.

Ens concentrem en el so. Cap a final dels anys 70 es va reemplaçar els sistemes de enregistrament de so analògics per digitals. Tots aquests sistemes estan fonamentats en el teorema (dels anys 30) de Shanon i Kotelnikov.

Sigui $f(t)$ la pressió de l'aire a l'oida en un instant de temps $t$. La oïda humana només percep sons de freqüència inferior a 20kHz. Per tant podem suposar que la nostra funció $f$ té transformada de Fourier $\hat{f}$ amb suport en un interval. També és raonable mesurar la mida de $f$ mitjançant la seva energia, és a dir

$$\|f\|^2 = \int |f(t)|^2 \, dt$$

## Shanon-Kotelnikov-Whitaker-...

Un teorema fonamental de Paley-Wiener identifica les senyals (funcions) d'energia finita (de $L^2$) i banda limitada (amb transformada de Fourier a suport en un interval) amb funcions holomorfes amb unes certes propietats de creixement. Això permet provar el teorema de Shanon que diu que

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{\sigma}\right) \frac{sin(\sigma(t - \frac{n\pi}{\sigma}))}{\sigma(t - \frac{n\pi}{\sigma})}$$

si $f \in L^2$ i el suport de $\widehat{f}$ és a $[-\sigma, \sigma]$.

Aquest teorema és bàsic perque permet passar de una senyal analògica $f$ a una senyal digital $f\left(\frac{n\pi}{\sigma}\right)$ i viceversa sense pèrdua d'informació i amb estabilitat.

Aquest teorema és el que està en la base dels mòdems, ràdios i televisions digitals, compact discs, telefonia digital, etc...

## Algunes conseqüències

Bàsicament diu que si tenim una senyal amb freqüència limitada en un interval, hem de "samplejar" la senyal amb una freqüència proporcional a la llargària de l'interval.

De forma inversa, en una senyal analògica d'un ampla de banda donat no hi ha més que una quantitat fixada d'informació que podem transmetre.

La quantitat d'informació requerida pel teorema de Shanon per amagatzemar sons és enorme. Si volem transmetre música és recomanable utilitzar un mostreig de 44.1 kHz (correspon a una freqüència màxima de 22.05kHz). Si cada mostra la recollim en un numero de 16 bits i utilitzem dos canals (estereo) això ens dona 1.4 megabits per segon, que és la forma de amagatzemar la música en un CD per exemple.

Això no és gens eficient per transmetre la informació a distància.

# Compressió digital del so

Naturalment, hi ha diversos intents de comprimir el so de forma més eficient. Ens centrarem en un dels que ha tingut més èxit el MPEG audio/layer III. Són els populars fitxers mp3.

És un algorisme establert pel Motion Experts Group (MPEG) a començaments dels noranta i és un estàndard (ISO) de compressió de so d'alta fidelitat.

És un algorisme en el que el senyal reconstruït no coincideix amb l'original, però és imperceptible des de un punt de vista sensorial. Els experiments realitzats han mostrat que en una compressió 6-1, en condicions òptimes d'audició, els experts en so eren incapaços de distingir entre el so original i el so comprimit.

És un estàndard complex amb molts element matemàtics. Hi ha d'altres estàndards que utilitzen les mateixes eines matemàtiques. És de destacar el format lliure Vorvis/ogg que és igual d'eficient i sense problemes de patents. Veieu

http://www.xiph.org/ogg/vorbis

La primera peça del esquema de compressió és obtenir un bon anàlisi del senyal. Per senyals auditives melòdiques és molt adequat l'anàlisi de Fourier en finestra.

Això consisteix bàsicament en analitzar el senyal donant en cada instant de temps el contingut que té de cada freqüència. Com s'aconsegueix això? Prenem una finestra $w(x)$ molt concentrada al voltant de l'origen, (típicament $w(t) = e^{-t^2}$).

Prenem el nostre senyal original $f(t)$ i el multipliquem per la finestra centrada en $s$, $f(t)w(t-s)$. D'aquesta manera nomes veiem la part de $f$ al voltant de $s$. Ara prenem transformada de Fourier de la funció resultant.

$$G(\zeta, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)w(t-s)e^{-i\zeta t}\, dt.$$

La funció $G$ s'interpreta com un pentagrama. Dona la intensitat de la nota de freqüència $\zeta$ a l'instant $s$.

Tenim fórmules de reconstrucció de $f$ a partir de la seva transformada $G$. Són degudes a Gabor (inventor de l'holografia).

Fins i tot hi ha fórmules de reconstrucció de $f$ a partir d'una successió discreta de valors $f(t_k, \zeta_n)$ com la fórmula de Shanon. La fórmula de reconstrucció té un aspecte:

$$f(t) = \sum_{k,n} f(t_k, \zeta_n) g(t, k, n).$$

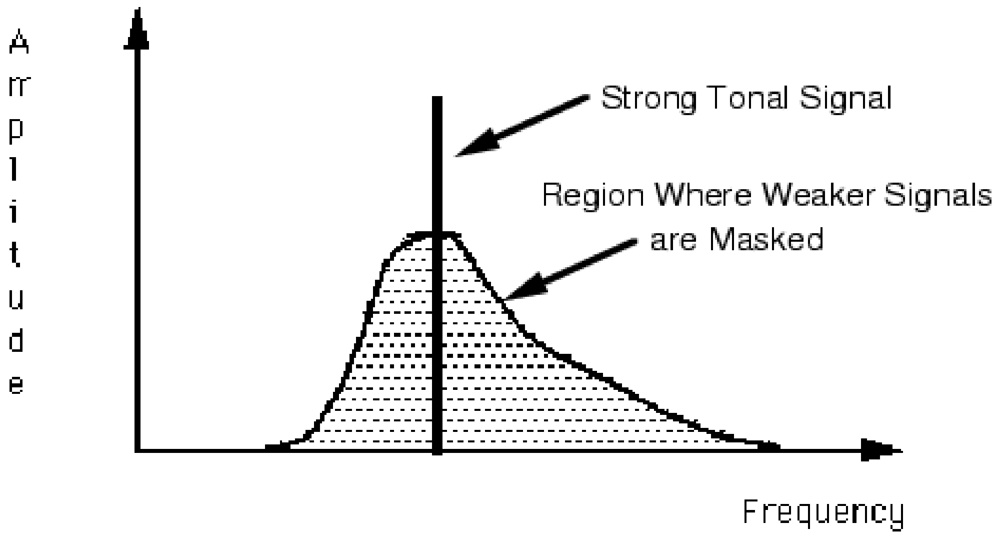
La funció de finestra és òptima des de el punt de vista en que compensa la localització en el temps i la resolució en la freqüència. Això és una forma del principi d'incertessa. D'aquesta forma podem truncar la suma amb pocs termes.

No guardarem tots els coeficients. Es posa un valor ("treshold") a partir del qual considerarem que val 0.

Aquest és el primer pas de la compressió. Hem triat una bona "base" (les funcions $g(t, k, n)$) en la qual s'expressa be el senyal $f(t)$.

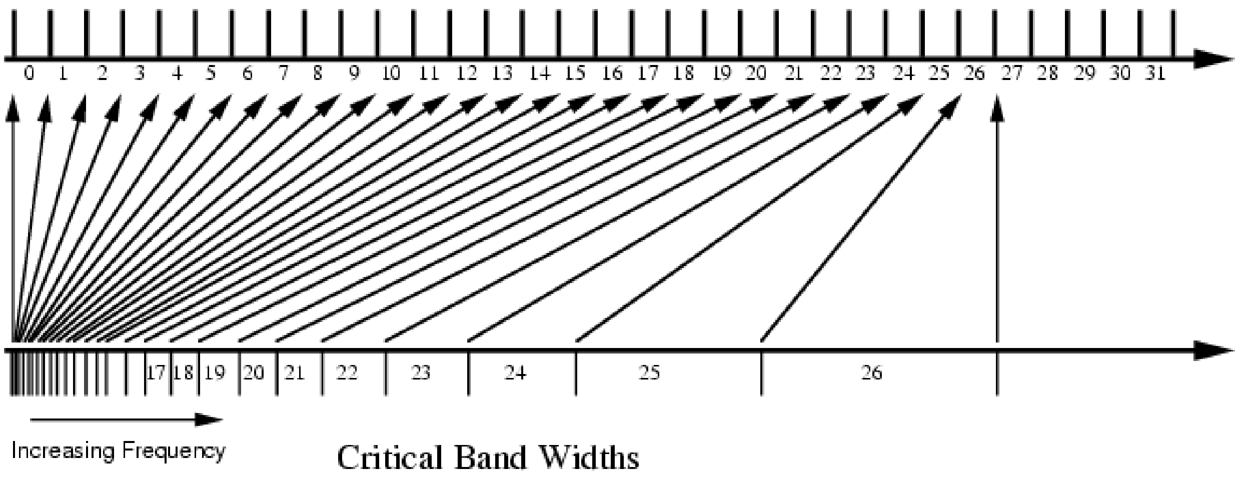
# Defectes humans

En un primer pas hem eliminat molts coeficients gracies a que la base s'adapta be al nostre problema. Ara ens trobem amb un segon problema: No podem amagatzemar els coeficients amb una precisió infinita! És el problema de la quantització. Fem una partició de $\mathbb{R}$ en intervals i assignem a cada interval un numero. Un primer guany és que la partició en intervals no es fa de manera uniforme sinó que els cubells de quantització són més grans segons augmenta l'amplitud. En segon lloc, tenim una quantitat de bits per segon que hem d'administrar entre tots els coeficients. No els asignarem de forma equitativa.



# Enmascarament

Si sotmetem l'oida a un estímul de gran amplada es fa menys sensible a estímuls més petits de natura similar. Per tant si fem un error de quantització elevat al voltant d'una senyal fortament tonal no el percebrem. Es calculen, mitjançant experiments les bandes crítiques corresponents a l'oida humana:




Els elements de la base tenen una bona concentració en freqüència, dins de les bandes crítiques i per tant podem saber quan hi ha una forta amplitud en una d'elles. En un cas així assignem pocs bits als coeficients dels altres vectors de la base al voltant seu dins de la banda crítica.

# Defectes

Aquest mètode no està lliure de defectes. El més gran és que quan es produeix l'atac d'una nota, emmascarem els errors al voltant seu. El problema està en que els elements que triem de les bases no tenen una concentració temporal molt elevada (volíem concentració frequencial també). Per tant abans de que s'ataqui la nota produïm uns errors grans que no queden emmascarats. S'anomenen pre-ecos i s'han d'eliminar a posteriori amb un procés ad-hoc.

Els sons percusius, explosius tenen una mala concentració en freqüència i una elevada concentració en el temps. En un cas així és millor abandonar la transformada de Fourier en finestra i adoptar una transformada wavelet. Hi ha alguns codificadors experimentals en aquest sentit.

# Un últim refinament

Finalment, una última millora és que a cada coeficient cuantitzat li assignem un codi per amagatzemarlo. Això no ho fem de forma arbitraria. Assignem els codis més curts als coeficients que apareixen amb freqüència més elevada. Són els anomenats codis de entropia o de Huffman. Hi ha una forma de codificar això de manera que els missatges no són ambigus i de manera que la esperança de la llargària del codi resultant sigui la més curta possible.

De fet és el que la llengua “natural” fa de manera espontània. Reservem les paraules més curtes a les d’ús més habitual.

Les probabilitats de cada símbol es calculen a partir d’una tira de $N$ símbols i s’aplica en els $N$ següents. Es a dir, el codi es va adaptant al so d’entrada.

## Observacions finals

El procés de compressió que hem descrit és fortament no lineal. En particular el procés d'enmascarament és molt costos en temps de cpu. Però això és veritat només en el procés de codificació. La decodificació és molt més elemental.

La compressió així realitzada és molt sensible als errors de transmissió. Per evitar-ho, s'ha d'introduir una certa redundància que permeti incrementar la seguretat en la transmissió sense augmentar molt la llargària del codi. Aquests codis utilitzen eines sofisticades de geometria algebraica!

# Referencies


S. Mallat, “A wavelet tour of signal processing”, Academic Press, New York, 1998.

D. Pan, *Digital Audio Compression*, Digital Technical Journal, **5** (1993).

T. Korner, “Fourier Analysis”, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.