El principi de incertesa

Joaquim Ortega-Cerdà

28 de febrer de 1998

Índex

1 Resultats clàssics **1**

1.1 Anàlisi de Fourier bàsica 1

1.1.1 El principi de Heisenberg 2

1.2 Espectre semiacotat. El teorema de F. i M. Riesz 5

1.2.1 Fórmula de Poisson-Jensen 5

1.2.2 El cas de la recta 11

1.2.3 Funcions externes i la integral logarítmica 12

1.3 Espectre acotat. El teorema de Paley-Wiener 13

1.3.1 Preliminars 13

1.3.2 Demostració de Paley-Wiener 15

1.4 Espectre de mesura finita 16

2 Variants quantitatives i qualitatives **21**

2.0.1 Corol·laris i variants 30

2.0.2 Funcions amb zeros profunds 32

2.1 Desigualtats d'incertesa logarítmiques 35

2.2 Miscel·lania 39

2.2.1 Funcions d'ambigüitat del radar 39

2.2.2 D'altres aplicacions 40

Capítol 1

Resultats clàssics

En aquest capítol recordarem les definicions i algunes de les propietats bàsiques de la transfomada de Fourier. Veurem el principi d'incertesa de Heisenberg i alguna de les seves variants locals com un model del tipus de resultats que ens interessen. També estudiarem dos teoremes clàssics, el teorema dels germans Riesz i el de Paley-Wiener que podem interpretar com a variants cualitatives del principi d'incertesa.

1.1 Anàlisi de Fourier bàsica

El nostre objectiu es concentrarà en l'estudi de funcions d'una variable. Seran funcions definides be en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Recordem les defincions bàsiques.

Definició. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ definim la seva transformada de Fourier $\hat{f}$ com

$$\mathcal{F}(f)(\zeta) = \hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\zeta}\, dx, \qquad \zeta \in \mathbb{R}.$$

Si f és una funció periódica en $\mathbb{R}$ de perióde T amb $f \in L^1([0,T])$ definim els seus coeficients de Fourier $c(k)$ com

$$c(k) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-2\pi ikx/T}\, dx, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Podem estendre la definició de transformada de Fourier a mesures complexes (de variaci'o finita) de forma natural. Per exemple, si μ es una mesura en $\mathbb{R}$ es defineix

$$\mathcal{F}(\mu)(\zeta) = \hat{\mu}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\zeta}\, d\mu(x), \qquad \zeta \in \mathbb{R}.$$

De manera anàloga podem definir la sèrie de Fourier d'una mesura en $\mathbb{T}$. Recordem ara alguna de les propietats bàsiques de la transformada de Fourier que lliga el creixement de f amb la regularitat de $\hat{f}$:

Proposició 1.1. *Si $f \in \mathcal{C}^\nu(\mathbb{R})$ i $x^j f^{(k)}(x)$ és acotada per a $0 \leq j \leq \mu,\ 0 \leq k \leq \nu$, amb $\mu \geq 2$, aleshores la transformada de Fourier de f pertany a $\mathcal{C}^{\mu-2}(\mathbb{R})$ i compleix*

$$|\zeta^j \hat{f}^{(k)}(\zeta)| \leq \frac{1}{\pi} \sup(1+x^2)|\frac{\partial^j}{(\partial x)^j}(x^k f(x))|,$$

quan $k \leq \mu - 2$ i $j \leq \nu$. Si, a més, $\nu \geq 2$, llavors $\hat{f} \in L^1$ i val la fórmula d'inversió:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\zeta) e^{ix\zeta}\, d\zeta = (\hat{f})\check{}(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

i la fórmula de Parseval:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\zeta)|^2\, d\zeta.$$

De forma anàloga tenim en el cas de sèries de Fourier la següent proposició:

Proposició 1.2. *Si $f \in \mathcal{C}^\nu(\mathbb{R})$ i f és periòdica de periode T, llavors els coeficients de Fourier $c(k)$ estan acotats de la manera següent:*

$$|c(k)| \leq (T/2\pi|k|)^\mu \sup|f^{(\mu)}|.$$

Si $\mu \geq 2$ aleshores

$$f(x) = \sum_{\in\mathbb{Z}} c(k) e^{2\pi kx/T},$$

amb convergència uniforme i absoluta, i a més, és vàlida la fórmula de Parseval

$$\int_0^T |f(x)|^2\, dx = T\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c(k)|^2.$$

Gracies a la igualtat de Parseval podem estendre la definció de la transformada de Fourier de $L^1(X) \cap L^2(X)$ a tot $L^2(X)$ com una isometria. En efecte donada una funció de $L^2(\mathbb{R})$, llavors $\mathcal{X}_{[-R,R]} f \to f$ en L^2. Per tant gracies al teorema de Parseval

$$\int_{-R}^{R} f(x) e^{-ix\zeta}\, dx$$

es convergent en L^2 quan $R \to \infty$. El seu límit és per definició la transformada de Fourier de f.

1.1.1 El principi de Heisenberg

Abans de enunciar el principi de Heisenberg necessitem veure com es comporta la transfomada de Fourier respecte traslacions i modulacions. Per a qualsevol $a, b \in \mathbb{R}$ definim

$$f_{a,b}(x) = e^{ibx} f(x-a).$$

Aleshores

$$(f_{a,b})\check{}(\zeta) = e^{iab}(\hat{f})_{b,-a}(\zeta). \tag{1.1}$$

És a dir l'aplicació $f \to f_{a,b}$ preserva la norma L^p de f i de $\hat{f}$ mentres deplaça el centre de masses de f i de $\hat{f}$ en a i b respectivament. Recordem que si μ es una mesura de probabilitat en $\mathbb{R}$ definim la variància de μ com

$$V(\mu) = \inf_{a\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 d\mu(x).$$

Si $V(\mu) < \infty$, llavors s'assoleix quan $a = M(\mu) = \int_{\mathbb{R}} x\, d\mu(x)$.

Teorema 1.3. *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ i $\|f\|_2 = 1$, llavors*

$$V(|f|^2)V(\frac{1}{2\pi}|\hat{f}|^2) \geq \frac{1}{8\pi},$$

en altre paraules per a qualsevol $f \in L^2(\mathbb{R})$ tenim,

$$\int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 |f(x)|^2\, dx \int_{\mathbb{R}} (\zeta - b)^2 |\hat{f}(\zeta)|^2\, d\zeta \geq \frac{\|f\|_2^4}{4}.$$

La igualtat només s'assoleix quan $f = Ce^{ibx}e^{-\gamma(x-a)^2}$, $C \in \mathbb{C}$ i $\gamma > 0$.

Demostració. Podem suposar d'entrada que $a = b = 0$ gracies a 1.1. També suposarem que $xf(x) \in L^2$ i $\zeta\hat{f}(\zeta) \in L^2$. D'aquesta última suposició deduïm que f i $\hat{f} \in L^1$ i per tant f és continua amb $f(x) \to 0$ si $x \to \infty$. Per un altre part com $(f')\check{}(\zeta) = i\zeta\hat{f}(\zeta)$, llavors tenim que $f' \in L^2$. Per tant, com que $(|f|^2)' = 2\,\mathrm{Re}\, f\bar{f}'$ tenim que per a tot $-\infty < c < d < \infty$

$$2\,\mathrm{Re} \int_c^d xf(x)\overline{f'(x)}\, dx = x|f(x)|^2\Big|_c^d - \int_c^d |f(x)|^2\, dx.$$

Com que f, xf i $f' \in L^2$, llavors el límit de $x|f(x)|^2$ quan $x \to \pm\infty$ existeix i ha de ser 0 doncs $f \in L^2$. Finalment hem vist que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = 2\,\mathrm{Im} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\overline{(\zeta\hat{f}(\zeta))\check{}(x)}\, dx.$$

Per tant,

$$\|f\|_2^4 \leq 4 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2\, dx \int_{\mathbb{R}} \zeta^2 |\hat{f}(\zeta)|^2\, d\zeta.$$

La igualtat s'assoleix només quan $xf = \gamma f'$, és a dir si $f = Ke^{\gamma x^2}$, on $\gamma < 0$, doncs $f \in L^2$. ♣

Des del punt de vista de la teoria del senyal aquest resultat és una mica insatisfactori, doncs si tenim una funció real $f \in L^2(\mathbb{R})$ llavors la seva transfomada de Fourier $\hat{f}$ satisfà $\hat{f}(-\zeta) = \overline{\hat{f}(\zeta)}$ i per tant $|\hat{f}|$ és una funció parell. Per tant si $\hat{f}$ està fortament localitzada entorn d'un punt ζ_0 també ho està entorn del seu oposat $-\zeta_0$. Peró si ζ_0 és gran, aleshores la desigualtat de Heisenberg aporta molt poca informació, doncs la variancia pot ser molt gran encara que els pics siguin molt estrets. Una alternativa al principi de Heisenberg és els anomenats principis locals de incertesa. Per exemple el següent teorema de Faris [Far78]

Teorema 1.4. *Existeix una constant K tal que per a tot conjunt mesurable $E \in \mathbb{R}$ es compleix*

$$\int_E |\hat{f}|^2 \leq K|E| \|f\|_2 \|xf\|_2. \tag{1.2}$$

Demostració. Sempre podem suposar que $\|f\|_2$ i $\|xf\|_2$ són fínits i que per tant $f \in L^1(\mathbb{R})$ i $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Podem acotar trivialment de la següent manera

$$\int_E |\hat{f}|^2 \leq |E| \|\hat{f}\|_\infty^2 \leq |E| \|f\|_1^2.$$

Així que el teorema serà cert si demostrem que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f| \, dx \right)^2 \lesssim \|f\|_2 \|xf\|_2.$$

És més fàcil demostrar una desigualtat aditiva aparentment més feble. Veurem com aquesta desigualtat s'automillora i obtenim la desigualtat multiplicativa. En efecte, la desigualtat de Cauchy-Swartz ens dona

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f| \, dx \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)|f|^2 \, dx \int_R (1+x^2)^{-1} \, dx = C \left(\int_R |f|^2 + \int x^2 |f|^2 \, dx \right).$$

Aquesta és la desigualtat aditiva de la que parlavem. Apliquem aquesta desigualtat a la funció $f_a = f(ax)$. Si fem els calculs resulta que $\|f_a\|_p = a^{-1/p} \|f\|_p$ i $\|tf_a\|_2 = a^{-3/2} \|tf\|_2$. Per tant, tenim que per a tot $a > 0$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f| \, dx \right)^2 \lesssim \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)|f|^2 \, dx \lesssim a \|f\|_2^2 + \frac{1}{a} \|xf\|_2^2.$$

L'expressió de la dreta té un mínim quan $a = \|xf\|_2 / \|f\|$ i per aquest valor tenim la desigualtat multiplicativa. ♣

Veiem com aquesta desigualtat de tipus local es qualitativament millor que la de Heisenberg, doncs a partir d'una desigualtat local podem probar una de global (encara que no obtenim la constant óptima). En efecte,

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 \, d\zeta = \int_{-b}^{b} |\hat{f}(\zeta)|^2 \, d\zeta + \int_{|\zeta| > b} |\hat{f}(\zeta)|^2 \, d\zeta \leq Cb \|f\|_2 \|xf\|_2 + b^{-2} \|\zeta \hat{f}\|_2^2.$$

Aquesta desigualtat és certa per a qualsevol $b > 0$. Calculem el mínim que s'assoleix quan

$$b = \left(\frac{2\|\zeta \hat{f}\|_2^2}{C\|f\|_2 \|xf\|_2} \right)^{1/3}$$

i obtenim la desigualtat de Heisenberg (amb pitjor constant).

1.2 Espectre semiacotat. El teorema de F. i M. Riesz

En aquest teorema estudiarem com poden ser les mesures tals que el seu espectre (el suport de la seva transformada de Fourier) és semiacotat, es a dir que està contingut en $[A, +\infty)$ o $(-\infty, A]$. Sempre ens podem reduir al cas en que $A = 0$.

Donarem dues versions, una en el torus $\mathbb{T}$ i una altre en $\mathbb{R}$ (per veure més detalls de la demostració, dues bones referencies són [Rud70] i [Gar81]).

Teorema 1.5. *Sigui μ una mesura complexa no nul·la en $\mathbb{R}$ de forma que $\hat{\mu}(x) = 0$ si $x \in (-\infty, 0)$, aleshores μ i la mesura de Lebesgue són mutuament absolutament contínues. És a dir, $d\mu = f dm$ amb $f \in L^1(dm)$ i a més f no es pot anul·lar en un conjunt de mesura positiva.*

La corresponent versió en el disc d'aquest resultat és la següent

Teorema 1.6. *Sigui μ una mesura complexa no nul·la en $\mathbb{T}$ de forma que $\hat{\mu}(n) = 0$ si $n < 0$, aleshores μ i la mesura de Lebesgue són mutuament absolutament contínues. És a dir, $d\mu = f dm$ amb $f \in L^1(dm)$ i a més f no es pot anul·lar en un conjunt de mesura positiva.*

Farem la demostració d'aquest segon teorema. Utilitzarem tècniques de variable complexa. Necessitem fer un breu estudi dels espais $H^p(\mathbb{D})$ $(1 \leq p)$.

Comencem per la definició:

Definició. Diem que una funció $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ pertany a $H^p(\mathbb{D})$ si compleix

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty.$$

Una primera eina que utilitzarem en la demostració és la fórmula de Poisson-Jensen que veiem a continuació:

1.2.1 Fórmula de Poisson-Jensen

Recordem que tota funció subharmònica u compleix que el seu laplacià Δu (entès en sentit distribucional si $u \notin \mathcal{C}^2$) és una mesura positiva. Per aquestes funcions tenim el següent resultat

Teorema 1.7. *Sigui u una funció subharmònica en el disc $D(0, R)$. Aleshores,*

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{D(0,r)} \log \frac{r}{|z|} \Delta u(z), \qquad \forall r < R. \tag{1.3}$$

En particular, $\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta$ és una funció creixent per $0 < r < R$.

Demostració. Per fer la demostració, suposem inicialment que $u \in \mathcal{C}^2$ en un entorn de $D(0, r)$. En aquest cas si apliquem la fórmula de Green en la corona $\varepsilon < |z| < r$ tenim

$$-\int_{\varepsilon<|z|<r} \log \frac{r}{|z|} \Delta u(z)\, dm(z) = -\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta + \int_0^{2\pi} u(\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta + \mathcal{O}(\varepsilon \log \varepsilon).$$

Si ara fem tendir $\varepsilon \to 0$, obtenim el resultat desitjat. En el cas general podem aproximar u per una funcio $u_\varepsilon = u \star \psi_\varepsilon$, on ψ_ε és una aproximació de la identitat amb suport petit. ♣

L'aplicació principal que donarem en aquesta fórmula és en el cas en que $u = \log|f|$. Veiem que efectivament u és subharmònica i calculem el seu laplacià. Suposem inicialment que $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$ i que f té un únic zero en 0 de multiplicitat m, és a dir, $f = z^m g$. Per a qualsevol $\phi \in \mathcal{C}_K^\infty(D(0,R))$ apliquem la fórmula de Green en la corona $D(0,R) \setminus D(0,\varepsilon)$ i tenim

$$\begin{aligned}\int_{|z|>\varepsilon} \log|f|\Delta\phi &= \int_{|z|=\varepsilon} \left(\phi\frac{\partial}{\partial n}\log|f| - \log|f|\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) d\sigma = \\ &= \int_{|z|=\varepsilon} \left(\phi\frac{\partial}{\partial n}(\log|z|^m) - \frac{\partial\phi}{\partial n}\log|z|^m\right) d\sigma + \mathcal{O}(\varepsilon) = \\ &= m\int_0^{2\pi} \phi(\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta + \mathcal{O}(\varepsilon\log\varepsilon) \to 2\pi m\phi(0).\end{aligned}$$

Hem vist, doncs que $\Delta\log|f| = 2\pi m\delta_0$ en sentit distribucional. En cas de que f tingui més zeros fem un petit disc entorn de cadascun d'ells i tenim que $\Delta\log|f| = 2\pi\sum\delta_{a_n}$ on els a_n són els zeros de f comptats amb multiplicitat.

Si tenim una funció holomorfa $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$ amb $f(0) \neq 0$ i apliquem (1.3) resulta el que normalment s'anomena fórmula de Jensen

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta - \sum_{|a_n|<r} \log\frac{r}{|a_n|}, \qquad 0 < r < R. \tag{1.4}$$

on els a_n són els zeros de f repetits d'acord amb la multitplicitat.

Nosaltres necessitem descriure com són els zeros de les funcions de $\mathcal{H}^p(\mathbb{D})$. La fórmula de Jensen suggereix introduir una classe més àmplia de funcions holomorfes: la classe de Nevanlinna.

Definició. Diem que una funció $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ és de la classe de Nevanlinna que denotem per $\mathcal{N}(\mathbb{D})$ si

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\, d\theta < \infty.$$

Notem que com $\log^+|f|$ és subharmonica llavors el suprem de la definició es pot canviar per un límit quan $r \to 1$ doncs les integrals per capes són creixents (el mateix comentari es pot fer en el cas de les funcions de $H^p(\mathbb{D})$). De forma elemental tenim les següents inclusions: $H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^q(\mathbb{D}) \subset \mathcal{N}(\mathbb{D})$ si $p > q$.

La caracterització de les successions de zeros de les funcions de $H^p(\mathbb{D})$ és la mateixa per a tots els espais.

Teorema 1.8.
- *Si $f \in \mathcal{N}(\mathbb{D})$ i $\{a_n\}_1^\infty$ són els seus zeros repetits amb multiplicitat, aleshores $\sum_n 1 - |a_n| < +\infty$.*
- *Si tenim una successió $\{a_n\}$ de punts del disc que compleix la condició de Blaschke: $\sum_n 1 - |a_n| < +\infty$, aleshores el producte de Blaschke:*

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^\infty \frac{|a_n|}{a_n}\frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z},$$

es convergent i defineix una funció $B \in H^\infty(\mathbb{D})$ amb zeros exactament $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

Demostració. Per demostrar la primera afirmació podem suposar que $f(0) \neq 0$, si f té un zero d'ordre k a l'origen considerem la funció $g = f/z^k$ i repetim l'argument amb g enlloc de f. Dividint per $f(0)$ podem suposar que $f(0) = 1$. En aquest cas si apliquem la fórmula de Jensen (1.4) obtenim

$$\sum_{|a_n|<r} \log \frac{r}{|a_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta \leq C.$$

Si fem tendir $r \to 1$ tenim finalment

$$\sum_{a_n \in \mathbb{D}} \log \frac{1}{|a_n|} < C,$$

que és equivalent a la condició de Blaschke. Veiem la segona part del teorema.

Cada factor de B té modul més petit que 1 (de fet és exactament 1 en la frontera), per tant el producte (si convergeix) té modul més petit que 1. Només hem de comprovar la convergència, doncs pel teorema de Hurwitz, els zeros és clar que seran $\{a_n\}$. Per asegurar la convergència, hem de veure que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \right|$$

és convergent. Peró manipulant la suma tenim que per a $|z| < r$,

$$\left| \frac{(1 - \bar{a}_n z) a_n - |a_n| a_n - z|a_n|}{a_n (1 - \bar{a}_n z)} \right| = (1 - |a_n|) \left| \frac{a_n + |a_n| z}{(1 - \bar{a}_n z) a_n} \right| \leq \frac{1 + r}{1 - r} (1 - |a_n|).$$

És a dir, la condició de Blaschke ens assegura la convergència uniforme sobre compactes, que és el que necessitavem. ♣

La propietat bàsica dels productes de Blaschke que utilitzarem és la següent. Donada una funció $f \in H^p$ agafem els zeros de f i construïm el producte de Blaschke corresponent, llavors f/B és una funció holomorfa que compleix $\|f/B\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$. En efecte, sempre tenim que $|B| \leq 1$ i per tant $|f/B| \geq |f|$. Comprovem que també es compleix que $\|f/B\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^p}$. Per fer-ho, considerem els productes finits B_m que s'obtenen al prendre m factors dels que defineixen el producte de Blaschke. Com que $|B_m(z)| \to 1$ uniformement quan $|z| \to 1$, aleshores tenim $\|f/B_m\|_{H_p} \leq \|f\|_{H_p}$. Si passem al límit la desigualtat es preserva.

Amb la caracterització dels zeros i els productes de Blaschke demostrarem la següent propietat que ens permetrà reduir-nos al cas d'espais de Hilbert.

Proposició 1.9. *Tota funció de $H^1(\mathbb{D})$ es pot factoritzar com a producte de dues funcions de $H^2(\mathbb{D})$. És a dir $H^1(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{D}) \cdot H^2(\mathbb{D})$.*

Demostració. Donada una $f \in H^1(\mathbb{D})$ sigui B el producte de Blaschke associat als seus zeros. Llavors f/B és una funció de $H^1(\mathbb{D})$ sense zeros. Per tant existeix una g holomorfa tal que $g^2 = f/B$. A més $g \in H^2(\mathbb{D})$. Llavors $f = (Bg)g$, i tant g com Bg són de $H^2(\mathbb{D})$. ♣

Donada una mesura μ en $\mathbb{T}$ podem definir la integral de Poisson i la integral de Cauchy d'aquesta mesura. Defineixen una funció harmònica i holomorfa respectivament en l'interior del disc. Veurem que en el cas de mesures que tenen transformada de Fourier amb suport semiacotat, coincideixen. Les definicions són les següents:

Definició. Donada μ una mesura complexa en $\mathbb{T}$, definim la integral de Cauchy de μ com

$$C(\mu)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta d\mu(\zeta)}{z-\zeta},$$

i en el cas que $d\mu = f d\sigma$, aleshores la integral es pot expressar com una integral de linia $C(f)(z) = \oint_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{z-\zeta}$. Si diem $z = re^{i\theta}$, definim la integral de Poisson com

$$P(\mu)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|1-z\bar{\zeta}|^2}\, d\mu(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) d\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\, d\mu(t),$$

on $P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$.

Donat que $(\zeta-z)^{-1} = \sum_{n\geq 0} z^n/\zeta^{n+1}$, tenim que els coeficients de Taylor de $C(\mu)$ són $\hat{\mu}(n)$. Per un altre part desenvolupant en sèrie de potencies el nucli de Poisson tenim

$$P(\mu)(re^{i\theta}) = \int_{\mathbb{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)}\, d\mu(t), \quad \forall r < 1.$$

Comparant les dues sèries veiem que $C(\mu) = P(\mu)$ si i només si $\hat{\mu}(n) = 0$ quan $n < 0$, és a dir quan ens trobem en les hipótesis del teorema. En aquest cas la transformada de Poisson (que és més fàcil d'estudiar) és holomorfa.

Necessitem les següents propietats elementals de la transformada de Poisson:

Proposició 1.10. *La transformada de Poisson satisfà les següents propietats:*

(a) *Per a tot* $0 < r < 1$ *es compleix* $\|P(\mu)(rz)\|_1 \leq |\mu|$ *i* $\|P(f)(rz)\|_p \leq \|f\|_p$, *si* $1 \leq p \leq \infty$.

(b) *Si* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, *aleshores* $\lim_{r\to 1} \|P(f)(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})\|_\infty = 0$, *i si* $f \in L^p(\mathbb{T})$, *aleshores* $\lim_{r\to 1} \|P(f)(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})\|_p = 0$

(c) *Si* $f \in L^1(\mathbb{T})$, *aleshores* $\lim_{r\to 1} P(f)(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ *per a gairebé tota* θ.

Demostració. La part (a) és immediata, es dedueix del fet que $P[1] = 1$ (veiem el desenvolupament en sèrie de potències) i de la desigualtat de Hölder.

Demostrem a continuació la primera part de (b). Hem de veure que per a qualsevol $\theta \in [0, 2\pi]$, $Pf(z) \to f(e^{i\theta})$ si $z \to e^{i\theta}$. Per a demostrar-ho, ja sabem en primer lloc que $P1 = 1$. Amb això ens podem reduir al cas en que $f(e^{i\theta}) = 0$, doncs en cas contrari considerem la funció $g(e^{it}) = f(e^{it}) - f(e^{i\theta})$. Aquesta funció satisfà $g(e^{i\theta}) = 0$ i si veiem que $Pg(z) \to 0$ quan z tendeix a $e^{i\theta}$ aleshores $Pg = Pf - f(e^{i\theta}) \to 0$ i ja tenim el cas general. Suposem doncs que $f(e^{i\theta}) = 0$. Llavors existeix un interval I_1 de la circumferència centrat en $e^{i\theta}$ de forma que

$|f(e^{it})| < \varepsilon/2$ si $t \in I_1$. Sigui I_2 l'interval complementari en la circumferència. Si diem χ_{I_i} a la funció característica de l'interval $I_i,\ i = 1,2$ aleshores $Pf(z) = P[f\chi_{I_1}](z) + P[f\chi_{I_2}](z)$. Veiem que cadascun d'aquests dos sumands es més petit que $\varepsilon/2$ quan z està prou a prop de $e^{i\theta}$. El primer és el més senzill, doncs $|f\chi_{I_1}(e^{it})| < \varepsilon/2$ per a tot t i per tant per a tot $z \in \mathbb{D}$ tenim

$$|P[f\chi_{I_1}](z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f\chi_{I_1}(e^{it})| \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt \leq \varepsilon/2.$$

Per a l'altre integral sabem que f és contínua en ∂D i per tant el seu mòdul té un màxim M i podem acotar així:

$$|P[f\chi_{I_2}](z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{I_2} |f(e^{it})| \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt \leq M\frac{1}{2\pi}\int_{I_2} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt$$

Ara be, quan z està molt a prop de $e^{i\theta}$, aleshores $|e^{it}-z|$ està acotat inferiorment doncs $e^{it} \in I_2$, es a dir està lluny de $e^{i\theta}$. Per un altre part el numerador tendeix cap a zero si $z \to e^{i\theta}$, per tant per z prou a prop tenim $|P[f\chi_{I_2}](z)| \leq \varepsilon/2$. Ja hem demostrat la primera part de (b) si ara ho combinem amb (a) ens dona la segona part de (b).

Finalment anem a demostrar (c) que és el cas més delicat. Es coneix com a teorema de Fatou. En efecte, com $f \in L^1(\mathbb{T})$ sabem que per a gairebe qualsevol punt $\theta \in [-\pi,\pi]$,

$$f(\theta) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} |f(e^{it})|\,dt}{2\varepsilon} = \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} |f(e^{it})|\,dt}{2\varepsilon}.$$

Agafem un d'aquests punts, demostrarem que si f compleix $\int_{\theta-s}^{\theta+s} |f|\,dt < A2s$ per a $s < \delta$ aleshores

$$P[f](re^{i\theta}) < A + \frac{1}{2\pi}P_r(\delta)\|f\|_1, \tag{1.5}$$

es a dir, que $\limsup_{t\to 1} P[f](re^{i\theta}) \leq A$. Això demostra el lema de Fatou.

Veiem (1.5). La integral de Poisson és

$$P[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P_r(\theta-t)f(t)\,dt.$$

Trenquem la integral en dos parts. Si $\delta \leq |\theta - t| \leq \pi$, llavors $P_r(\theta-t) \leq P_r(\delta)$ i ja està be. L'altre tros (la integral en $I(\delta) = (\theta-\delta, \theta+\delta)$ la acotem mitjançant una integració per parts. Integrem la funció $P_r'(s)f(t)$ en la regió $\{(s,t),\ \theta - s < t < \theta + s,\ 0 < s < \delta\}$ i obtenim

$$\int_0^\delta \left(\int_{I(s)} f(t)\,dt\right) P_r'(s)\,ds = \int_{I(\delta)} [P_r(\delta) - P_r(\theta-t)]f(t)\,dt.$$

Com que $P_r'(s) < 0$ si $s \in (0,\pi)$, llavors

$$\int_{I(\delta)} P_r(\theta-t)f(t)\,dt = P_r(\delta)\int_{I(\delta)} f(t)\,dt - \int_0^\delta \left(\int_{I(s)} f(t)\,dt\right) P_r'(s)\,ds <$$

$$< 2A\left(\delta P_r(\delta) - \int_0^\delta sP_r'(s)\,ds\right) = 2A\int_0^\delta P_r(s)\,ds < 2\pi A.$$

♣

Acabem ara la demostració del teorema. Sigui μ una mesura amb coeficients de Fourier negatius 0, llavors definim $f(z) = C(\mu)(z)$ que com hem vist coincideix en aquest cas amb $P(\mu)(z)$. Per la propietat (a) de la proposició 1.10 resulta que $f \in H^1(\mathbb{D})$. Ja sabem que tota funció f de $H^1(\mathbb{D})$ descomposa en producte de dues funcions de $H^2(\mathbb{D})$, $f = gh$. Per a cada funció $g \in H^2(\mathbb{D})$ existeix els seus valors frontera $g^* \in L^2(\mathbb{T})$. En efecte, si diem $g_r(z) = g(rz)$ aleshores $\|g_r\|_2^2 = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$ on a_n són els coeficients de la sèrie de Taylor de g. Com $g \in H^2(\mathbb{D})$ això vol dir que $\sum_n |a_n|^2 < +\infty$. Per el teorema de Parseval, existeix una funció $g^* \in L^2(\mathbb{T})$ tal que els seus coeficients de Fourier són a_n. Finalment $g = C(g^*)$ i per la propietat (b) de la proposició tenim que $g_r \to g^*$ en $L^2(\mathbb{T})$. Ara transportem aquest resultat a $L^1(\mathbb{T})$. Definim $f^* = g^* h^*$, llavors $f \in L^1(\mathbb{T})$ i a més

$$\begin{aligned}\|f_r - f^*\|_1 = \|g_r h_r - g^* h^*\|_1 \leq \|(g_r - g^*)h_r\|_1 + \|(h_r - h)g^*\|_1 \leq \\ \leq \|g_r - g^*\|_2 \|h_r\|_2 + \|h_r - h^*\|_2 \|g^*\|_2 \to 0 \qquad \text{si } r \to 1.\end{aligned}$$

Com que tenim convergència en norma L^1 els coeficients de Fourier convergeixen i resulta que

$$\hat{f}^*(n) = \lim_{r\to 1} \hat{f}_r(n) = \lim_{r\to 1} \hat{\mu}(n) r^n = \hat{\mu}(n).$$

Ja hem vist doncs que $d\mu = f^* dm$ i hem demostrat la primera part del teorema. De fet en aquesta demostració hem vist que la "traça" de les funcions de $H^1(\mathbb{D})$ en la frontera són funcions de $L^1(\mathbb{T})$ amb coeficients de Fourier negatius nuls i que hi ha una correspondència bijectiva entre les funcions de $H^1(\mathbb{D})$ i les seves traces a la frontera (que de vegades es coneixen com $H^1(\mathbb{T})$).

Queda per demostrar la segona part del teorema. Per veure la segona part observem que gràcies a la fórmula de Poisson-Jensen tenim que per a qualsevol $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(0) \neq 0$ es compleix

$$\log|f(0)| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^- |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \qquad \text{si } r < 1.$$

Si utilitzem la part (c) de la proposició 1.10 i la desigualtat de Fatou llavors

$$\begin{aligned}\log|f(0)| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^- |f^*(e^{i\theta})|\, d\theta \leq \log|f(0)| + \liminf_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^- |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f^*(e^{i\theta})|\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|\, d\theta.\end{aligned}$$

Aleshores si tenim una funció $f \in H^1(\mathbb{D})$ amb $f(0) \neq 0$ resulta que $\int_{\mathbb{T}} \log^- |f^*|\, d\sigma < \infty$. Si $f(0) = 0$, llavors prenem $g = f/z^k$ de forma que $g \in H^1$, $g(0) \neq 0$ i $|g^*| = |f^*|$ i apliquem el mateix argument. D'aquesta manera hem vist que per a qualsevol $f \in H^1(\mathbb{D})$ amb f no identicament zero es compleix que $\log|f^*| \in L^1(\mathbb{T})$. En particular, el conjunt de zeros de f^* té mesura 0 i hem demostrat la segona part del teorema dels germans Riesz. ♣

1.2.2 El cas de la recta

La demostració del teorema de F. i M. Riesz en el cas de mesures a la recta amb espectre semiacotat és anàloga al cas del cercle. Podem definir els espais $H^p(\mathbb{C}^+)$ format per funcions holomorfes en el semiplà superior de forma que

$$\|f\|_{H^p}^p = \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p \, dx < +\infty.$$

A diferéncia del cas del disc són importants en la definició de la norma tant els valors petits de y com els valors grans. També es defineix la classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$ al semiplà com les funcions holomorfes tals que

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} \log^+ |f(x+iy)| \frac{dx}{1+x^2} < +\infty.$$

Es demostra que $H^p(\mathbb{C}^+) \subset \mathcal{N}$. En canvi, no tenim la inclusió entre els espais H^p com teniem al disc (per exemple $1 \in H^\infty(\mathbb{C}^+)$, $1 \notin H^1(\mathbb{C}^+)$). Podem caracteritzar els zeros de la classe de H^p mitjançant la condició de Blaschke al semiplà: $\sum \frac{\operatorname{Im} a_n}{1+|a_n|^2} < +\infty$ i tenim productes de Blaschke que permeten dividir els zeros de una funció de H^p, preservant la norma. Per tant, podem factoritzar $H^1 = H^2 H^2$. Com en el cas del disc es defineix la integral de Cauchy d'una mesura com

$$C[\mu](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t-z}$$

i la integral de Poisson

$$P[\mu](z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Im} z}{|z-t|^2} \, d\mu(t)$$

que compleix les propietats análogues a la proposició 1.10. També com abans $C[\mu] = P[\mu]$ si i només si el espectre de μ és semiacotat. En efecte,

$$\begin{aligned} C[\mu](w) &= \int_0^{+\infty} \hat{\mu}(t) e^{itw} \, dt \qquad (\operatorname{Im} w > 0), \\ C[\mu](w) &= \int_{-\infty}^{0} \hat{\mu}(t) e^{itw} \, dt \qquad (\operatorname{Im} w < 0), \\ P[\mu](w) &= C[\mu](w) - C[\mu](\bar{w}). \end{aligned}$$

Per $p > 1$ és senzill comprovar que si $f \in H^p$, f té valors frontera $f^* \in L^p(\mathbb{R})$. Per $p = 1$, utilitzem com en el cas del disc la factorització $H^1 = H^2 H^2$.

En resum, el que veiem es que hi ha una bijecció entre el espai $H^p(\mathbb{C}^+)$ i les seves traces a la frontera: l'espai $H^p(\mathbb{R})$ de les funcions $f \in L^p(\mathbb{R})$ amb $\hat{f}(x) = 0$ quan $x < 0$. A més si $f \in H^p(\mathbb{C}^+) \subset \mathcal{N}(\mathbb{C}^+)$ es compleix

$$\int_{\mathbb{R}} \log^- |f(x)| \frac{dx}{1+x^2} < +\infty.$$

1.2.3 Funcions externes i la integral logarítmica

Veiem a continuació com la condició $\log|f| \in L^1(\mathbb{T})$ ($\log|f(t)|/(1+t^2) \in L^1(\mathbb{R})$ en el cas de la recta) és la mesura més acurada que podem donar sobre com es pot fer petita una funció de H^1.

Proposició 1.11. *Sigui h una funció positiva i integrable en $\mathbb{T}$. Aleshores h és el módul d'una funció de $H^1(\mathbb{D})$ si i només si $\log h \in L^1(\mathbb{T})$.*

Demostració. Ja hem provat una direcció. Anem a demostrar l'altre. Sigui

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log h(t)\, dt\right).$$

Aleshores f és holomorfa i $|f| = \exp(P[\log h])$. Veiem que pertany a $H^1(\mathbb{D})$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(P[\log h](re^{i\theta}))\, d\theta.$$

A més, com que $d\mu = \frac{1}{2\pi}P_r(\theta - t)\, dt$ és una mesura de probabilitat tenim la desigualtat de Jensen:

$$\exp \int g\, d\mu \leq \int e^g\, d\mu.$$

Aleshores, $\exp(P[\log h](re^{i\theta})) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)h(t)\, dt$. Finalment hem vist que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\, dt.$$

Un cop sabem que $f \in H^1$, aleshores tenim limit radial gairebe per tot i

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} \exp(P[\log h](re^{i\theta})) = h(\theta)$$

per gairebe tota θ. ♣

El corresponent enunciat en el semiplà és el següent:

Proposició 1.12. *Sigui $w \in L^1(\mathbb{R})$ una funció positiva tal que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\log^- w(t)}{1+t^2} < +\infty$, aleshores exiteix una funció $f \in H^1(\mathbb{R})$ tal que $|f| = w$.*

Demostració. La demostració és la mateixa que en el cas del disc. Només cal considerar

$$f(\zeta) = \exp\left(\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log w(t) \frac{t\zeta+1}{t-\zeta}\frac{dt}{1+t^2}\right).$$

i repetir els mateixos arguments. ♣

El principi d'incertesa que hem vist és doncs el següent. Si una mesura complexa μ està localitzada en un semieix ($\mu(t) = 0$ si $t < 0$) i $|\hat{\mu}(t)| \leq w(t)$ llavors podem deduir que $\mu = 0$ només quan la integral logarítmica de w sigui divergent ($\int_{\mathbb{R}} \frac{\log^- w(t)}{1+t^2}\, dt = \infty$). En cas contrari es diu que w és una majorant admissible. Veurem que la aparició de la integral logarítmica és recurrent en diverses formulacions del principi d'incertesa.

1.3 Espectre acotat. El teorema de Paley-Wiener

Tractem ara el cas en que tenim una funció $f \in L^2(\mathbb{R})$ amb transformada de Fourier $\hat{f}$ que te suport en un interval $[-a, a]$. Que podem dir de $\hat{f}$?. Ja sabem que serà la traça d'una funció de H^2 (doncs l'espectre és semiacotat). Podem ser més precissos gracies al teorema de Paley-Wiener. Per enunciar-ho hem de considerar el espai $\mathcal{E}_a$ de funcions enteres de tipus finit a que consiteix en funcions enteres f que satisfan la desigualtat $|f(w)| \leq e^{(a+\varepsilon)|w|}$ quan $w \to \infty$ per a qualsevol $\varepsilon > 0$.

Teorema 1.13 (Paley-Wiener). *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ llavors el suport de $\hat{f}$ pertany a $[-a, a]$ si i només si f coincideix gairebe per tot amb una funció $f \in \mathcal{E}_a$.*

1.3.1 Preliminars

La prova que donarem no és la més curta possible, peró és bastant "natural" i dona peu a introduir algun nou resultat que necessitarem més endavant com el principi de Phragmen-Lindelöf (per a més informació veieu per exemple [You80]) Sota aquest nom es coneixen una série de generalitzacions principi del màxim clàssic a dominis no acotats. Cal, naturalment, introduïr alguna nova hipotesi. Suposarem un control del creixement a priori. Veiem les dues versions que necessitem. Una és per a funcions holomorfes i un altre per a funcions subharmóniques.

Definició. Es defineix l'ordre d'una funció holomorfa f en un obert Ω no acotat com

$$\rho(f) = \inf\{\lambda \geq 0;\ |f(w)| \lesssim \exp(|w|^\lambda)\ |w| \to \infty,\ w \in \Omega\}.$$

Teorema 1.14 (Phragmen-Lindelöf). *Sigui $\rho \in [1/2, +\infty)$ i Ω un con d'apertura π/ρ. Donada f una funció holomorfa en l'interior de Ω i continua fins a la frontera amb ordre $\rho(f) < \rho$ es compleix* $\sup_\Omega |f| \leq \sup_{\partial\Omega} |f|$.

Demostració. Suposem sense perdua de generalitat que el con Ω té vertex a l'origen i és simétric respecte l'eix real, es a dir,

$$\Omega = \{w \in \mathbb{C};\ w = |w|e^{i\theta},\ \theta \in (-\frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{2\rho})\}.$$

Prenem dos numeros a, b tals que $\rho(f) < a < b < \rho$ i prenem la funció auxiliar $h = \exp(-\delta z^b)$, on z^b és una branca definida a tot $\mathbb{C}$ tret dels reals negatius i δ un numero positiu fixat. Quant $w \in \partial\Omega$ aleshores $|h(w)| = \exp(-\delta|w|^b \cos(\pi b/2\rho)) \leq 1$. Per tant si diem $g = fh$, aleshores $\sup_{\partial\Omega} |g| \leq \sup_{\partial\Omega} |f| = C$. Si $w = Re^{it}$ amb $|t| \leq \pi/2\rho$ i prenem R molt gran, de manera que

$$|g(w)| \leq \left(\sup_{t \in [-\pi/2\rho, \pi/2\rho]} |f(Re^it)| \right) \exp(-\delta R^b \cos bt) < \exp(R^a - \delta R^b \cos \frac{b\pi}{2\rho}) < C.$$

Podem aplicar el principi del màxim ordinari a la regió $\Omega \cap D(0, R)$ i tenim que $|fh(w)| \leq \sup_{\partial\Omega} |f|$ per a tot $w \in \Omega$. Si fem $\delta \to 0$ obtenim el teorema ♣

Corol·lari 1.15. *Si f és una funció entera de tipus exponencial a i $|f(x)| \leq M$ quan $x \in \mathbb{R}$, aleshores $f(z) \leq Me^{a|\operatorname{Im} z|}$ per a tot $z \in \mathbb{C}$.*

Demostració. Considerem la funció $g(z) = f(z)e^{i(a+\varepsilon)z}$. Aquesta funció és d'ordre 1 i té módul acotat per M en l'eix real i acotat en l'eix imaginari positiu (de fet $g(iy) \to 0$ si $y \to +\infty$). Per tant si apliquem el principi de Phragmen-Lindelöf a g en el primer i el segon quadrant tenim que $|g(z)| \leq M$ (el máxim a la frontera s'assoleix a l'eix real i no pas a l'eix imaginari). Per tant $|f(z)| \leq Me^{(a+\varepsilon)\operatorname{Im} z}$ si $\operatorname{Im} z > 0$. Fem tendir $\varepsilon \to 0$ i resulta $|f(z)| \leq Me^{a \operatorname{Im} z}$. En el tercer i quart quadrant procedim analogament. ♣

Donarem ara una propietat molt natural dels espais de Paley Wiener, la norma la podem calcular al llarg de qualsevol recta parallela a les abcises, no només al llarg de l'eix real. Per demostrar aquest teorema necessitem una variant de Phragmen-Lindelöf per a funcions subharmóniques que donarem al llarg de la demostració.

Teorema 1.16 (Plancherel-Pólya). *Si f és una funció entera de tipus exponencial τ i per algun $p < 0$, es compleix*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx < \infty,$$

aleshores

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p \, dx \leq e^{p\tau|y|} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \, dx.$$

La prova d'aquest teorema requereix dos lemes tipus Phragmen-Lindelöf. Sigui g una funció contínua en $\overline{\mathbb{C}^+}$ i analítica en l'interior. Sigui $G(z) = \int_{-a}^{a} |g(z+t)|^p \, dt$. Esta clar que G és contínua en $\overline{\mathbb{C}^+}$ i subharmónica en l'interior.

Lema 1.17. *Sigui g una funció de tipus exponencial en el semiplà $\overline{\mathbb{C}^+}$ i suposem que les següents quantitats són finites*

$$M = \sup_{\mathbb{R}} G(x) \text{ i } N = \sup_{y>0} G(iy).$$

Aleshores $G(z) \leq \max(M, N)$.

Demostració. Per hipotesis, $|g(z)| \leq Ae^{B|z|}$ en $\mathbb{C}^+$. Fixem un $\varepsilon > 0$ i considerem la funció auxiliar g_ε definida com $g_\varepsilon(z) = g(z)\exp[-\varepsilon(\lambda(z+a))^{3/2}]$ on $\lambda = e^{-i\pi/4}$. L'exponent que apareix pot tenir dues possibles determinacions en $\mathbb{C}^+$. Triem la que te part real negativa en $x > -a,\ y \geq 0$. Definim ara $G_\varepsilon = \int_{-a}^{a} |g_\varepsilon(z+t)|^p \, dt$. Anem a acotar el seu tamany. Si estimem g_ε en $x > -a$, $y \geq 0$ resulta

$$|g_\varepsilon(z)| \leq Ae^{B|z| - \varepsilon\gamma|z+a|^{3/2}},$$

on $\gamma = \cos 3\pi/8$ i a més de forma trivial $|g_e(z)| \leq |g(z)|$. Per tant $|G_\varepsilon(z)| \leq |G(z)|$ si $x, y \geq 0$ i en particular $G_\varepsilon(x) \leq M$ si $x \geq 0$ i $G_\varepsilon(iy) \leq N$ si $y \geq 0$. Ara apliquem el principi del màxim clàssic en la regió $\Omega = \{\operatorname{Im} z \geq 0,\ \operatorname{Re} z \geq 0,\ |z| \leq R\}$, amb R molt gran de forma que el màxim no s'assoleixi en l'arc $|z| = R$ (això es possible gracies a la cota de $|g_\varepsilon|$. Obtenim, doncs que $G_\varepsilon \leq \max(M, N)$ i fent tendir $\varepsilon \to 0$ obtenim el que volíem. ♣

Lema 1.18. *Si a més de les hipótesis del lema anterior, suposem que* $\lim_{y\to\infty} g(x+iy) = 0$ *uniformement en* $x \in [-a, a]$*, aleshores* $G(z) \leq M$ *si* $z \in \mathbb{C}^+$*.*

Demostració. En efecte, per la hipótesi $\sup G(iy)$ s'assoleix a l'interior de $\mathbb{C}^+$ (o al 0). No pot ser que $N > M$ doncs en aquest cas el suprem d'una funció subharmónica s'assoliria a l'interior i això demostra el lema. ♣

Acabem la demostració del teorema de Plancherel-Pólya. Suposarem sense perdua de generalitat que $y > 0$. Fixem $\varepsilon > 0$ i considerem la funció $g(z) = f(z)e^{i(\tau+\varepsilon)z}$. Aquesta funció satisfà les hipotesis dels dos lemes per a qualsevol $a > 0$, de manera que per a qualsevol $y > 0$, $G(iy) \leq M < \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p\,dx$. Ara fem tendir $a \to 0$ i després $\varepsilon \to 0$ i tenim el teorema demostrat. ♣

Finalment un últim lema que necessitem és el següent:

Lema 1.19. *Si* $f \in PW_\tau$ *aleshores* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$*. En particular* f *restringida a* $\mathbb{R}$ *és acotada.*

Demostració. Veurem un resultat més fort. Demostrarem que donada una successió de nombres reals $\{\lambda_n\}$ tals que $\inf_{m\neq n} |\lambda_n - \lambda_m| > 2$ aleshores,

$$\sum_n |f(\lambda_n)|^2 \lesssim \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx.$$

En efecte, com que $|f|^2$ és una funció subharmónica, llavors

$$|f(\lambda_n)|^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{D(\lambda_n,1)} |f(z)|^2\,dm(z)$$

i com que els discos $D(\lambda_n, 1)$ són disjunts,

$$\sum_n |f(\lambda_n)|^2 \lesssim \int_{-1<|\operatorname{Im} z|<1} |f(z)|^2\,dm(z). \tag{1.6}$$

Finalment, degut al teorema de Plancherel-Polya tenim que aquesta integral en una banda està acotada per la integral de $|f|^2$ sobre $\mathbb{R}$ com voliem. ♣

1.3.2 Demostració de Paley-Wiener

Sigui f una funció entera que pertany a $\mathcal{E}_a$ i tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx < +\infty$. Demostrarem que $\hat{f} \in L^2$ s'anul·la gairebe per a tota x fora de $[-a, a]$. Prenem la funció auxiliar $g(z) = e^{iaz}f(z)$. Està clar que $g \in L^2(\mathbb{R})$ amb $\|g\|_2 = \|f\|_2$. Si ara calculem $\int_{\mathbb{R}} |g(x+iy)|^2\,dx$ per $y > 0$, tenim pel teorema de Plancherel-Polya:

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x+iy)|^2\,dx \leq e^{-2ay}\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx.$$

Es a dir la funció $g \in H^2(\mathbb{C}^+)$. Pel teorema de M. i F. Riesz resulta que $\hat{g}(x) = 0$ si $x < 0$. Això vol dir que $\hat{f}(x) = 0$ si $x < -a$. Podem repetir l'argument amb $\tilde{f}(z) = f(-z)$ i tenim aleshores que $\hat{f}(x) = 0$ si $x > a$. ♣

Nota. Hem utilitzat el teorema de M. i F. Riesz en el cas que $g \in H^2(\mathbb{C}^+)$. Com la demostració que hem fet en detall és en el cas del disc i en el nostre cas sabem més coses de g donarem una demostració directa de $\hat{g}(x) < 0$.

Necessitem el següent lema:

Lema 1.20. *Si u és harmónica i acotada en $\mathbb{C}^+$ i contínua en $\overline{\mathbb{C}^+}$, aleshores $u = P[u^*]$, on $u^* = u$ restringida a $\mathbb{R}$.*

Demostració. En efecte, si $u^* = 0$ podem estendre u a tot $\mathbb{C}$ per reflexió ($u(z) = -u(\bar{z})$ si $\operatorname{Im} z < 0$). Llavors pel teorema de Liouville resulta que $u = 0$. En el cas general considerem $v = u - P[u^*]$. Acabem de veure que $v = 0$ i tenim el lema. ♣

Apliquem el lema a la funció holomorfa g que ja sabem que és acotada (pel corol·lari 1.15 i el lema 1.19) i per tant $g = P[g^*]$. Es a dir,

$$g(z) = P[g](z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}}\right) g(t)\,dt = \int_0^\infty \hat{g}(w)e^{iwz}\,dw + \int_{-\infty}^0 \hat{g}(w)e^{iw\bar{z}}\,dw,$$

llavors, com que g és holomorfa, el segon sumand (que és antiholomorf i de $L^2(\mathbb{R})$) ha de ser 0, es a dir, $\hat{g}(w) = 0$ si $w < 0$.

1.4 Espectre de mesura finita

Ja hem vist quina mena de restriccions suposa el fet de que una funció (o mesura) tingui suport en una semirecta o en un interval. Veiem ara unes definicions per estudiar el cas general.

Definició. Donat un parell de conjunts $X \subset \mathbb{R}$ i $\Omega \subset \hat{\mathbb{R}}$ (hem de pensar que pertanyen a dos copies de $\mathbb{R}$ diferents, X és un subconjunt de temps i Ω un subconjunt de freqüencies) diem que (X, Ω) és un parell aniquilador si la única funció $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que el suport essencial de f en X i el suport essencial de $\hat{f} \subset \Omega$ és la funció identicament nul·la.

Diem que (X, Ω) és un parell fortament aniquilador si existeix una constant C de manera que per a tota $f \in L^2(\mathbb{R})$ tenim

$$\|f\|_2^2 \le C\left(\int_{\mathbb{R}\setminus X} |f(x)|^2\,dx + \int_{\hat{\mathbb{R}}\setminus\Omega} |\hat{f}(w)|^2\,dw.\right)$$

Podem observar que la propietat de ser fortament aniquilador és la propietat de ser aniquilador d'una manera estable.

En el cas de conjunts de mesura finita tenim el següent teorema [AB77]

Teorema 1.21 (Amrein-Berthier). *Si $|X| < +\infty$ i $|\Omega| < +\infty$, aleshores el parell (X, Ω) és fortament aniquilador.*

Aquest no és un teorema simple, s'utilitza fortament la geometria dels espais de Hilbert. Demostrarem una versió més feble deguda a Benedicks [Ben85]:

Teorema 1.22 (Benedicks). *Si $|X| < +\infty$ i $|\Omega| < +\infty$, aleshores el parell (X, Ω) és un parell aniquilador.*

Demostració. Ho demostrarem fins i tot en el cas en que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Es a dir, si diem $A = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0\}$ i $B = \{w \in \hat{\mathbb{R}},\ \hat{f}(w) \neq 0$, aleshores si $|A| + |B| < \infty$, es compleix $f = 0$. Per demostrar-ho sempre podem suposar, sense perdua de generalitat, que $|A| < 2\pi$ (sino reemplacem f per $f_a(x) = f(ax)$ doncs $\hat{f}_a = 1/a\hat{f}(w/a)$. Considerem la funció: $\tilde{\chi}_B(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \chi_B(w-n)$. La funció $\tilde{\chi}$ és de periode 1. Llavors

$$\int_0^1 \tilde{\chi}_B(w)\, dw = \int_{\hat{\mathbb{R}}} \chi_B(w)\, dw = |B| < \infty.$$

Per tant $\tilde{\chi}_B$ és finita gairebe per a tot. Per tant per gairebe tot w es cumpleix que $\hat{f}(w+k) \neq 0$ només per un número finit de $k \in \mathbb{Z}$.

Fixem un $w \in \hat{\mathbb{R}}$ i definim la funció

$$\tilde{f}_w(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-iw(x-2\pi n)} f(x - 2\pi n).$$

La funció $\tilde{f}_w$ té les següents propietats:

- $\tilde{f}_w \in L^1(\mathbb{T})$.
- f_w té coeficients de Fourier $\hat{f}_w(k) = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(w+k)$.
- $|\{x \in \mathbb{T};\ \tilde{f}_w(x) \neq 0\}| < 2\pi$.

La primera propietat és certa perque $f \in L^1(\mathbb{R})$. La segona és un càlcul elemental i la tercera és conseqüència de que $|A| < 2\pi$.

La segona propietat indica que $\tilde{f}_w$ és un polinomi trigonometric per gairebe tot $w \in \hat{\mathbb{R}}$ doncs $\hat{f}(w+k)$ és zero excepte per un numero finit de k. La darrera propietat fa que el polinomi sigui identicament 0. Per tant $\hat{f}$ és zero gairebe per tot. Per tant $f = 0$. ♣

Nota. El teorema no és cert si f és una distribució enlloc d'una funció, doncs si $\mu(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n(x)$ aleshores $\hat{\mu}(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi\delta_{2\pi n}(w)$. Totes dues tenen suport en conjunts de mesura 0.

El teorema d'Amrein-Berthier no dona una caracterització dels parells fortaments aniquiladors només una condició suficient. No es coneix una descripció complerta en el cas general. Si Ω és un conjunt acotat (o alternativament X) aleshores el teorema de Logvinenko-Sereda [VL74] si dóna una caracterització. Per enunciar-ho ens cal una definició

Definició. Diem que un conjunt $Y \subset \mathbb{R}$ és relativament dens si exiteix un interval $I \subset \mathbb{R}$ prou gran de manera que $(I + x) \cap Y \neq \emptyset$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

El teorema diu el següent:

Teorema 1.23 (Logvinenko-Sereda). *Donat un conjunt acotat $\Omega \subset \hat{\mathbb{R}}$, aleshores el parell (X,Ω) és fortament aniquilador si, i només si $\mathbb{R}\setminus X$ és relativament dens (obviament el paper de Ω i X són intercanviables).*

Per demostrar el teorema de Logvinenko-Sereda resulta més comode reformular l'enunciat de la següent manera: sigui $\mathcal{E}$ el subspai de L^2 format per les funcions f tals que el suport essencial de $\hat{f}$ pertany a Ω, aleshores la desigualtat

$$\|f\|_2^2 \lesssim \int_Y |f|^2\,dm, \qquad \forall f\in\mathcal{E} \tag{1.7}$$

és certa si i només si Y és relativament dens. Veiem que aquestes dues formulacions són equivalents. Prenem una funció $f\in L^2$ i la descomposem en dues $f=f_1+f_2$ de manera que $\operatorname{ess\,sup}\hat{f}_1\subset\Omega$ i $\operatorname{ess\,sup}\hat{f}_2\subset\hat{\mathbb{R}}\setminus\Omega$. En particular f_1 és ortogonal a f_2. Aleshores $\|f\|^2=\|f_1\|^2+\|f_2\|^2$. Si (X,Ω) és un parell fortament aniquilador, llavors

$$\|f_1\|^2+\|f_2\|^2 \lesssim \int_{\hat{\mathbb{R}}\setminus\Omega}|\hat{f}|^2\,dw+\int_{\mathbb{R}\setminus X}|f|^2=\int_{\hat{\mathbb{R}}\setminus\Omega}|\hat{f}_2|^2\,dw+\int_{\mathbb{R}\setminus X}|f|^2.$$

Si en particular $f=f_1$, es a dir, $\operatorname{ess\,sup}\hat{f}\subset\Omega$ tenim la reformulació del teorema.

Suposem ara que es compleix (1.7), llavors el teorema és cert doncs tota funció f la descomposem com abans en f_1+f_2 i tenim

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2=\|f_1\|_2^2+\|f_2\|_2^2 &\lesssim \int_{\hat{\mathbb{R}}\setminus\Omega}|\hat{f}_2|^2\,dw+\int_{\mathbb{R}\setminus X}|f_1|^2\,dx\lesssim\\ &\lesssim\int_{\hat{\mathbb{R}}\setminus\Omega}|\hat{f}|^2\,dw+\int_{\mathbb{R}\setminus X}|f|^2+|f_2|^2\,dx\lesssim\int_{\hat{\mathbb{R}}\setminus\Omega}|\hat{f}|^2\,dw+\int_{\mathbb{R}\setminus X}|f|^2\,dx.\end{aligned}$$

Ja tenim reformulat el teorema. Per demostrar-ho, ens cal una estimació de la transformada de Poisson. Es el que es coneix com a teorema de les dues constants. Definim la mesura de probabilitat σ_x com $\sigma_x(A)=\frac{1}{\pi}\int_A\frac{dt}{1+(t-x)^2}$. Aquesta mesura té la propietat que per a qualsevol funció f, $P[f](x+i)=\int_{\mathbb{R}}f(t)\,d\sigma_x(t)$.

Lema 1.24. *Sigui $X\subset\mathbb{R}$ i $\sigma_x(X)\ge\gamma$ per a tot $x\in\mathbb{R}$. Aleshores si $f\in H^2(\mathbb{R})$, llavors*

$$\int_{\mathbb{R}}|P[f](x+i)|^2\,dx\le 2\left(\int_X|f(t)|^2\,dt\right)^{\gamma}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(t)|^2\,dt\right)^{(1-\gamma)}.$$

Demostració. Per demostrar-ho ens cal la desigualtat de Jensen. Recordem que si $f\in H^2(D)$, aleshores $\log|\int_{\mathbb{T}}f^*|=\log|f(0)|\le\int_{\mathbb{T}}\log|f|$. De la mateixa manera si $f\in H^2(\mathbb{C}^+)$, llavors

$$\log\left|\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(t)}{1+t^2}\,dt\right|\le\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\log|f(t)|}{1+t^2}\,dt.$$

Aquesta desigualtat es coneix també com a desigualtat de Jensen a la recta. Si $x\in\mathbb{R}$ i $f\in H^2$, aleshores la funció $g(t)=f(t-x)$ també pertany a H^2, per tant tenim que per a qualsevol $f\in H^2$ i $x\in\mathbb{R}$,

$$\log|P[f](x+i)|\le P[\log|f|](x+i).$$

Fixem $x \in \mathbb{R}$ i diem $k = \sigma_x(X)$. Definim dues mesures de probabilitat $\mu(A) = \frac{1}{k}\sigma_x(A \cup X)$ i $\mu'(A) = \frac{1}{1-k}\sigma_x(A \setminus X)$. Llavors tenim

$$\begin{aligned}
&2\log|P[f](x+i)| \leq k\int_X \log|f|^2 d\mu + (1-k)\int_{\mathbb{R}\setminus X} \log|f|^2 d\mu' \leq \\
&\leq k\log\int_X |f|^2\, d\mu + (1-k)\log\int_{\mathbb{R}\setminus X} |f|^2 d\mu' = \\
&= k\log\frac{1}{k} + (1-k)\frac{1}{1-k} + k\log\int_X |f|^2 d\sigma_x + (1-k)\log\int_{\mathbb{R}\setminus X} |f|^2 d\sigma_x \leq \\
&\leq \log 2 + \gamma\log\int_X |f|^2 d\sigma_x + (k-\gamma)\log\int_X |f|^2 d\sigma_x + (1-k)\log\int_{\mathbb{R}\setminus X} |f|^2 d\sigma_x.
\end{aligned}$$

Finalment els dos ultims sumands els acotem per $(k-\gamma+(1-k))\log\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\sigma_x$ (doncs per hipotesi $\gamma < k$. Hem vist doncs,

$$|P[f](x+i)|^2 \leq 2\left(\int_X |f|^2 d\sigma_x\right)^\gamma \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\sigma_x\right)^{1-\gamma}.$$

Si apliquem la desigualtat de Hölder (amb exponents $1/\gamma$ i $1/(1-\gamma)$) tenim el lema. ♣

Procedim ara a demostrar el teorema de Logvinenko-Sereda

Demostració. Observem en primer que si tenim la desigualtat (1.7) aleshores $Y = \mathbb{R} \setminus X$ és un conjunt relativament dens. En efecte, $\mathcal{E}$ és un espai invariant per translacions, doncs $\hat{f}(x-a) = e^{iaw}\hat{f}(w)$. Veiem que per a tot subspai no buit de L^2 invariant per tranlacions, una desigualtat del tipus (1.7) implica que Y és relativament dens. Raonem per reducció a l'absurd. Sino ho fos, existirien intervals I_n arbitrariament grans de manera que $|I_n \cap Y| \leq \varepsilon_n$ amb $\varepsilon_n \to 0$ quan $n \to \infty$. Prenem una funció $f \neq 0$ del nostre subspai tal que $\|f\| = 1$. Si l'interval I_n és de la forma $(x_n - r_n, x_n + r_n)$ i considerem les funcions $f_n = f(x - x_n)$, veiem que $\int_{I_n} |f_n|^2 = \int_{-r_n}^{+r_n} |f|^2 \to 1$ si $n \to \infty$. Per un altre part si apliquem la desigualtat (1.7)

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |f_n|^2\, dt \lesssim \int_Y |f_n|^2\, dt \leq \int_{Y\cap I_n} |f_n|^2\, dt + \int_{\mathbb{R}\setminus I_n} |f_n|^2\, dt \to 0.$$

Veiem a continuació l'altre implicació. Es a dir, suposem que Y és relativament dens. Això vol dir que existeix un interval I i un $\gamma > 0$ de forma que $|(I+x)\cap Y| \geq \gamma$. Per tant, $\sigma_x(Y) \geq \gamma$ per a tota $x \in \mathbb{R}$ (de fet són conceptes equivalents).

Ja sabem que per a qualsevol $f \in L^2(\mathbb{R})$ es compleix $\int_{\mathbb{R}} |P[f](x+i)|^2 \lesssim \|f\|^2$. Si a més $\operatorname{ess\,sup} \hat{f} \in (-l, l)$ tenim la estimació inversa que és falsa en general. En efecte si diem $Q[f](x) = P[f](x+i)$, aleshores $\widehat{Q[f]}(w) = e^{-|w|}\hat{f}(w)$. Per tant

$$|\hat{f}(w)| = e^{|w|}|\widehat{Q[f]}(w)| \leq e^l|\widehat{Q[f]}(w)|,$$

i per tant $\|f\|_2 \leq e^l\|Q[f]\|_2$. Si ara combinem aquest resultat amb el teorema de les dues constants tenim el que voliem. Si $\operatorname{ess\,sup} \hat{f} \in (-l, l)$, prenem $g(t) = e^{-ilt}f(t)$ i $\operatorname{ess\,sup} \hat{g} \in (0, 2l)$. Es a dir g té espectre acotat i a més $g \in H^2$. Per tant

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 \lesssim \|Q[g]\|^2 \lesssim \left(\int_Y |g|^2\right)^\gamma \|g\|^{2(1-\gamma)} = \left(\int_Y |f|^2\right)^\gamma \|f\|^{2(1-\gamma)}.$$

♣

Finalitzem amb aquest tema donant un resultat en sentit contrari. Construirem funcions que tenen forats en el temps i en el espectre arbitrariament grans. El resultat és el següent:

Teorema 1.25 (Melenk-Zimmermann). *Per a qualsevols constants $T, \Omega > 0$ existeix una funció $f \in L^1 \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que $f(t) = 0$ si $t \in [-T, T]$ i $\hat{f}(w) = 0$ si $w \in [-\Omega, \Omega]$.*

Demostració. La demostració que farem es troba en [MZ96], encara que aquest resultat ja era conegut, la seva construcció és molt simple.

De fet demostrarem que existeix una funció g que s'anul·la en $[-N, N]$ i tal que $\hat{g} = 0$ en l'interval fixat $[-1/4, 1/4]$. Si despres composem amb una dilació obtenim el resultat desitjat. Per començar necessitem una versió discreta del mateix tipus de resultat.

Lema 1.26. *Donat un nombre natural N qualsevol, existeix una successió $a_n,\ n \in \mathbb{Z} \in l^1$ tal que $a_j = 0$ si $-N \leq j \leq N-1$ i la serie de Fourier $S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ compleix $S(x) = 0$ si $x \in [-1/4, 1/4]$.*

Demostració. Sigui $\varepsilon = 1/8N$ i definim la funció B_0 en $\mathbb{T}$ de la manera següent:

$$B_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x \in (-\varepsilon, 0) \\ +1 & \text{for } x \in (0, +\varepsilon) \\ 0 & \text{a la resta} \end{cases}$$

Està clar que $\hat{B}_0(0) = 0$ (de fet $\hat{B}_0(j) = 0$ si $j \equiv 0 \mod 8N$). Definim $B_n(x) = e^{-2\pi inx} B_0(x)$ i llavors $\hat{B}_n(n)$=0 amb $\operatorname{supp} B_n = [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathbb{T}$. Finalment si prenem $B = B_{-N} \star \cdots \star B_{N-1}$ satisfà $\operatorname{supp} B \subset [-2N\varepsilon, 2N\varepsilon] = [-1/4, 1/4]$ i a més $\hat{B}(n) = 0$ si $n \in [-N, N-1]$. Finalment, sigui $A(x) = B(x + 1/2)$, llavors $A \in L^1(\mathbb{T})$ i la successió $a_n = \hat{A}(n)$ satisfà l'enunciat del lema. ♣

Per transportar el resultat de $\mathbb{T}$ a $\mathbb{R}$ prenem una funció $\phi \in \mathcal{C}_K^\infty$ amb suport en $[0, 1]$. Llavors prenem $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \phi(x - n)$. És immediat que $g \in L^1 \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ i que $g(x) = 0$ si $x \in [-N, N]$. Per un altre part

$$\hat{g}(w) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ixw} \sum_n a_n \phi(x - n)\, dx = \sum_n a_n e^{2\pi in} \int_0^1 \phi(x) e^{-2\pi xw}\, dx = S[a](w)\hat{\phi}(w).$$

Per tant $\hat{g}(w) = 0$ si $w \in [-1/4, 1/4]$. ♣

Capítol 2

Variants quantitatives i qualitatives

Veurem a continuació algunes variants quantitatives i qualitatives dels resultats que hem demostrat fins ara. Començarem per l'estudi del principi d'incertessa al voltant de l'infinit. Una forma de localitzar una funció és mesurar com s'anul·la per valors molt grans de la variable. El principi d'incertesa exclou la posibilitat de que una funció i la seva transformada de Fourier siguin totes dues molt petites en un entorn de l'infinit. El ser "petit entorn de l'infinit" es pot mesurar de moltes maneres. La forma més obvia és utilitzar estimacions puntuals i això motiva la següent definició:

Definició. Un parell de funcions $(a(x), \alpha(w))$ es diu que es un parell de majorants suficient si la única funció $f \in L^1(\mathbb{R})$ que compleix $|f(x)| \leq a(x)$ i $|f(w)| \leq \alpha(w)$ per $|x|$ i $|w|$ grans és la funció identicament nul·la.

En aquesta definició cal pensar que a i α són funcions positives i que decreixen cap a 0 quan x i w van cap a infinit. La condició $f \in L^1$ és accessoria, només la necessitem per poder parlar de transformada de Fourier, es pot substituir per d'altres condicions.

En molts dels resultats que es coneixen entorn de la descripció de majorants suficients és bàsic tenir una condició de tamany i una condició de "regularitat" de la majorant (de fet si treballem amb majorants decreixents ja imposem d'entrada una regularitat).

Començarem per donar alguns exemples no trivials.

Teorema 2.1 (Hardy). *Si $|f(x)| \lesssim Ce^{-x^2/2}$ i $|\hat{f}(w)| \lesssim e^{-w^2/2}$, aleshores $f = Ce^{-x^2/2}$.*

Demostració. Aquest resultat és una aplicació del principi de Phragmen-Lindelöf. Necessitem el següent lema de funcions enteres.

Lema 2.2. *Si F és una funció entera tal que per a tot $z \in \mathbb{C}$ $|F(z)| \lesssim e^{a|z|}$ i a més $|F(x)| \lesssim e^{-ax}$ si $x > 0$, aleshores $F(z) = Ce^{-az}$.*

Demostració. Diem G_ε a la funció auxiliar $G_\varepsilon(z) = F(z)e^{(a+ia\tan\varepsilon/2)z}$. Apliquem el principi de Phragmen-Lindelöf a la funció G_ε en el con $C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C};\ z = |z|e^{i\theta},\ \theta \in (0, \pi - \varepsilon)$. L'ordre de G_ε és com a màxim 1 i l'amplada del con es més petita que π. Per tant el màxim de la funció en el con s'assoleix a la frontera del con. Per un altre part

$$|G_\varepsilon(x) = |F(x)|e^{ax} \leq C, \text{ si } x \in \mathbb{R}.$$
$$|G_\varepsilon(xe^{i(\pi-\varepsilon)})| \leq Ce^{ax(cos\varepsilon + \tan\frac{\varepsilon}{2}\sin\varepsilon)} = C.$$

Es a dir $|G_\varepsilon(z)| \leq C$ en tot el con. Si fem tendir $\varepsilon \to 0$, aleshores el con tendeix a $\mathbb{C}^+$ i al mateix temps $G_\varepsilon(z) \to Fe^{az}$. Per tant $|F(z)e^{az}| \leq C$ en el semiplà superior. En el semiplà inferior fem el mateix tipus d'acotació. Pel teorema de Liouville $F(z)e^{az} = C$. ♣

Acabem ara la prova del teorema de Hardy. Si f decau tan ràpid com indica la hipòtesi, aleshores la transformada de Fourier defineix una funció entera.

Descomposem la funció f en $p+s$ on $p(x)$ és una funció parell i $s(x)$ és una funció senar. És immediat comprovar que tant p com s compleixen també les hipotesis del lema. Anem a tractar cada cas per separat.

Si p és parell aleshores $\hat{p}$ també i $\hat{p}(z) = F(z^2)$. Per descomptat F és de tipus exponencial $1/2$ doncs per tot $w \in \mathbb{C}$,

$$|\hat{f}(w)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)||e^{ixw}|\, dx \lesssim \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2} + x \operatorname{Im} w}\, dx \lesssim e^{\frac{(\operatorname{Im} w)^2}{2}}.$$

Podem aplicar, doncs el lema i tenim que $\hat{p}(z) = Ce^{-z^2/2}$. Hem de demostrar que $s = 0$. En efecte, considerem la funció entera $g(z) = \hat{s}(z)/z$. Trivialment $|g(x)| \lesssim e^{\frac{-x^2}{2}}$ si $x \in \mathbb{R}$. Al mateix temps $g = \hat{G}$ on $G(x) = c\int_{-\infty}^x s(y)\, dy$. Per tant $\hat{G}$ és parell i $|G(x)| \lesssim e^{-x^2/2}$ si $x > 0$. Per tant aplicant el lema a G resulta que $g = C'e^{\frac{-x^2}{2}}$, es a dir $s(x) = C'xg(x)$. Això només és possible si $C' = 0$ doncs $|s(x)| \lesssim e^{-x^2/2}$. ♣

Un altre exemple d'aplicació del principi de Phragmen-Lindelöf és el següent teorema de Morgan [Mor34] que és una variant del teorema de Hardy:

Teorema 2.3 (Morgan). *Sigui $p > 2$ i q l'exponent conjugat. Diem*

$$A(x) = \frac{(px)^{1-q}}{q\sin(\frac{\pi}{2}(q-1))}$$

Aleshores per a qualsevols $C > 0$ i $\varepsilon > 0$ tenim que el parell $(e^{-C|x|^p}, e^{-(A(C)+\varepsilon)|w|^q})$ és suficient. A més la constant $A(C)$ és inmillorable.

Demostració. Per demostrar-ho necessitem una variant més fina del teorema de Phragmen-Lindelöf.

Lema 2.4. *Suposem que $\rho \in (1,2)$, $\alpha = \frac{\pi}{2}(\rho - 1)$ i $\sigma > 0$, amb $A = \sigma/\sin\alpha$. Si l'ordre de una funció entera f no excedeix ρ i tenim que per algun $B > A(\rho,\sigma)$ es compleix*

$$|f(ix)| \lesssim e^{\sigma|x|^\rho} \qquad \text{si } x \in \mathbb{R},$$
$$|f(x)| \lesssim e^{-B|x|^\rho} \qquad \text{si } x \in \mathbb{R},$$

aleshores $f = 0$.

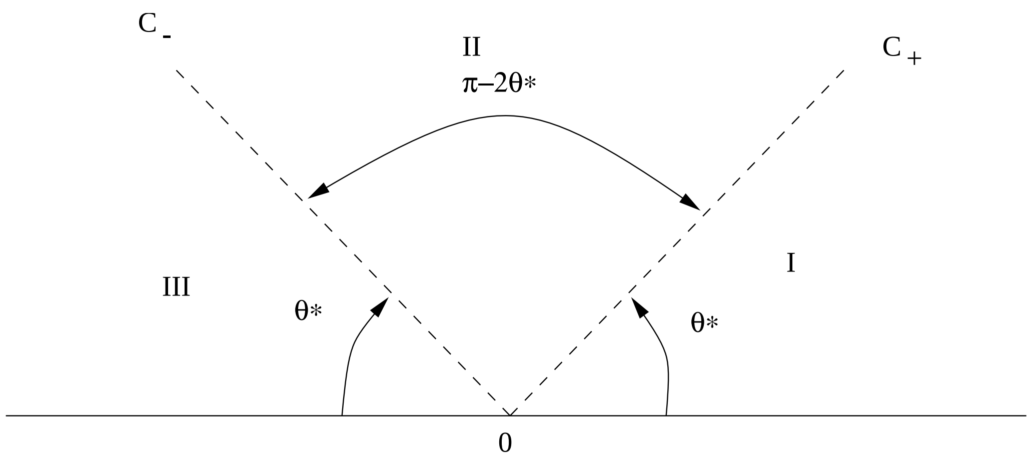

Figura 2.1: Les regions on fem l'acotació

Demostració. Veurem que la funció f és acotada i aplicarem el teorema de Liouville. Si prenem $\theta^* = \pi/2\rho$ podem aplicar el teorem de Phragmen-Lindelof en els angles $+\infty 0C_+$, C_+0C_- i $-\infty 0C_-$. En l'eix real està acotada per hipotesis. Només cal veure que està acotada en les semirectes $0C_+$ i $0C_-$ per concloure que està acotada en el semiplà superior. En el semiplà inferior es veu igualment. Veiem el cas de $0C_+$.

Per fer-ho, definim la funció auxiliar $g(z) = f(z)e^{(B+iB^*)z^\rho}$ en el primer quadrant, on $B^* = \frac{\sigma + B\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\sin\frac{\rho\pi}{2}}$. De la definició es segueix que g és d'ordre com a màxim ρ i la hem triada de manera que g sigui acotada en l'eix real positiu i en l'eix imaginari positiu. Apliquem el principi de Phragmen-Lindelöf clàssic i tenim que g és acotada en tot el primer quadrant. En particular sobre la semirecta $0C_+$. Per tant sobre la semirecta tenim $|f(z)| \lesssim e^{B^*|z|^\rho}$. Però per hipotesis $B > \sigma/\sin\frac{\pi}{2}(\rho - 1)$, es a dir $B^* < 0$. Per tant $|f|$ està acotada en la semirecta $0C_+$ com voliem veure. ♣

Ara podem fer la demostració del teorema de Morgan. Per qualsevol constant $C' < C$ tenim que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)||e^{-ixw}|\,dx \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)|e^{x\,\mathrm{Im}\,w}\,dx \le e^{\sigma(C')|\,\mathrm{Im}\,w|^q} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|e^{C'|x|^p}\,dx,$$

perque $\sigma(C) = 1/(q(pC)^{q-1})$ està triada de forma que per a qualsevol $x, y, C > 0$, es compleix $xy \le C|x|^p + \sigma(C)|y|^q$. Per tant la funció $F(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixw}\,dx$ és entera d'ordre q com a màxim i satisfà les hipotesis del lema (si C' està prou a prop de C). Per tant $F = 0$, es a dir $f = 0$. ♣

Finalment donem un exemple de majorants suficients en norma L^1 enlloc de norma L^∞. També és una aplicació adequada del principi de Phragmen-Lindelöf. Es tracta d'un teorema no publicat de Beurling reproduit per Hörmander en [Hör91]:

Teorema 2.5 (Beurling). *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R})$ i suposem que*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x)\hat{f}(w)|e^{|xw|}\,dx\,dw < \infty.$$

Aleshores, $f = 0$*.*

Recordem que dues funcions convexes reals ϕ, ψ definides en $[0 + \infty)$ es diuen duals (en el sentit de Young) si $ab \leq \phi(a) + \psi(b)$.

Corol·lari 2.6. *Si ϕ i ψ son funcions convexes conjugades aleshores*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|e^{\phi(x)}\,dx < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} |f(w)|e^{\psi(w)}\,dw < +\infty \Longrightarrow f = 0.$$

Demostració. Definim

$$\widetilde{M}(w) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|e^{|xw|}\,dx, \quad M(x) = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(w)|e^{|wx|}\,dw.$$

Totes dues funcions són funcions creixents i a més per hipotesi

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(w)|\widetilde{M}(w)\,dw = \int_{R} |f(x)|M(x)\,dx < \infty. \tag{2.1}$$

No potser que f o $\hat{f}$ tinguin suport compacte. Si f fos a suport compacte, llavors $\widetilde{M}$ creixeria de forma exponencial. En aquest cas degut a (2.1) tenim que f seria holomorf en una banda entorn de l'eix real, per tant $f = 0$. De forma analoga amb $\hat{f}$. Si ni f ni $\hat{f}$ tenen suport compacte, aleshores M i $\widetilde{M}$ han de creixer més ràpidament que qualsevol exponencial i per tant f i $\hat{f}$ són funcions enteres i de la definició de M i $\widetilde{M}$ tenim

$$|f(z)| \leq M(\operatorname{Im} z) \leq M(|z|), \qquad |\hat{f}(w)| \leq \widetilde{M}(\operatorname{Im} w) \leq M(|w|);\ z, w \in \mathbb{C} \tag{2.2}$$

Definim la funció entera $F(z) = \int_0^z f(z)f(iz)\,dz$. Aquesta funció està acotada en l'eix real i l'eix imaginari doncs

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|f(\pm ix)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|M(x)\,dx < \infty.$$

De forma trivial estimem $|F(z)| \leq |z|M^2(|z|)$. Si a més $\liminf_{|x|\to\infty} M(x)e^{-cx^2/2} = 0$ per a tot $c > 0$, aleshores per una variant del teorema de Phragmén-Lindelöf (veieu el lema de Cartwright a continuació) tenim que F és acotada i per tant constant, de manera que $F'(z) = f(z)f(iz) = 0$, es a dir $f = 0$. Si f és no nul·la, existeix una c (i una $\tilde{c}$) tal que

$$M(x) > e^{cx^2/2},\ \widetilde{M}(w) > e^{\tilde{c}w^2/2},\ \text{si } x, w \text{ són grans.}$$

Com que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w)\widetilde{M}(w)e^{izw}/\widetilde{M}(w)\,dw$$

tenim que $|f(z)| \leq K\sup_w e^{|w||Imz|-\tilde{c}w^2/2} = Ke^{|\operatorname{Im} z|^2/2\tilde{c}}$. Per tant f és d'ordre 2 (o identicament 0). Anem a demostrar que

$$\int_0^\infty |f(\pm re^{\pm i\pi/4})|^2\,dr \leq K'. \tag{2.3}$$

En efecte, per a qualsevol $0 < \alpha < \pi/2$, sabem gracies a (2.1) i (2.2)

$$\int_0^\infty |f(r)f(re^{i\alpha})|\,dr \leq \int_0^\infty |f(r)|M(r)\,dr = K' < \infty.$$

Si prenem una funció ϕ continua a suport compacte definida en $\mathbb{R}^+$ amb $|\phi| \leq 1$, aleshores el valor absolut de la funció holomorfa

$$z \to z\int_0^{+\infty} f(tz)\overline{f(e^{i\alpha}t\bar{z})}\phi(t)\,dt$$

està acotat en la vora del con $0 < \arg z < \alpha$ per K i com que és una funció d'ordre 2, aleshores està acotada en l'interior per K. Quant $z = e^{i\alpha/2}$ tenim la desigualtat

$$\int_0^\infty |f(re^{i\alpha/2})|^2\,dr \leq K', \qquad 0 < \alpha < \pi/2.$$

Si fem tendir $\alpha \to \pi/2$ demostrem (2.3) (en el cas en que prenem els signes $+$, les altres desigualtats són del mateix estil). Per tant, $|F(\pm re^{\pm i\pi/4})|$ està acotat i ara el teorema de Phragmén-Lindelöf dona que F és constant, es a dir $f(z) = 0$. ♣

Queda per demostrar la variant del teorema de Phragmén-Lindelöf. Es tracta justament de estudiar el que passa en el cas en que l'angle i l'ordre són justament iguals. En el nostre cas tenim funcions d'ordre 2 (essencialment) i l'angle és de $\pi/2$. Podem reduirnos al cas de funcions d'ordre 1 i angle π canviant de variables ($z = w^2$). El següent teorema que podem trobar en [Ahl73] ens soluciona el problema.

Teorema 2.7. *Sigui f holomorfa en el semiplà S de part imaginària positiva i continua fins a la frontera. Denotem per $M(r) = \sup_{|z|=r,\ z\in S} |f(z)|$. Si*

$$\liminf_{r\to\infty} M(r)e^{-ar} = 0 \qquad \forall a > 0$$

aleshores $\sup_{z\in S} |f(z)| = \sup_{z\in\partial S} |f(z)|$.

Demostració. Donem una indicació de la prova. Si veiessim que f és de tipus exponencial a, aleshores ja hem demostrat que $|f(z)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{a|\operatorname{Im} z|}$. Si això és veritat per a tot $a > 0$ ja tenim el que voliem. Hem de comprovar, doncs que

$$\limsup_{r\to\infty} M(r)e^{-ar} = 0 \qquad \forall a > 0.$$

Ho sabem per a límits inferiors. Es a dir sabem que per a qualsevol $a > 0$ existeix una successió de reals positius $r_n \to \infty$ tal que $\log M(r_n) \leq ar_n + K$. Volem veure una desigualtat d'aquest tipus per a qualsevol r. Per a fer-ho hem de tornar a utilitzar que f és acotada en $\mathbb{R}$. Suposarem sense perdua de generalitat que $|f|$ està acotada per 1 en $\mathbb{R}$. Prenem un z en el semiplà superior. Volem acotar $\log|f(z)|$. Prenem un semidisc Ω molt gran que sigui la intersecció d'un disc de centre 0 i radi r_n i el semiplà superior. Prenem n molt gran de manera que z pertanyi al semidisc. Com que $\log|f(z)|$ és una funció subharmónica, aleshores pel principi del màxim

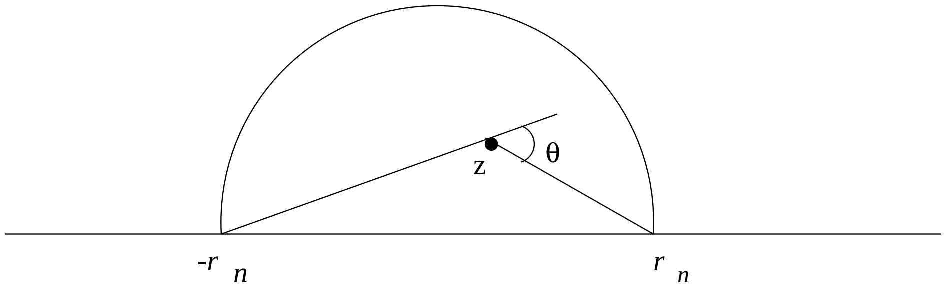

Figura 2.2:

per a funcions subharmóniques, $\log|f(z)| \leq u(z)$, on $u(z)$ és una funció harmónica qualsevol que tingui valors frontera en el semidisc més grans que $\log|f(z)|$. Prenem com a funció u la funció harmónica que té valors frontera 0 en el tros de frontera que pertany a $\mathbb{R}$ i $\log M(r_n)$ en la circumferéncia. És fàcil comprovar que aquesta funció és $u(z) = \log M(r_n) 2\theta(z)/\pi$ on $\theta(z)$ és l'angle definit a la figura 2. Per un altre part, fixat z $\theta(z) r_n \to 2 \operatorname{Im} z$ quan $r_n \to \infty$. Per tant $\log|f(z)| \leq \lim_n 2M(r_n)\theta(z)/\pi \leq 4a/\pi \operatorname{Im} z$. Això és veritat per a tot $a > 0$. Per tant $|f(z)| \leq 1$ com voliem veure. ♣

Estudiem a continuació quina mena de restriccions imposa el decreixement d'una funció en una semirecta. Ja sabem que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ i $f(x) = 0$ quan $x > 0$, aleshores pel teorema dels germans Riesz no pot ser que $\hat{f}(y) = 0$ en un conjunt de mesura positiva. De fet el mateix resultat és cert si considerem mesures complexes μ enlloc de funcions. El que farem es substituir les condicions de anul·lació sobre una semirecta per un decaiment prou ràpid. La velocitat de decaiment d'una mesura μ al llarg de $\mathbb{R}^+$ ve donada en termes de la mesura de les cues $\rho_\mu(x) = |\mu|([x, +\infty))$. Els resultats més importants en aquest sentit són deguts a Beurling, Volberg i Borichev. Veiem en detall el teorema de Beurling.

Teorema 2.8 (Beurling). *Si $\mu \in M(\mathbb{R})$ satisfà*

$$\int^{+\infty} \frac{\log \rho_\mu(x)}{x^2}\, dx = -\infty,$$

i el conjunt $E = \{w \in \mathbb{R}; \hat{\mu}(w) = 0\}$ té mesura positiva, aleshores $\mu = 0$.

Nota. Hi ha un punt no satisfactori del tot en aquest resultat. En el cas del teorema de F. i M. Riesz no calia una condició tan forta com que $|E| > 0$, de fet només era necessari que la integral logarítmica de $\hat{\mu}$ fos divergent per assegurar que $\mu = 0$. El resultat de Volberg afina en aquest sentit el teorema de Beurling. El preu que ha de pagar és que ha de afegir una condició de regularitat per a la μ a la condició purament de tamany que apareix en el teorema de Beurling.

Demostració. Sigui $E = \{w \in \mathbb{R};\ \hat{\mu}(w) = 0\}$. Per hipòtesi, $|E| > 0$. Té per tant un punt de densitat que podem suposar sense perdua de generalitat que és el 0. Per tant, podem suposar que

$\lim_{\delta\to 0} |E\cap(-\delta,\delta)|/2\delta = 1$. Això implica que $\inf_{0<\eta\le 2} P[\chi_E](i\eta) > 0$. En efecte, si $|t|\le\eta$, aleshores $2\eta^2 \ge (t^2+\eta^2)$ i per tant

$$P[\chi_E](i\eta) = \frac{1}{\pi}\int_E \frac{\eta dt}{t^2+\eta^2} \ge \frac{1}{\pi}\int_{E\cap(-\eta,\eta)} \frac{\eta dt}{t^2+\eta^2} \ge \frac{|E\cap(-\eta,\eta)|}{2\pi\eta}.$$

Per η prop de 0 aquesta expressió està acotada per la hipòtesi de densitat de E entorn de l'origen. Lluny de l'origen està acotada trivialment. Hem vist doncs $\inf_{0<\eta\le 2} P[\chi_E](i\eta) > 0$. La prova consistirà en demostrar que sota les hipótesis sobre μ es compleix $C[\mu](z) = 0$ per a tot $z\in\mathbb{C}$ i per tant $\mu = 0$. Recordem que si z pertany al semiplà superior

$$C[\mu](z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t-z} = \int_0^\infty \hat{\mu}(t)e^{itz}\,dt.$$

Per fer la demostració necessitem el lema de les dues constants (la versió L^∞ del lema 1.24) que diu el següent:

Lema 2.9. *Sigui $E\subset\mathbb{R}$ un conjunt mesurable i $\varepsilon>0$. Suposem que $f\in H^\infty(\mathbb{C}^+)$ i $|f(t)|\le\varepsilon$ per a qualsevol $t\in E$. Aleshores,*

$$|P[f](z)| \le \varepsilon^{\sigma_z(E)}\|f\|_\infty^{1-\sigma_z(E)} \qquad z\in\mathbb{C},$$

on σ_z és una mesura de probabilitat definida com en el lema 1.24: $\sigma_z(A) = \frac{1}{\pi}\int_A \frac{\operatorname{Im} z dt}{|t-z|^2}$.

Demostració. Com que $\log|f|$ és subharmónica i $|f|$ és acotada,

$$\log|f(z)| \le P[\log|f|](z).$$

Per un altre part,

$$\begin{aligned} P[\log|f|](z) &= \int_E \log|f(t)|\,d\sigma_z(t) + \int_{\mathbb{R}\setminus E} \log|f(t)|\,d\sigma_z(t) \le \\ &\le \log\varepsilon\sigma_z(E) + (\log\|f\|_\infty)(1-\sigma_z(E)). \end{aligned}$$

Finalment prenent exponencials a la desigualtat obtenim el resultat desitjat. ♣

Demostrarem a continuació que $C[\mu](z) = 0$ si z pertany al semiplà superior (en el semiplà inferior procediriem analogament). La funció $C[\mu]$ és una funció holomorfa en el semiplà superior que a més cumpleix que és acotada en qualsevol semiplà de la forma $\operatorname{Im} z > a$. En efecte,

$$|C[\mu](z)| \le \int_{\mathbb{R}} \frac{d|\mu|(t)}{|t-z|} \le \frac{|\mu|(\mathbb{R})}{a}.$$

Com que tenim una funció holomorfa i acotada, per veure que és identicament 0 només cal veure que

$$\int^{+\infty} \frac{\log|C[\mu](x+i)|}{x^2}\,dx = -\infty.$$

Hem de demostrar doncs que $C[\mu](x+i)$ decau molt ràpidament quan $x\to+\infty$. El nucli de la demostració està en el següent lema:

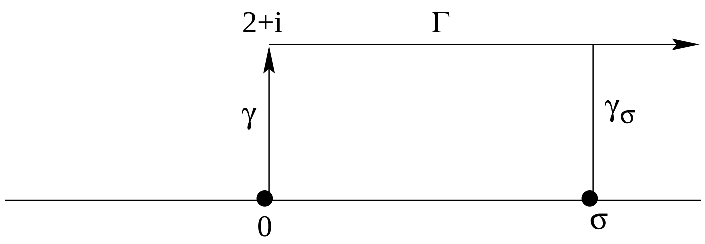

Figura 2.3: El camí on integrem g

Lema 2.10. *Sigui h una funció analítica en el semiplà superior i contínua fins a la frontera. Per a z en el semiplà superior, definim*

$$H(z) = \int_0^{+\infty} h(t)e^{itz}\,dt.$$

Si $|h(z)| \leq e^{A\,\mathrm{Im}\,z}$ per alguna $A > 0$ i E és un conjunt amb densitat positiva entorn de l'origen tal que $|h(t)| \leq \varepsilon$ si $t \in E$, aleshores

$$|H(x+i)| \leq e^{2(A-x)} + \varepsilon^{\alpha}\frac{1-e^{2(A-x)}}{x-A}, \qquad \text{si } x > 0,$$

on $0 < \alpha < 1$ només depén de E.

Demostració. En efecte, fixat z en el semiplà superior, diem $g(w) = h(w)e^{iwz}$. Aleshores la integral que defineix H es pot fer al llarg del camí $\gamma \cap \Gamma$ de la figura 2.3. En efecte, si $0 \leq \mathrm{Im}\,w \leq 2$ i $\mathrm{Re}\,w = \sigma$, llavors $|g(w)| \leq e^{-\sigma+2(A-\mathrm{Re}\,z)}$ i per tant $\lim_{\sigma\to+\infty}\int_{\gamma_\sigma} g(w)dw = 0$. Tenim doncs que

$$|H(x+i)| \leq \left|\int_\Gamma g(w)\,dw\right| + \left|\int_\gamma g(w)\,dw\right|.$$

Acotem cadascuna de les integrals. Per la primera utilitzarem el creixement de tipus exponencial del funció h i resulta

$$\left|\int_\Gamma g(w)\,dw\right| \leq e^{2A}\int_0^\infty |e^{i(t+2i)(x+i)}|\,dt = e^{2(A-x)}.$$

Acotem la segona integral. Sabem que

$$\inf_{0<\eta\leq 2} P[\chi_E](i\eta) > 0$$

o equivalentment $\alpha = \inf_{0<t<2}\sigma_{it}(E) > 0$. Per una altre banda, la funció $\phi(w) = h(w)e^{iAw}$ és una funció holormofa i acotada per 1 en el semiplà superior que compleix $|\phi(x)| = |h(x)| = \varepsilon$ si $x \in E$. Per tant gracies al lema de les dues constants

$$|\phi(it)| \leq \varepsilon^{\sigma_{it}(E)} \leq \varepsilon^{\alpha} \qquad \text{si } 0 < t < 2,$$

es a dir $|h(it)| \leq e^{At}\varepsilon^{\alpha}$ si $0 < t < 2$. Finalment,

$$\left|\int_{\gamma} g(w)\,dw\right| \leq \varepsilon^{\alpha}\int_0^2 e^{At}|e^{-t(x+i)}|\,dt = \varepsilon^{\alpha}\frac{1-e^{2(A-x)}}{x-A}.$$

♣

Recordem que el que volem demostrar és

$$\int^{+\infty} \frac{\log|C[\mu](x+i)|}{x^2}\,dx = -\infty.$$

Per fer-ho, prenem un $A > 0$ i trenquem $\mu = \mu_A + c_A$ on μ_A és la restricció de μ a la semirecta $(-\infty, A)$. El tros de la transformada de Cauchy de la cua c_A és el més fàcil d'acotar doncs

$$|C[c_A](x+i)| \leq \int_A^{\infty} \frac{d|c_A|(t)}{|t-(x+i)|} \leq \rho_\mu(A).$$

Per acotar l'altre part, utilitzem el lema. Volem prendre com a funció $h = \hat{\mu}_A$. Hem de comprovar que es compleixen les hipòtesis del lema. Veiem que h és una funció holomorfa en el semiplà amb el creixement adient:

$$|h(x+iy)| = |\hat{\mu}_A(x+iy)| \leq \int_{-\infty}^{A} e^{yt}d|\mu|(t) \leq e^{Ay}.$$

Si $x \in E$ (recordem que E és el conjunt on $\hat{\mu} = 0$), aleshores $|\hat{\mu}_A(x)| = |\hat{c}_A(x)|$ i per tant

$$|\hat{\mu}_A(x)| \leq \left|\int_A^{+\infty} e^{-ixt}d\mu(t)\right| \leq \rho_\mu(A).$$

Per tant $h = \hat{\rho}_\mu(A)$ compleix les hipòtesis prenent com a $\varepsilon = \rho_\mu(A)$. Per una altre part $H(x+i) = C[\mu_A](x+i)$ i resulta doncs,

$$|C[\mu_A](x+i)| \leq e^{2(A-x)} + \rho_\mu(A)^{\alpha}\frac{1-e^{2(A-x)}}{x-A}.$$

Finalment com que tenim la tria de A a la nostra disposició prenem $A = x/2$ i obtenim

$$|C[\mu](x+i)| \leq \rho_\mu(x/2) + e^{-x} + (\rho_\mu(x/2))^{\alpha}, \qquad x > 0.$$

En qualsevol cas per a $x > 0$ grans $|C[\mu](x+i)| \leq 3\max(e^{-x}, \rho_\mu(x/2))^{\alpha}$ i per tant

$$\log|C[\mu](x+i)| \leq \log 3 + \alpha\max(-x, \log\rho_\mu(x/2)).$$

Volem demostrar que

$$\int^{+\infty} \frac{\min(x, \log\frac{1}{\rho_\mu(x)})}{x^2}\,dx = +\infty.$$

La funció $q(x) = \min(x, \log \frac{1}{\rho_\mu(x)})$ és una funció creixent. Si la integral fos finita aleshores

$$\frac{q(x)}{x} \leq C \int_x^{2x} \frac{q(t)}{t^2} \to 0 \qquad \text{si } x \to \infty.$$

Això voldria dir que $q(x) = \log \frac{1}{\rho_\mu(x)}$ per a x grans, però per hipòtesi,

$$\int^{+\infty} \frac{\log \frac{1}{\rho_\mu(x)}}{x^2}\, dx = +\infty.$$

Hem arribat a contradicció. ♣

2.0.1 Corol·laris i variants

Anem a explotar el resultat que hem vist. Veiem en primer lloc com es transporta el teorema de la recta real a la circumferència.

Proposició 2.11. *Sigui f una funcio continua en $\mathbb{T}$ tal que $\sum |\hat{f}(n)| < +\infty$. Si*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log \rho_n}{n^2} = -\infty,$$

on $\rho_n = \sum_{k \leq -n} |\hat{f}(k)|$, aleshores $\{x; f(x) = 0\}$ té mesura positiva només si $f = 0$.

Demostració. Definim la mesura μ en $\mathbb{R}$ de la manera següent: $\mu(x) = \sum \hat{f}(n)\delta_n(x)$. Per hipótesi $|\mu|(\mathbb{R}) < +\infty$, a més $\hat{\mu}(t) = f(e^{-it})$ i podem aplicar el teorema de Beurling, que diu que en aquestes circumstancies $\mu = 0$ es a dir $f = 0$. ♣

Aquesta proposició té com a corol·lari un teorema clàssic anterior, el teorema de Cartwright-Levinson que és un resultat en la circumferència en el mateix esperit que el teorema de Beurling.

Teorema 2.12 (Cartwright-Levinson). *Si $\theta : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ és una funció creixent tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\theta(n)}{n^2} = +\infty$ i μ és una mesura en la circumferència que compleix $\mu(I) = 0$ en un interval I i $\hat{\mu}(n) \lesssim e^{-\theta(|n|)}$ si $n \to -\infty$, aleshores $\mu = 0$.*

Demostració. Sigui $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ amb suport contingut en un petit entorn de 1 i de manera que $\hat{\alpha}(0) \neq 0$. Definim $f = \mu \star \alpha$, aleshores $f \in L^1(\mathbb{T})$ i $\rho_n = \sum_{k \leq -n} |\hat{\mu}(k)||\hat{\alpha}(k)| \leq Ce^{-\theta(n)}$. A més f sánul·la en tot un interval doncs el suport de α el triem molt petit. Això vol dir que $f = 0$, en particular $\hat{\mu}(0) = 0$. Aquest argument el podem repetir amb la mesura $\sigma = z^{-j}\mu$ que també satisfà les hipotesis i per tant $0 = \hat{\sigma}(0) = \hat{\mu}(j)$. Finalment $\mu = 0$. ♣

Veiem ara una versió d'aquest resultat en la recta real!

Corol·lari 2.13. *Sigui μ una mesura en $\mathbb{R}$ tal que el diametre del seu suport sigui més petit que b. Si $\hat{\mu}(n\pi/b) \lesssim e^{-\theta(|n|)}$ quan $n \to -\infty$ on θ és una funció com en el teorema de Cartwright-Levinson aleshores $\mu = 0$.*

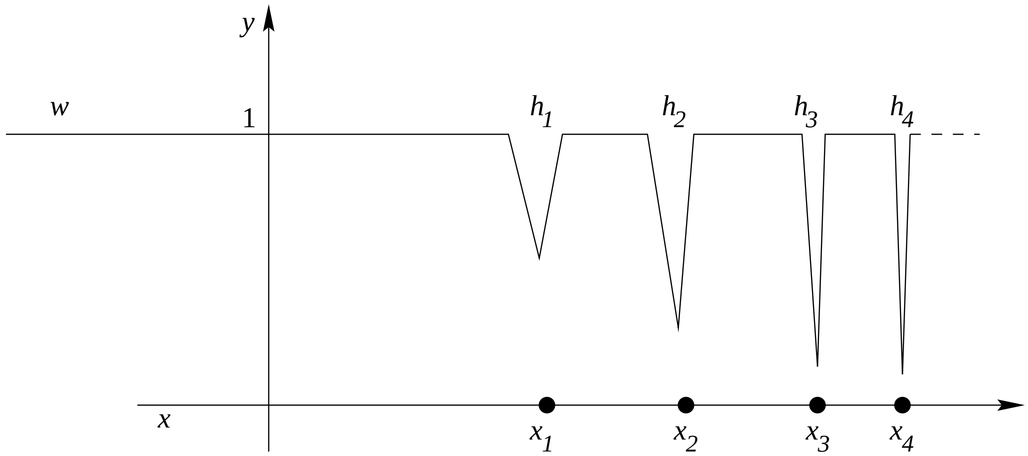

Figura 2.4: El pes w

Demostració. Abans de fer la demostració, observem que $\hat{\mu}(w) = 1/2\pi \int e^{-ixw} d\mu(x)$ (les constants són importants). Veiem que la cadencia dels punts és inmillorable doncs si $d\mu(x) = \chi_{[-1,1]}dx$, aleshores $\hat{\mu}(w) = \sin w/w$ i $\hat{\mu}(\pi n w) = 0$.

Per fer la demostració diem a al diametre del suport de μ. Sabem que $a < b$. Transportem μ a una mesura en $\mathbb{T}$. Prenem la funció $\phi : \mathbb{T} \to [-b, b] \subset \mathbb{R}$ de la manera següent $\phi(\zeta) = x$ si $\zeta = e^{-\pi i x/b}$. Llavors definim σ com el "pullback" de μ per ϕ i apliquem el teorema de Levinson-Cartwright a σ. Tenim finalment que $\sigma = 0$ i per tant $\mu = 0$. ♣

Com a aplicació d'aquest corol·lari veurem que es necessaria alguna condició de regularitat en el estudi de majorants admissibles. En efecte, considerem el següent problema: Volem descriure les funcions $w(x) > 0$ de manera que existeixi una funció $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{supp} \hat{f}$ sigui acotat i al mateix temps $|f(x)| \leq w(x)$ per $|x|$ grans. Aquests pesos $w(x)$ se'n diuen els pesos de Beurling-Malliavin. Pel teorema dels germans Riesz ja sabem que si w és un pes de BM aleshores

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log 1/w(x)}{1 + x^2}\, dx < +\infty.$$

Veurem que si afegim alguna condició de regularitat (per exemple w parell i w decreixent en $\mathbb{R}^+$) aleshores la convergència de la integral logarítmica és una condició també suficient per tal que w sigui un pes de Beurling-Malliavin. Hi ha condicions de regularitat més fines que permeten afirmar que $w \in BM$, però en qualsevol cas hem dimposar alguna condició de regularitat com mostra el següent exemple. Hem de pensar que el pes w decau en els punts $x_n = \sqrt{n}$ molt rapidament, de manera que si diem $w(x) = e^{-\theta(x)}$ llavors podem triar θ de manera que $\int \frac{\theta(u)}{u^2} = +\infty$. Per un altre part, si prenem la successió d'intervals h_i que convergeixin molt ràpidament cap a 0, podem aconseguir que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\log 1/w(x)}{1+x^2}\, dx < +\infty$. D'aquesta manera si f es tal que $|f(x)| \leq w(x)$ i el suport de $\hat{f}$ és compacte aleshores com la cadencia dels punts va augmentant per n

grans, això vol dir que el suport de $\hat{f}$ no pot estar coningut en $[-b, b]$ per a cap $b > 0$, es a dir $f = 0$. En sentit positiu demostrarem el següent:

Proposició 2.14. *Sigui w un pes parell i decreixent en $[0, \infty)$. Si*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log 1/w(x)}{1+x^2}\, dx < +\infty,$$

aleshores w és un pes de Beurling-Malliavin. De fet es pot demostrar que per a tot $a > 0$, existeix una funció g amb support de diametre més petit que a i tal que $|\hat{g}(\zeta)| \le w(\zeta)$.

Demostració. Sigui $h(t) = cw(2t)\exp(-\sqrt{2t})$. És immediat que la integral logarítmica de h és finita. Per tant, existeix una funció en $H^1(\mathbb{R})$ de manera que $|f| = h$ (la funció externa). Podem suposar que hi ha nombres $a > 0$ arbitrariament petits tals que $\hat{f}(a) \neq 0$. Si no és així canviem f per $e^{i\tau x} f(x)$, amb τ él mínim del suport de $\hat{f}$. Com que h decreix molt ràpid, això vol dir que $\hat{f}$ és infinitament derivable. Prenem $g(\zeta) = \hat{f}(a-\zeta)\hat{f}(a+\zeta)$, on a està triada de manera que $g(0) \neq 0$. És fàcil veure que $\operatorname{supp} g \subset (-a, a)$ i a més $g = \hat{k}/(2\pi)$ on

$$k(x) = e^{-ixa} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) f(-t) e^{-2ita}\, dt.$$

Per un altre part com g és senar tenim que $\hat{g} = k/(2\pi)^2$ i per tant per a tot $x > 0$ tenim

$$(2\pi)^2 |\hat{g}(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)||f(t)|\, dt = \int_{\mathbb{R}} h(x-t)h(t)\, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{x/2} + \int_{x/2}^{\infty} \le h(x/2) \int_{-\infty}^{x/2} h(t)\, dt + h(x/2) \int_{x/2}^{+\infty} h(x-t)\, dt \le 2h(x)\|h\|_1 \le w(x),$$

si la constant c de la definició de h és prou petita. Per a $x < 0$ tenim la mateixa desigualtat i ja tenim la funció g que voliem. ♣

2.0.2 Funcions amb zeros profunds

Veiem una variant més del principi d'incertessa. Hem vist que una funció i la seva transformada no poden decaure molt ràpidament i simultaneament a prop de l'infinit. Veurem a continuació com la condició de decaure molt en l'infinit es pot substituir per el fet que una funció s'anul·li "molt" en un punt. Més concretament ens plantejem la següent qüestió. Suposem que f satisfà la condició següent: $|\hat{f}(w)| \le H(|w|)$ si $|w|$ és gran per una funció H que decau molt a l'infinit. És possible sota aquestes circumstancies que una funció f no idénticament nul·la tingui un zero d'ordre infinit en l'origen, es a dir per a tot $n > 0$, $f(t) = \mathcal{O}(t^n)$ quan $t \to 0$?.

Si això no és possible diem que H és una majorant determinant. La descripció de les majorants determinants no és completa. Com en molts dels problemes que hem tractat, en la descripció de les majorants determinants hi ha dos elements: Una condició de creixement que ve donada per la convergència o no de la integral logarítmica i una condició de regularitat. El teorema que veurem és el següent:

Teorema 2.15. *Sigui H una majorant determinant. Aleshores*

$$\int^{+\infty} \frac{\log|H(\zeta)|}{1+|\zeta|^2}\, d\zeta = -\infty.$$

Per un altre part si H té integral logarítmica divergent i si a més $H(\zeta)$ compleix per a tot $\zeta \geq c$:

$$\log \frac{1}{H(\zeta)} = A + \int_c^{\zeta} \frac{w(u)}{u}\, du, \qquad \lim_{u\to\infty} w(u) = +\infty,$$

per una funció w creixent i positiva, llavors H és una majorant determinant.

Demostració. Veiem com la divergéncia de la integral logarítmica és una condició necessaria. En efecte, sigui H una funció positiva i acotada en $\mathbb{R}^+$. Suposem que la integral logarítmica convergeix. Extenem la funció a tot $\mathbb{R}$ de forma parell. Definim $h(t) = H(t)\exp(-\sqrt{|t|})$. Està clar que $h \in L^1(\mathbb{R})$. Per tant ja sabem que existeix una funció externa $g \in H^1$ tal que $|g| = h$. Aleshores $\hat{f} = g$ i $f(x) = 0$ si $x \in (-\infty, 0)$. Per un altre part, com que g decau molt ràpidament en l'infinit, aleshores f és una funció $\mathcal{C}^\infty$ i la condició de zero profund es tradueix en que $f^{(n)}(0) = 0$. Això es cumpleix doncs s'anulla en tota una semirecta.

Abans de demostrar la suficiéncia, veiem com construir alguns exemples: La funció w que controla la condició de regularitat també controla el creixement. En efecte la integral logarítmica és divergent si i només si

$$\int^{\infty} w(u)/u^2 = +\infty.$$

Aixó es pot aconseguir prenent $w(u) = ku$, amb $k > 0$. Però aquest cas no és molt interesant, doncs el decaiement tan gros de $\hat{f}$ en l'infinit fa que f sigui holomorfa en un entorn de l'eix real i per tant no pugui tenir zeros profunds. Un cas més interessant és quan w és de la forma

$$w(u) = \frac{u}{\log u \cdot \log\log u \cdots \log\log\cdots\log u}.$$

En aquest cas hi ha funcions f que no admeten extensió holomorfa i tals que $|\hat{f}(\zeta)| \leq H(\zeta)$. Si diem $p(\zeta) = -\log H(\zeta)$, de la condició de regularitat es dedueix que $p(\zeta) \geq w(\sqrt{\zeta})\log\zeta)/2$ per ζ gran. Per tant l'ordre de decreixement de $H(\zeta)$ és infinit quan $\zeta \to \infty$. En conseqüéncia $f \in \mathcal{C}^\infty$ i existeixen tots els moments de tot ordre de $\hat{f}$. És ara un bon moment de recordar que són els moments d'una mesura.

Definició. Sigui μ una mesura $\mathbb{R}$ tal que $|x|^n \in L^1(d\mu)$. Aleshores es diu que existeix el moment d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de μ i val

$$m_n(\mu) = \int_{\mathbb{R}} x^n\, d\mu(x).$$

En el nostre cas com f és infinitament derivable, aleshores $m_n(\hat{f})$ existeix i val $f^n(0) = 0$ per hipòtesi. Per tant tenim que tots els moments de $\hat{f}$ són 0. Apliquem el següent lema:

Lema 2.16. *Si una mesura μ te tots els moments d'ordre n nuls, aleshores la seva transformada de Cauchy $C[\mu]$ compleix $z^n C[\mu] = C[z^n \mu]$ per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$.*

Demostració. Si tots els moments són 0, aleshores μ és ortogonal a tots els polinomis, pero el quocient $q(z) = (p(z) - p(\zeta))/(z - \zeta)$ és un polinomi per a qualsevol $\zeta \in \mathbb{C}$. Per tant

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \frac{p(x) - p(\zeta)}{x - \zeta}\, d\mu(x) = C[p\mu](\zeta) - p(\zeta)C[\mu](\zeta).$$

♣

Hem vist doncs que en el nostre cas

$$C[\hat{f}] = z^{-n} C[z^n \hat{f}] \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La demostració que farem és en la mateixa direcció que la del teorema de Beurling. Es a dir, volem demostrar que sota les hipótesis sobre H, es cumpleix

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log |C[\hat{f}](\zeta \pm i)|}{1 + \zeta^2}\, d\zeta = -\infty,$$

i com que ja sabem que $C[\hat{f}]$ és una funció holomorfa acotada en qualsevol semiplà estrictament superior i en tot semiplà estrictament inferior, això implica que $C[\hat{f}]$ és identicament nul·la. Per demostrar el nostre resultat només hem de veure que

$$C[\hat{f}](\zeta \pm i) \leq C K(\zeta) \zeta^k \qquad \zeta \to +\infty,$$

per algun $k > 0$. En efecte, com que la transformada de Cauchy de $\hat{f}$ commuta amb els monomis sabem que per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$:

$$2\pi |C[\hat{f}](\zeta \pm i)| \leq |\zeta \pm i|^{-n} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{f}(u)||u|^n}{|(u - \zeta) \pm i|}\, du \leq m_n(H) |\zeta|^{-n}, \tag{2.4}$$

on $m_n(H) = 2\int_0^\infty H(u) u^n\, du$. El teorema quedarà demostrat, doncs, si veiem el següent lema:

Lema 2.17. *Per a qualsevol ζ prou gran $\zeta > c$ de manera que $w(\zeta) \geq 3$, existeix un natural $n(\zeta)$ tal que*

$$m_n(H) \leq K \zeta^{n(\zeta)+3} H(\zeta)$$

on K no depen de ζ.

Demostració. Prenem $n(\zeta) = [w(\zeta)] - 2$. Trenquem la integral que defineix $m_n(H)$ en dos trossos

$$m_n(H)/2 = \int_0^c H(u) u^n\, du + \int_c^\infty H(u) u^n\, du = I_1 + I_2.$$

Farem acotacions diferents per I_1 i per I_2. Si diem $M = \sup_{[0,c]} H$, aleshores

$$I_1 \leq \frac{Mc^{n+1}}{n+1} \leq Mc(\frac{c}{\zeta})^n \zeta^n.$$

Com que w és creixent, llavors

$$\int_0^\zeta w(u)/u\,du \leq w(\zeta)\log(\zeta/c) \leq (n+3)\log(\zeta/c),$$

per tant,

$$n\log(c/\zeta) \leq 3\log(\zeta/c) - \int_0^\zeta (w(u)/u)\,du$$

i $(c/\zeta)^n \leq c^{-3}H(\zeta)\zeta^3 e^A$. Es a dir,

$$I_1 \leq Mc^{-2}\exp AH(\zeta)\zeta^{n+3},$$

que ja és una expressió com la que volem arribar a veure. Queda per estimar la integral I_2. Per fer-ho necessitem comprovar que per qualsevol $\zeta > c$,

$$\max_{u\geq c} H(u)u^{w(\zeta)} = H(\zeta)\zeta^{w(\zeta)}.$$

Això és una consequéncia de la condició de regularitat, doncs

$$\log(H(u)u^{w(\zeta)}) = -A - \int_c^u \frac{w(v)-w(\zeta)}{v}\,dv + w(\zeta)\log c,$$

i el màxim d'aquesta última funció s'assoleix en $u = \zeta$. Per tant la acotació de I_2 queda així:

$$I_2 \leq \int_c^\infty H(u)u^{w(\zeta)}u^{-2}\,du \leq \max_{u\geq c} H(u)u^{w(\zeta)} = H(\zeta)\zeta^{w(\zeta)} \leq H(\zeta)\zeta^{n+3}.$$

La acotació de I_2 també és del tipus desitjat i amb això es demostra el lema. ♣

Per finalitzar la demostració del teorema només cal agafar en (2.4) la tria de $n = n(\zeta)$ que ens dona el lema. ♣

2.1 Desigualtats d'incertesa logarítmiques

Veurem en aquesta secció una manera alternativa per mesurar la localització d'una funció i els corresponents principis d'incertesa.

Definició. Sigui ρ una densitat de probabilitat en $\mathbb{R}$. Es defineix la *entropia* de ρ com

$$E(\rho) = -\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\log\rho(x)\,dx.$$

Pot prendre tant el valor $+\infty$ com $-\infty$ o no estar definida. Si ρ te un pic $E(\rho)$ tendeix a ser molt negativa. En canvi si les cues en l'infinit decauen molt poc a poc la entropia tendeix a ser positiva. Es a dir $E(\rho)$ mesura quan localitzada está (quan més localitzada és la densitat, més petita és ρ). La entropia d'una mesura està relacionada amb la variança segons indica la següent proposició:

Proposició 2.18 (Shannon). *Si ρ és una funció de densitat amb variança finita, aleshores $E(\rho)$ està ben definida i*

$$E(\rho) \leq \frac{1}{2}\log(2\pi e V(\rho)).$$

Demostració. Si composem ρ amb una traslació cap de les quantitats ni a la dreta ni a l'esquerra de la desigualtat canvia. Per tant, podem suposar que la esperança de ρ és 0. A més si canviem $\rho(x)$ per $k\rho(kx)$ les dues magnituds disminueixen en $\log k$, així que podem soposar que $V(\rho) = 1$. Definim

$$\phi(x) = 2\pi e^{|x|^2/2}\rho(x), \qquad d\gamma(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-|x|^2/2}dx$$

de manera que $\int \phi d\gamma = 1$. Com que γ és una mesura de probabilitat i la funció $t\log t$ és convexa, podem aplicar la desigualtat de Jensen per a funcions convexes i tenim

$$\begin{aligned} 0 &= \int \phi\, d\gamma \log\left(\int \phi\, d\gamma\right) \leq \int \phi \log \phi\, d\gamma = \\ &= \int \rho(x)\Big(\frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{2}|x|^2 + \log\rho(x)\Big)\, dx = \\ &= \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{2}V(\rho) - E(\rho) = \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{2} - E(\rho). \end{aligned}$$

♣

Teorema 2.19 (Beckner-Hirschman). *Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ i $\|f\| = 1$, aleshores*

$$E(|f|^2) + E(|\hat{f}|^2) \geq 1 - \log 2.$$

Demostració. La desigualtat original de Hirschman era

$$E(|f|^2) + E(|\hat{f}|^2) \geq 0,$$

i és la que veurem a continuació. Sabem que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ i que $\|\hat{f}\|_2 \leq \|f\|_2$. Llavors per interpolació tenim la desigualtat de Haussdorff-Young $\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p$ amb $1 \leq p \leq 2$ i $1/p + 1/q = 1$. Aquesta desigualtat la podem reescriure com

$$\int |\hat{f}|^q \leq \Big(\int |f|^{q/(q-1)}\Big)^{q-1} \qquad q \geq 2. \tag{2.5}$$

Utilitzem el següent lema trivial

Lema 2.20. *Suposem que $f(t) \leq g(t)$ per a $a \leq t \leq b$ i $f(a) = g(a)$. Aleshores si f i g són derivables en a, llavors $f'(a) \leq g'(a)$.*

Com deiem apliquem aquest lema a la desigualtat (2.5) entenent que és una funció de q i avaluant en el punt $a = 2$ i obtenim el resultat desitjat. Per ser completament rigurosos cal que $\hat{f} \in L^q$ per un petit interval $q \geq 2$. Peró no és dificil eliminar aquesta restricció amb un argument de pas al límit.

El enunciat més precis del teorema s'obté amb el mateix argument peró enlloc de la desigualtat de Hausdorff-Young, cal utilitzar la desigualtat (molt delicada) de Beckner:

$$\|\hat{f}\|_q \leq p^{1/(2p)} q^{-1/(2q)} \|f\|_p \qquad 1 \leq p \leq 2,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Una demostració d'aquesta desigualtat es troba en [Bec75]. ♣

Si combinem els dos teoremes obtenim com a corol·lari la desigualtat de Heissemberg:

Corol·lari 2.21. *Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ i $\|f\|_2 = 1$, aleshores*

$$V(|f|^2)V(|\hat{f}|^2) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

La prova de la desigualtat de Heienberg era elemental. En canvi la de la desigualtat de entropia depen de resultats profunds com la desigualtat de Becker-Haussdorff-Young. Aquesta desigualtat d'entropia és una desigualtat coniderablement més poderosa, és una millora substancial sobre el teorema de Heisenberg. Per exemple es pot deduir la desigualtat logarítimica de Gross-Sobolev a partir d'ella [Bec95]:

$$\int |g|^2 \log |g| d\mu \leq \int |\nabla g|^2 d\mu,$$

on μ és la mesura de probabilitat: $d\mu = (2\pi)^{-1/2} e^{-|x|^2/2} dx$. Anem a demostrar aquesta última desigualtat. Definim la isometria $T : L^2(\mu) \to L^2(dx)$ com

$$Tg = (x) = 2^{1/4} e^{-\pi|x|^2} g(2\sqrt{\pi}x)$$

i sigui $\widetilde{g} = T^{-1}\mathcal{F}Tg$. De forma trivial $\|g\|^2 = \|\widetilde{g}\|^2$. Per un altre part si diem $f = Tg$ aleshores $\hat{f} = T\widetilde{g}$. Ens cal el següent lemma:

Lema 2.22. *Sigui $g \in L^2(d\mu)$ amb $\|g\|_2 = 1$, aleshores*

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |g(x)|^2 \, d\mu + \int_{\mathbb{R}} |\zeta|^2 |\widetilde{g}(\zeta)|^2 \, d\mu = 2 + 2 \int_{\mathbb{R}} |g'|^2 \, d\mu.$$

Demostració. Recordem que $\hat{f} = T\widetilde{g}$ i per tant

$$\int |\zeta|^2 |\widetilde{g}(\zeta)|^2 \, dmu(\zeta) = 4\sqrt{2}\pi \int |\eta|^2 |\widetilde{g}(2\sqrt{\pi}\eta)|^2 e^{-2\pi|\eta|^2} \, d\eta =$$
$$= 4\pi \int |\eta|^2 |\hat{f}(\eta)|^2 \, d\eta = \frac{1}{\pi} \int |f'(x)|^2 \, dx.$$

Per una altre part un càlcul directe ens dona

$$|f'(x)|^2 = 4\sqrt{2}\pi \left(|g'(2\sqrt{\pi}x)|^2 + \pi x^2|g(2\sqrt{\pi}x)|^2 - 2\sqrt{\pi}\,\mathrm{Re}\,\overline{g'(2\sqrt{\pi}x)}g(2\sqrt{\pi}x)x\right) e^{-2\pi x^2}.$$

Integrem per parts i resulta que

$$\int |f'(x)|^2\,dx = 2\pi \int |g'(x)|^2\,d\mu + 2\pi \int x^2|g(x)|^2 d\mu + 2\pi \int |g(x)|^2(-x^2+1)d\mu.$$

♣

Un cop tenim el lema, ara apliquem la desigualtat d'entropia a la funció $f = Tg$ i tenim

$$E(|Tg|^2) + E(|\widehat{Tg}|^2) \geq \log\frac{e}{2}.$$

Apliquem la definició d'entropia i apliquem el lema i resulta

$$\int |g|^2 \log|g|\,d\mu + \int |\tilde{g}|^2 \log|\tilde{g}|\,d\mu \leq \int |g'|^2\,d\mu.$$

Ara com que per la desigualtat de Jensen

$$2\int |\tilde{g}|^2 \log|\tilde{g}|\,d\gamma \geq \left(\int |\tilde{g}|^2\,d\gamma\right) \log \int |\tilde{g}|^2 d\gamma = 0,$$

conseguim la desigualtat de Sobolev. Veiem una última desigualtat logarímica de incertesa que també apareix a [Bec95]:

Teorema 2.23 (Beckner). *Donada $f \in L^2(\mathbb{R})$ es compleix*

$$\int |f(x)|^2 \log|x-a|\,dx + \int |\hat{f}(\zeta)|^2 \log|\zeta - b|\,d\zeta \geq (\psi(\frac{n}{4}) - \log\pi) \int |f(x)|^2\,dx,$$

sempre que la part de la esquerra estigui definida i on ψ és la derivada logarítmica de la funció Γ ($\psi(t) = \frac{d}{dt}[\ln\Gamma(t)]$).

Aquest resultat és conseqüencia del que s'anomena desigualtat de Pitt (que no demostrarem).

Teorema 2.24. *Sigui $0 \leq \alpha < n$, aleshores*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\zeta|^{-\alpha}|\hat{f}(\zeta)|^2\,d\zeta \leq C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} |x|^\alpha |f(x)|^2\,dx,$$

on

$$C_\alpha = \pi^\alpha \left[\Gamma(\frac{n-\alpha}{4})/\Gamma(\frac{n+\alpha}{4})\right]^2.$$

La demostració de la desigualtat logarítmica a partir de la desigualtat de Pitt es fa com en el cas de la entropia. Sabem que la desigualtat de Pitt en el cas $\alpha = 0$ és una igualtat i per tant si derivem respecte al parametre α i avaluem en $\alpha = 0$ tenim el que voliem.

Observem com de la desigualtat logarítmica podem deduir la desigualtat de Heisenberg. En efecte si $\|f\|_2 = 1$, per la desigualtat de Jensen tenim

$$\ln \left[\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |f(x)|^2 \, dx \int_{\mathbb{R}^n} |\zeta|^2 |\hat{f}(\zeta)|^2 \, d\zeta \right]^{1/2} \geq \psi(n/4) - \ln \pi.$$

En el cas $n = 1$, aquesta desigualtat sembla pitjor doncs $\ln(1/4) > \psi(1/4)$ i la desigualtat de Heisenberg és:

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^2 |f(x)|^2 \, dx \int_{\mathbb{R}} |\zeta|^2 |\hat{f}(\zeta)|^2| \, d\zeta \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Hi ha una sorpresa amagada, si utilitzem la desigualtat en totes les dimensions, es recupera la desigualtat de Heisenberg en dimensió 1! En efecte, prenem com a funció de n variables la funció $\prod_i f(x_i)$ amb $\|f\|_2 = 1$. En aquest cas el mateix càlcul que hem fet abans dona

$$\ln \left[16\pi^2 \int_{\mathbb{R}} |x|^2 |f(x)|^2 \, dx \int_{\mathbb{R}} |\zeta|^2 |\hat{f}(\zeta)|^2 \, d\zeta \right]^{1/2} \geq \psi(n/4) - \ln(n/4).$$

Si utilitzem la expressió integral de Gauss per ψ tenim

$$\psi(z) - \ln z = \int_0^\infty e^{-tz} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}} \right] dt \leq 0.$$

Si prenem el limit quan $n \to \infty$, aleshores obtenim la desigualtat de Heisenberg.

A diferència del principi de Heisenberg, la desigualtat (que és inmillorable) no s'assoleix per cap funció. Les gaussianes (que serien el candidat natural a extrem) assoleixen el valor crític assimptòticament. Es a dir, per a gaussianes, tenim

$$\int_{\mathbb{R}^n} \ln |x| |f(x)|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \ln |\zeta| |f(\zeta)|^2 \, d\zeta = (\psi(n/4) - \ln \pi + \beta(n/2)),$$

on

$$\beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1} \, dt,$$

i per tant $\beta(x) \to 0$ si $x \to \infty$.

2.2 Miscel·lania

2.2.1 Funcions d'ambigüitat del radar

Un radar emet un senyal electromagnetic que rebota en la diana i torna a l'aparell. El senyal es pot model·lar com una funció a valors complexos $f(t) = u(t) + iv(t)$ (on a més v és la transformada de Hilbert de u). La energia del senyal és $\|f\|_2^2$. Suposem que la freqüència de f està concentrada entorn de w (i que w és molt gran). Aleshores podem escriure $f(t) = f_0(t)e^{2\pi iwt}$ on f_0 oscil·lla poc respecte $e^{2\pi iwt}$. Sigui r la distància de la diana al radar i v la velocitat radial de aquesta $v = dr/dt$. Suposarem que f està concentrada en Δt que serà gran respecte w^{-1} però prou petit de manera que podem suposar que r i v són constants al llarg de Δt.

Un cop el senyal arriba a la diana, es reflectit i torna al radar on es mesurada. El temps de tornada és $\tau = 2r/c$ on c és la velocitat de propagació del senyal. A més degut a l'efecte Doppler les freqüències es dilaten per un factor $1 - 2v/c$. Podem doncs suposar que es trasladen en una $-\phi = -2wv/c$. Per tant el senyal que arriba de tornada és finalment de la forma

$$f_{\tau\phi}(t) = f(t-\tau)e^{-2\pi i\phi t}.$$

Si tenim dos objectes diferents que donen una senyal de tornada f_{τ_1,ϕ_1} i f_{τ_2,ϕ_2} respectivament que siguin molt similars, no permetra distingirlos. La diferència és

$$\int |f_{\tau_1,\phi_1} - f_{\tau_2,\phi_2}|^2\, dt = 2\int |f|^2\, dt - 2\,\mathrm{Re}\langle f_{\tau_1,\phi_1}, f_{\tau_2,\phi_2}\rangle.$$

Només la segona part depen de les dianes. Volem que la part real del producte escalar sigui petita. Recordem que $f(t) = f_0(t)e^{2\pi iwt}$ i per tant

$$\langle f_{\tau_1,\phi_1}, f_{\tau_2,\phi_2}\rangle = e^{2\pi iw(\tau_2-\tau_1)} \int f_0(t-\tau_1)\overline{f_0(t-\tau_2)}e^{2\pi i(\phi_2-\phi_1)t}\, dt.$$

Veiem que el que hi ha dins de la integral canvia poc enfront de petites perturbacions de τ_1 i τ_2. En canvi el factor que porta devant fa que oscilli molt enfront de petites perturbacions. Com volem que $\mathrm{Re}\langle f_{\tau_1,\phi_1}, f_{\tau_2,\phi_2}\rangle$ sigui petit de manera estable llavors cal que $|\mathrm{Re}\langle f_{\tau_1,\phi_1}, f_{\tau_2,\phi_2}\rangle|$ sigui petit. Per tant si diem $\tau = \tau_1 - \tau_2$ i $\phi = \phi_1 - \phi_2$, aleshores

$$\mathrm{Re}\langle f_{\tau_1,\phi_1}, f_{\tau_2,\phi_2}\rangle = e^{-2\pi i\phi\tau_1} \int f(t)\overline{f(t+\tau)}e^{-2\pi i\phi t}\, dt.$$

Això justifica que a la funció

$$A(\tau,\phi) = \int f(t)\overline{f(t+\tau)}e^{-2\pi i\phi t}\, dt,$$

se la coneix com a funció d'ambigüitat del radar. Si aquesta funció és gran en un punt (τ,ϕ) aleshores no podem distingir dos objectes de manera que les seves diferències de posició i velocitat corresponen a (τ,ϕ). És immediat comprovar que

$$\int |A(\tau,\phi)|^2\, d\tau d\phi = \|f\|_2^4.$$

Per tant fixada un senyal f amb una energia donada, hi ha una quantitat fixa d'ambigüitat que no es pot eliminar.

2.2.2 D'altres aplicacions

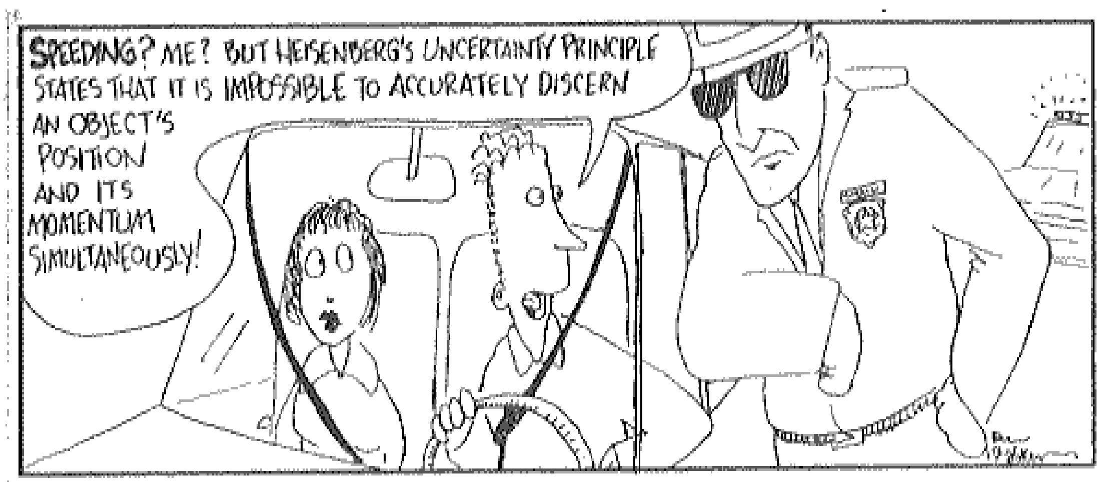

Figura 2.5: Aplicacions del principi d'incertesa

Bibliografia

[AB77] W.O. Amrein and A.M. Berthier, *On support properties of L^p-functions and their Fourier transform*, J. Funct. Anal. **24** (1977), no. 3, 258–267.

[Ahl73] L. V. Ahlfors, *Conformal invariants*, McGraw-Hill, New York, N.Y., 1973.

[Bec75] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. of Math **102** (1975), no. 2, 159–182.

[Bec95] W. Beckner, *Pitt's inequality and the uncertainty principle*, Proc. Amer. Math. Soc. **23** (1995), no. 6, 1897–1905.

[Ben85] M. Benedicks, *On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure*, J. Math. Anal. Appl. **106** (1985), 180–183.

[Far78] W. G. Faris, *Inequalities and uncertainty principles*, J. Math. Phys. **19** (1978), 461–466.

[FS97] G. B. Folland and A. Sitaram, *The uncertainty principle: A mathematical survey*, J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), 207–238.

[Gar81] J. Garnett, *Bounded analytic functions*, Mathematics, vol. 96, Academic Press, San Diego, California, 1981.

[HJ94] V. Havin and B. Jöricke, *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*, A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 28, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Hör91] Lars Hörmander, *A uniqueness theorem of beurling for Fourier transform pairs*, Ark. Mat. **29** (1991), no. 2, 237–240.

[Mor34] G.W. Morgan, *A note on Fourier transforms*, J. London Math. Soc. **9** (1934), no. 3, 187–192.

[MZ96] J. L. Melenk and G. Zimmermann, *Functions with time and frequency gaps*, J. Fourier Anal. Appl. **2** (1996), no. 6, 611–614.

[Rud70] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, London, 1970.

[VL74] Y.F. Sereda V.N. Logvinenko, *Equivalence of norms in spaces of entire functions of exponential type*, Teor. funktsii, funkt. analiz i ich prilozhenia **20** (1974), 62–78.

[You80] R. M. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, Academic Press, New York, N.Y., 1980.