Análisis IV

Joaquín M. Ortega Aramburu

Septiembre de 1999
Actualizado en Julio de 2001

Índice General

Capítulo 1

Integral de Riemann

Se trata de dar una introducción a la integral de Riemann de funciones de varias variables. Veremos también una primera noción de "medida de conjuntos", el llamado contenido de Jordan, que coincide con la integral de Riemann de la función característica del conjunto. Se harán notar algunas de las insuficiencias que presentan estas nociones de medida y de integral, lo que lleva a introducir la integración de Lebesgue.

Supondremos un conocimiento previo de las nociones básicas de la integral de Riemann para funciones de una variable.

1.1 Integración de Riemann

Consideraremos funciones de varias variables a valores reales y acotadas. Para simplificar las notaciones supondremos que el número de variables es dos, aunque esto no es esencial en la teoría. Supondremos que las funciones están definidas en un intervalo cerrado $I = [a, b] \times [c, d]$.

Análogamente a como se hace para estudiar la teoría de la integración de Riemann para funciones de una variable, consideraremos "particiones" Π del intervalo I en subintervalos. Estos serán de la forma $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, ...n$, $j = 1, ..., m$ donde x_i, y_i son puntos que cumplen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d$. Definiremos la medida de estos intervalos mediante el producto de las longitudes de sus lados, es decir, $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ y la denotaremos por $m(I_{ij})$. El supremo y el ínfimo de los valores de la función sobre estos intervalos se denotarán respectivamente $M_{ij} = \sup_{(x,y)\in I_{ij}} f(x, y)$ y $m_{ij} = \inf_{(x,y)\in I_{ij}} f(x, y)$.

Definición 1.1. *Se llama suma superior de la función f asociada a la partición Π y la denotaremos por $S(f, \Pi)$ a $\sum M_{ij} m(I_{ij})$ donde la suma está extendida a todos los intervalos de la partición. Análogamente, la suma inferior de f asociada a la misma partición es $s(f, \Pi) = \sum m_{ij} m(I_{ij})$.*

Obsérvese que si f es positiva, $S(f, \Pi)$ es una "aproximación" por exceso del "volumen" del conjunto

$$\left\{(x, y, z) \in R^3; o \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in I\right\}.$$

La suma inferior $s(f,\Pi)$ será una aproximación por defecto del citado "volumen".

Obviamente $s(f,\Pi) \leq S(f,\Pi)$. Más generalmente, para diversas particiones, cualquier suma inferior es menor o igual que cualquier suma superior. Para probarlo es cómodo disponer de la siguiente relación en el conjunto de las particiones.

Definición 1.2. *Dadas dos particiones* Π *y* Π_1 *de* $I = [a,b] \times [c,d]$ *se dice que* Π_1 *es más fina que* Π *si todos los puntos que definen ésta en* $[a,b]$ *y en* $[c,d]$*, pertenecen también a la que define* Π_1.

Dadas dos particiones Π_1*y* Π_2 *se denomina partición unión a la partición generada por los puntos que definen ambas particiones.*

Lema 1.1. *Sea* Π *una partición de* I *y sea* Π_1 *la partición que se obtiene a partir de* Π *añadiendo un punto* $\widetilde{x_i}$ *del intervalo* $[a,b]$*. Entonces* $s(f,\Pi) \leq s(f,\Pi_1)$*,* $S(f,\Pi_1) \leq S(f,\Pi)$*. Un resultado análogo se obtiene si se añade un punto del intervalo* $[c,d]$.

Demostración. Sea $x_{i-1} < \widetilde{x_i} < x_i$. Los intervalos I_{lj}, $l \neq i$, al pasar de la partición Π a la Π_1 no varían, mientras que los intervalos I_{ij} quedan sustituidos por dos, $\widetilde{I_{ij}} = [x_{i-1}, \widetilde{x_i}] \times [y_{j-1}, y_j]$, $\widetilde{\widetilde{I_{ij}}} = [\widetilde{x_i}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Se cumple trivialmente que $m(I_{ij}) = m(\widetilde{I_{ij}}) + m(\widetilde{\widetilde{I_{ij}}})$. Puesto que

$$\inf_{(x,y)\in I_{ij}} f(x) \leq \inf_{(x,y)\in \widetilde{I_{ij}}} f(x), \quad \inf_{(x,y)\in I_{ij}} f(x) \leq \inf_{(x,y)\in \widetilde{\widetilde{I_{ij}}}} f(x)$$

se sigue que $s(f,\Pi) \leq s(f,\Pi_1)$. Análogamente $S(f,\Pi_1) \leq S(f,\Pi)$.

Si el punto que se añade es del intervalo $[c,d]$ la prueba de las desigualdades es enteramente análoga.

□

Teorema 1.2. *Sean* Π *y* Π_1*dos particiones del intervalo* I*. Se cumple*

$$s(f,\Pi) \leq S(f,\Pi_1).$$

Demostración. Consideremos la partición $\Pi \cup \Pi_1$. Reiterando el lema anterior tendremos

$$s(f,\Pi) \leq s(f,\Pi \cup \Pi_1) \leq S(f,\Pi \cup \Pi_1) \leq S(f,\Pi_1).$$

□

Vemos que el conjunto de las sumas inferiores está acotado superiormente por cualquier suma superior. Análogamente, el conjunto de las sumas superiores está acotado inferiormente por cualquier suma inferior. Esto lleva a las siguientes definiciones.

Definición 1.3. *Se llama integral inferior de* f *(resp integral superior) y se denota por* $\underline{\int} f$ *(resp.* $\overline{\int} f$*) a*

$$\underline{\int} f = \sup_{\Pi} s(f,\Pi)$$

$$\overline{\int} f = \inf_{\Pi} S(f,\Pi).$$

Es inmediato comprobar que $\underline{\int} f \leq \overline{\int} f$. Es natural considerar el caso en que tengamos igualdad.

Definición 1.4. *Diremos que una función f, definida en I, acotada, es integrable en el sentido de Riemann (brevemente integrable Riemann) si $\underline{\int} f = \overline{\int} f$. A este valor se le denomina integral de f y se denotará $\int f$. Si se quiere explicitar el intervalo I se escribirá $\int_I f$.*

Veamos un criterio elemental de integración Riemann.

Teorema 1.3. *Sea f una función definida en un intervalo I, acotada. La función es integrable en el sentido de Riemann si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición Π de I tal que*

$$S(f, \Pi) - s(f, \Pi) < \varepsilon.$$

Demostración. Si f es integrable Riemann, para cada $\varepsilon > 0$ existen particiones Π_1 y Π_2 tales que

$$S(f, \Pi_1) - \int f < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int f - s(f, \Pi_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ya que $\int f$ es el ínfimo de las sumas superiores y el supremo de las inferiores. De aquí se deduce que

$$S(f, \Pi_1) - s(f, \Pi_2) < \varepsilon.$$

Sea Π es una partición mas fina que Π_1 y Π_2. Esto implica que

$$S(f, \Pi) - s(f, \Pi) < S(f, \Pi_1) - s(f, \Pi_2) < \varepsilon$$

como queríamos probar.

Recíprocamente, si se cumple esta condición se tendrá

$$\overline{\int} f - \underline{\int} f \leq S(f, \Pi) - s(f, \Pi) < \varepsilon.$$

Puesto que esta desigualdad es válida para todo $\varepsilon > 0$ se sigue que $\overline{\int} f = \underline{\int} f$.

□

Como consecuencia de este criterio vamos a comprobar la integrabilidad de las funciones continuas.

Teorema 1.4. *Toda función continua en un intervalo I es integrable Riemann.*

Demostración. Veamos que se cumple el criterio anterior. Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que la función por estar definida en un intervalo cerrado y ser continua será uniformemente continua. Existirá $\delta > 0$ tal que si $|x_1 - x_2| < \delta$ y $|y_1 - y_2| < \delta$ se cumplirá $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon_1}{(b-a)(d-c)}$, con $\varepsilon_1 < \varepsilon$.

Sea Π una partición tal que $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, $|y_j - y_{j-1}| < \delta$ para todo i y j . Se tendrá

$$M_{ij} - m_{ij} \leq \frac{\varepsilon_1}{(b-a)(d-c)} < \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$$

y por tanto $S(f,\Pi) - s(f,\Pi) < \varepsilon$.

□

Ejemplo 1.1. *1. Consideremos la función definida en $[0,1] \times [0,1]$ tal que vale 0 sobre los puntos de coordenadas racionales y 1 sobre los otros puntos. Esta función no es integrable en el sentido de Riemann ya que toda suma superior vale 1 y toda suma inferior vale 0.*

2. La función χ definida en $I = [-1,1] \times [-1,1]$ por $\chi(x) = 1$ si $\|x\| \leq 1$ y $\chi(x) = 0$ si $\|x\| > 1$ es integrable Riemann. Para cada partición Π de I llamemos Π' al subconjunto de los elementos que tienen intersección no nula con la frontera de $\{x \in R^2;\ \|x\| \leq 1\}$. Es fácil ver que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición Π tal que $\sum_{I_i \in \Pi'} m(I_i) < \varepsilon$. Esto nos da la integrabilidad de la función.

La noción de integrabilidad Riemann, como en el caso de funciones de una variable, puede darse en términos de límites de sumas de Riemann.

Definición 1.5. *Sea Π una partición del intervalo I. Consideremos un punto en cada uno de los intervalos de la partición $\varsigma_{ij} \in I_{ij}$. A la suma $\sum f(\varsigma_{ij}) m(I_{ij})$ se le denomina suma de Riemann asociada a la partición y a estos puntos. Se denota por $R(\varsigma_{ij}, \Pi, f)$.*

Nótese que $s(f,\Pi) \leq \sum f(\varsigma_{ij}) m(I_{ij}) \leq S(f,\Pi)$.

Teorema 1.5. *Una función f definida en un intervalo I, acotada, es integrable Riemann si y solamente si existe un número L tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición Π_0 de I tal que si Π es más fina que Π_0 toda suma de Riemann correspondiente a Π cumple*

$$|R(\varsigma_{ij}, \Pi, f) - L| < \varepsilon.$$

El número L coincidirá con la integral de f.

No daremos la demostración ya que es análoga a la de la proposición correspondiente para funciones de una variable. También, como en el caso de una variable, puede sustituirse la anterior noción de límite por el límite de sucesiones de sumas de Riemann asociadas a sucesiones de particiones tales que $\max |x_i - x_{i-1}| \to 0$ y $\max |y_j - y_{j-1}| \to 0$.

De este teorema es fácil deducir que si f y g son integrables Riemann y $k \in R$ también son integrables $f + g$ y kf y se cumple

$$\int (f+g) = \int f + \int g,\ \int kf = k \int f.$$

Tampoco daremos las demostraciones ya que son idénticas a las correspondientes para funciones de una variable.

Si f es integrable y toma sus valores en $[-K, K]$ y g es continua en este intervalo entonces la composición $g \circ f$ es integrable. Una vez más nos remitiremos a la demostración para funciones

de una variable. En particular el cuadrado de una función integrable es integrable y, en consecuencia, el producto de dos funciones integrables $fh = \frac{1}{2}\left((f+h)^2 - f^2 - h^2\right)$ es integrable. La misma proposición puede servir para probar que si f es integrable, también lo es $|f|$. Por otra parte es inmediato comprobar que si f_1, f_2 son funciones integrables tales que $f_1 \leq f_2$, se tiene $\int f_1 \leq \int f_2$. En particular, si f es integrable, se cumple $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.

En la teoría de la integración es necesario disponer de teoremas que permitan "pasar al límite bajo el signo integral". Un teorema natural en este contexto es el siguiente.

Teorema 1.6. *Sea f_n una sucesión de funciones integrables Riemann en I que convergen uniformemente hacia una función f. Entonces f es integrable Riemann y $\int f = \lim \int f_n$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Existirá un n tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4m(I)}$, para cada $x \in I$. Puesto que f_n es integrable existirá una partición Π tal que $S(f_n, \Pi) - s(f_n, \Pi) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tendremos entonces

$$\begin{aligned} S(f,\Pi) - s(f,\Pi) &< S(f,\Pi) - S(f_n,\Pi) + s(f_n,\Pi) - s(f,\Pi) \\ +S(f_n,\Pi) - s(f_n,\Pi) &< \frac{\varepsilon}{4m\,(I)} m\,(I) + \frac{\varepsilon}{4m\,(I)} m\,(I) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto da la integrabilidad de f. Por otra parte, puesto que $|f_n - f| < \varepsilon$ para $n > n_0$, para estos n

$$\left|\int f - \int f_n\right| = \left|\int (f - f_n)\right| \leq \int |f - f_n| \leq \int \varepsilon = \varepsilon m(I).$$

Esto implica que $\int f = \lim \int f_n$.

□

Para integrales de funciones de varias variables una técnica importante que permite reducir su cálculo al de integrales de funciones de una variable es la de las integrales iteradas. Veamos un caso sencillo de la misma.

Teorema 1.7. *Sea f una función definida en un intervalo $I = [a,b] \times [c,d]$, acotada. Si existe la integral $\int_I f$ y la integral iterada $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$, ambas coinciden.*

Demostración. Sea Π una partición de $[a,b] \times [c,d]$. Siguiendo las notaciones anteriores son inmediatas las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} s(f,\Pi) &= \sum_i \sum_j m_{ij} m(I_{ij}) = \sum_{i,j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} m_{ij} dy \leq \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \\ &\leq \sum_i \sum_j M_{ij} m(I_{ij}) = S(f,\Pi) \end{aligned}$$

$$s(f,\Pi) \leq \int_I f \leq S(f,\Pi)$$

Puesto que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición Π tal que $S(f,\Pi) - s(f,\Pi) < \varepsilon$ se tendrá que

$$\left|\int_I f - \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy\right| < \varepsilon$$

y por tanto coinciden.

□

Corolario 1.8. *Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]\times[c,d]$. Se cumple*

$$\int_I f = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Demostración. Es suficiente aplicar el teorema anterior teniendo en cuenta que toda función continua es integrable y que $\int_c^d f(x,y)dy$ es una función continua en x y por tanto integrable.

□

Ejemplo 1.2. *1.* $\int_{[0,1]\times[0,2]} x^2y = \int_0^1 dx \int_0^2 x^2ydy = \int_0^1 x^2\frac{4}{2}dx = \frac{2}{3}$.

2. Ya vimos que si D es $\{x\in R^2;\ \|x\|\leq 1\}$ la función característica de este conjunto χ_D, es decir, la función que vale 1 en D y 0 en su complementario es integrable. Por otro lado las integrales reiteradas existen

$$\int dx \int \chi_D dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \pi.$$

Tendremos, en consecuencia que $\int \chi_D = \pi$.

1.2 Contenido de Jordan

Se trata de dar una noción de área de un conjunto de R^2 o en general de volumen n-dimensional de un subconjunto de R^n. Consideraremos para simplificar las notaciones, como hicimos en la sección anterior dedicada a la integral de Riemann, que la dimensión n es 2. Conocida la medida de un intervalo como el producto de las longitudes de sus lados, es natural extender esta noción a las uniones finitas de intervalos $F=\cup_{i=1}^r I_i$ con interiores disjuntos dos a dos en la forma $m(F)=\sum_{i=1}^r m(I_i)$. Esta definición no depende de la particular descomposición de F en intervalos que se haya utilizado. A la colección de estos conjuntos F que, de hecho, son uniones finitas de polígonos cerrados de lados paralelos a los ejes la denominaremos $\mathcal{F}$. Es fácil ver que si F_1, $F_2\in\mathcal{F}$ y $F_1\subset F_2$ entonces $m(F_1)\leq m(F_2)$. Si se quiere dar una noción de medida para conjuntos más generales, una forma natural de hacerlo es la de aproximarlos por estos conjuntos de $\mathcal{F}$. Esto lleva a la noción de contenido interior y exterior.

Definición 1.6. *Sea E un conjunto acotado de R^2. Llamaremos contenido exterior de E (resp. interior) y lo denotaremos por $c_e(E)$ (resp. $c_i(E)$) a*

$$c_e(E) = \inf_{E\subset F,\, F\in\mathcal{F}} m(F)$$
$$\textit{resp. } c_i(E) = \sup_{F\subset E, F\in\mathcal{F}} m(F)$$

Si $c_e(E)=c_i(E)$ diremos que puede definirse el contenido de Jordan del conjunto E, o simplemente, que tiene contenido y lo escribiremos $c(E)=c_e(E)=c_i(E)$.

Obsérvese que en la definición de contenido exterior podría tomarse el ínfimo de $m(F)$ únicamente para los elementos de $\mathcal{F}$ que en su interior contienen a E. Basta tener en cuenta que para cada $\varepsilon > 0$ y cada intervalo cerrado J existe otro J_1 que contiene en su interior a J y tal que $m(J_1) < m(J) + \varepsilon$.

Es inmediato comprobar que un conjunto E tiene contenido si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $F_1 \subset E \subset F_2$ y $m(F_2) - m(F_1) < \varepsilon$. Tras la observación del párrafo anterior la condición $E \subset F_2$ puede ser sustituida por E contenido en el interior de F_2.

Ejemplo 1.3. *1. Desde luego para un intervalo I se tiene $c_i(I) = c_e(I) = m(I)$. Si en lugar de considerar un intervalo I cerrado se consideran intervalos abiertos o intervalos del tipo $\prod [a_i, b_i)$ es inmediato comprobar que también tienen contenido definido y que su valor es el producto de las longitudes de sus lados.*

2. $Q \cap [0,1]$ no admite contenido unidimensional. En efecto, es fácil comprobar que $c_e(Q \cap [0,1]) = 1$, mientras que $c_i(Q \cap [0,1]) = 0$.

El siguiente teorema nos expresa la relación entre el concepto de contenido y la integral de Riemann.

Teorema 1.9. *Un conjunto E acotado tiene contenido si y sólo si χ_E es integrable Riemann. En este caso $c(E) = \int \chi_E$.*

Demostración. Sea $E \subset I$. Supongamos que χ_E es integrable. Dado $\varepsilon > 0$ existe una partición Π de I tal que

$$S(\chi_E, \Pi) - s(\chi_E, \Pi) < \varepsilon.$$

Consideremos ahora F_1 la unión de los intervalos de la partición contenidos en E y F_2 la unión de los intervalos que tienen intersección no vacía con E. Tendremos

$$m(F_1) = s(\chi_E, \Pi) \text{ y } m(F_2) = S(\chi_E, \Pi).$$

De aquí $F_1 \subset E \subset F_2$ y $m(F_2) - m(F_1) < \varepsilon$. Entonces E tiene contenido y éste coincide con la integral de χ_E.

Recíprocamente, supongamos que E tiene contenido. Dado $\varepsilon > 0$, existirán $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \subset E \subset F_2$ y $m(F_2) - m(F_1) < \varepsilon$. Si F_1 consiste en la unión de los intervalos $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ consideremos la partición Π_1 de I definida por los puntos x_i e y_j. Tendremos $m(F_1) \leq s(\chi_E, \Pi_1)$. Si hacemos lo propio con F_2 obtendremos una partición Π_2 tal que $S(\chi_E, \Pi_2) \leq m(F_2)$. Tendremos entonces $S(\chi_E, \Pi_2) - s(\chi_E, \Pi_1) \leq m(F_2) - m(F_1) < \varepsilon$. De aquí que χ_E es integrable y que su integral es $m(E)$.

□

Ejemplo 1.4. *1. Veamos que el subconjunto de R^2 definido por*

$$E = \left\{(x,y) \in R^2; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\right\}$$

tiene contenido. En efecto, sea F_1 la unión de los rectángulos $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[0, 1 - \frac{i}{n}\right]$, $i = 1, ..., n$ y sea F_2 la correspondiente unión de los rectángulos $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[0, 1 - \frac{i-1}{n}\right]$.

Tendremos $F_1 \subset E \subset F_2$ y $m(F_2) - m(F_1) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Por tanto existe el contenido de E o, lo que es equivalente, χ_E es integrable. El valor de la integral puede obtenerse o bien como el límite de las medidas de F_1 al tomar límite en n, o bien como la integral iterada $\int_0^1 dx \int_0^1 \chi_E(x,y)dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = \frac{1}{2}$.

2. *Ya vimos que la función característica del disco unidad en R^2 es integrable. Luego este disco tiene contenido de Jordan definido y vale π.*

La noción de contenido es aditiva en el sentido de que si F_1 y F_2 son dos conjuntos disjuntos y con contenido, entonces $c(F_1 \cup F_2) = c(F_1) + c(F_2)$. Es suficiente tener en cuenta la propiedad de la aditividad de la integral y que $\chi_{F_1 \cup F_2} = \chi_{F_1} + \chi_{F_2}$.

Si F_1 y F_2 tienen contenido también lo tiene la intersección pues $\chi_{F_1 \cap F_2} = \chi_{F_1} \cdot \chi_{F_2}$.

Si dos conjuntos no necesariamente disjuntos tienen contenido, también lo tiene la unión ya que $\chi_{F_1 \cup F_2} = \chi_{F_1} + \chi_{F_2} - \chi_{F_1 \cap F_2}$. En este caso se cumple

$$c\left(F_1 \cup F_2\right) = \int \chi_{F_1 \cup F_2} \leq \int \chi_{F_1} + \int \chi_{F_2} = c\left(F_1\right) + c\left(F_2\right).$$

La noción de conjunto con contenido permite también definir una integral de Riemann de una función f definida en un conjunto $E \subset I$ con contenido definido como la integral de $\chi_E f$, ya que el producto de dos funciones integrables es integrable. La escribiremos $\int_E f = \int_I \chi_E f$. Conviene observar que esta definición no depende del particular intervalo I utilizado en la definición.

Una vez que hemos definido la noción de contenido para conjuntos más generales que los intervalos pudiera pensarse en considerar en la definición de integral, particiones del intervalo de definición no tan sólo en subintervalos sino en conjuntos para los que esté definido su contenido. Concretamente, pueden considerarse particiones $I = \cup A_i$, $A_i \cap A_j = \phi$ si $i \neq j$, con A_i conjuntos para los que está definido el contenido. Si s_i y S_i son respectivamente el supremo e ínfimo de la función f sobre A_i , se podrán definir unas sumas inferiores y superiores mediante $\sum s_i c(A_i)$ y $\sum S_i c(A_i)$. El supremo de estas sumas inferiores nos dará una integral inferior y el ínfimo de las sumas superiores una integral superior. En el caso de que ambas coincidan tendremos una noción de función integrable y de integral. Se puede comprobar que este proceso da lugar al mismo tipo de funciones integrables que las de Riemann y a la misma integral. Es por ello que no proseguiremos en esta dirección. No obstante, lo interesante de la construcción es hacer patente cómo la posibilidad de medir más conjuntos puede conducir a una nueva teoría de la integración. Si bien en este caso, partiendo del concepto de contenido, no lleva a una integral más general que la de Riemann, si tuviésemos una noción de medida más amplia que la de contenido, podríamos obtener una noción de integral más general. Como veremos esta es una de las ideas básicas de la integración de Lebesgue que estudiaremos en los capítulos siguientes.

1.3 Insuficiencias de la noción de contenido de Jordan y de integral de Riemann

Uno de los problemas básicos de la noción de contenido, ideada para medir conjuntos, es la limitación de los conjuntos a los que se puede aplicar. Si quisiésemos medir toda clase de conjuntos

utilizando por ejemplo el contenido exterior o bien el contenido interior el resultado sería una aplicación no aditiva. Por ejemplo, $Q \cap [0,1]$ y su complementario en $[0,1]$ tienen contenido exterior 1, son disjuntos, y su unión vuelve a tener contenido exterior 1. Al considerar únicamente conjuntos con contenido definido esta noción resulta ser ya aditiva pero no abarca todos los conjuntos que sería de desear. Por ejemplo, no todos los abiertos acotados tienen contenido definido. Consideremos el subconjunto de R definido por $A = \cup_{n\geq 1}\left(a_n - \frac{1}{2^{n+2}}, a_n + \frac{1}{2^{n+2}}\right)$ donde a_n recorre $Q \cap [0,1]$. Obsérvese que si $F \in \mathcal{F}$, $F \subset A$, mediante un número finito de los intervalos $\left(a_n - \frac{1}{2^{n+2}}, a_n + \frac{1}{2^{n+2}}\right)$ se recubrirá F y tendremos que $m(F) \leq \sum_{n\geq 1} \frac{2}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}$. De aquí que $c_i(A) \leq \frac{1}{2}$. Por otro lado, si $A \subset F,\ F \in \mathcal{F}$, como $Q \cap [0,1] \subset F$, se tendrá $m(F) \geq 1$ y, por tanto, $c_e(A) \geq 1$.

Otra limitación del concepto de contenido es que, si bien es finitamente aditivo, no es numerablemente aditivo. Por ejemplo cada punto de R tiene contenido unidimensional cero. Sin embargo una unión numerable de puntos como $Q \cap [0,1]$ no tiene contenido definido. Por último esta noción hace referencia únicamente a conjuntos acotados. No puede asignarse un contenido a un conjunto como $\cup_{n\geq 1}\left[n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}\right]$ al que sería natural asignarle una medida $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{2^n} = 2$. Sería entonces conveniente disponer de una noción de medida de conjuntos que extendiese la noción de contenido, que permitiese medir los conjuntos abiertos y cerrados acotados y que tuviese la propiedad de la aditividad numerable, es decir, que la unión numerable de conjuntos disjuntos dos a dos que se pudieran medir, tuviese por medida la suma de la serie de las medidas.

Problemas del mismo tipo aparecen cuando se considera la integral de Riemann. Las funciones características de los abiertos o de los cerrados en general no son integrables y, por tanto, en general no se puede hablar de la integral de Riemann sobre un abierto o sobre un compacto.

Existen otras limitaciones. Por ejemplo, existen problemas con la "completitud" en el siguiente sentido. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en $[a,b]$ que cumple una condición del "tipo de Cauchy", es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $\int |f_n - f_m| < \varepsilon$ para $n, m > n_0$. No se deduce entonces la existencia de una función f límite de $\{f_n\}$ en el sentido de que para cada $\varepsilon > 0$, $\int |f_n - f| < \varepsilon$ para n mayor que un cierto n_0. Por otro lado, en el contexto de la integral de Riemann, los teoremas de paso al límite bajo el signo integral deben establecerse en condiciones demasiado restrictivas. Estas, entre otras razones, muestran la insuficiencia de la noción de integral de Riemann. Una solución a estos problemas viene dada por la integración de Lebesgue. Una introducción natural de ésta pasa por el estudio de la medida de Lebesgue, que extenderá la noción de contenido de Jordan.

1.4 Ejercicios

1. Halla, cuando exista, el contenido 2-dimensional de los siguientes conjuntos

$$\left\{(x,y) \in R^2;\, x^2 + y^2 < 1\right\}.$$

$$\left\{(x,0) \in R^2; 0 < x \leq 1\right\}$$

$$\left\{(x,y) \in R^2; |y| \leq |x \sin x|\ ,\ 0 < x \leq 2\pi\right\}$$

$$[0,1] \times ([0,1] \cap Q)\,.$$

2. Sea $f : [1,2] \to R$ definida por $f(x) = 0$ si x es irracional y $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ donde ésta es una fracción irreducible. Demuestra que f es integrable y que su integral vale cero.

3. Calcula los siguientes límites expresándolos como sumas de Riemann

$$\lim \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{4n+m}$$

$$\lim \sum_{m=1}^{n} \frac{2n\,(n+m)}{n^3}.$$

4. Di para qué valores de α el siguiente límite es finito

$$\lim_{n} \int_1^n \frac{dx}{x\,|x-2|^{\alpha}}.$$

5. Sea f una función definida en $[0,1]$ monótona y acotada. Prueba que

$$\lim \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n}{n}\right)\right) = \int_0^1 f$$

6. Calcula $\int_{[0,1]\times[0,1]} y \sin xy$.

7. Sea f continua en R^2. Invierte el orden de integración en

   (a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx$

   (b) $\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\,dydx$

   (c) $\int_0^1 \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dydx$

8. Calcula

   (a) $\int_A x$ donde A es la región acotada limitada por las curvas $x = y^2$, $x = -y^2 + 1$.

   (b) $\int_A |x-y|$ donde $A = \left\{(x,y) \in [0,1] \times [0,1]\,;\; xy \geq \frac{1}{2}\right\}$.

   (c) $\int_A \max(x,y)$ donde $A = \{(x,y)\,;\; x^2 + y^2 \leq 1\}$

1.5 Apéndice. Criterio de Lebesgue de integración Riemann.

Se trata de dar un teorema que caracteriza las funciones integrables en el sentido de Riemann en términos del "tamaño" del conjunto de puntos de discontinuidad de la función.

Definición 1.7. *Un subconjunto de R^n se dice que tiene n-medida cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento del mismo formado por una colección numerable de intervalos abiertos cuya suma de medidas es menor que ε.*

Teorema 1.10. *Sea f una función definida en un intervalo cerrado I de R^n y acotada. La función es integrable Riemann si y sólo si el conjunto de puntos de discontinuidad es de medida nula.*

Demostración. Antes de pasar a la demostración recordemos el concepto de oscilación de una función. Denominamos oscilación de f en un conjunto A a la diferencia

$$\sup\{f(x), x \in A\} - \inf\{f(x), x \in A\}.$$

La escribiremos $O(f, A)$. Se llama oscilación en x de una función f definida en D a

$$\inf_{\varepsilon>0} O(f, B(x, \varepsilon) \cap D).$$

El conjunto de puntos de discontinuidad de una función es la unión de

$$D_n = \left\{x \in D;\, O(f, x) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Sea f integrable en I. Veamos que los conjuntos D_n tienen medida cero. Sea $\varepsilon > 0$. Existe una partición Π de I tal que $S(f, \Pi) - s(f, \Pi) < \frac{\varepsilon}{n}$. Sea Π' el conjunto de intervalos de la partición que en su interior tienen algún punto de D_n. Si I_i pertenece a Π' se tiene $O(f, I_i) \geq \frac{1}{n}$. Por lo tanto

$$\frac{\varepsilon}{n} > \sum_{I_i \in \Pi} O(f, I_i)\, m(I_i) > \frac{1}{n} \sum_{I_i \in \Pi'} m(I_i)$$

y tendremos que $\sum_{I_i \in \Pi'} m(I_i) < \varepsilon$. De esta forma D_n está recubierto por los interiores de un número finito de intervalos, cuya suma de medidas es menor que ε, junto con las fronteras de los intervalos de Π. Estos últimos, a su vez, pueden recubrirse por un número finito de rectángulos cuya suma de medidas también es menor que ε. D_n es entonces de medida nula.

Para establecer el recíproco veamos, en primer lugar, un par de observaciones. La primera es que dado un intervalo compacto y un recubrimiento abierto del mismo, existe una partición del mismo tal que cada uno de los intervalos cerrados de la partición está contenido en un abierto del recubrimiento. Basta considerar el número de Lebesgue del recubrimiento y tomar la partición suficientemente fina.

La segunda observación es que si tenemos una función definida en un intervalo I compacto tal que la oscilación en todos sus puntos es menor que un $\delta > 0$ prefijado, existe una partición Π del intervalo tal que si $J \in \Pi$ se cumple $O(f, J) < \delta$. En efecto, basta considerar para cada $x \in I$ un entorno U_x con $O(f, U_x) < \delta$ y aplicar la observación anterior.

Podemos pasar a establecer el recíproco. Sea f definida en I, acotada por K y tal que el conjunto de puntos de discontinuidad es de medida nula. Fijemos $\varepsilon > 0$. El conjunto $D_\varepsilon = \{x \in D;\, O(f,x) \geq \varepsilon\}$ es un compacto de medida cero. Existen entonces un número finito de intervalos abiertos $U_1, ..., U_m$ que recubren D_ε y cuya suma de medidas es menor que ε. Estos abiertos, junto con el complementario de D_ε forman un recubrimiento de I. De acuerdo con la primera observación existirá una partición Π tal que cada intervalo está contenido en uno de los U_i o en el complementario de D_ε. Llamemos Π' al conjunto de los primeros y Π'' a los restantes que, en consecuencia, no cortarán a D_ε. Si $J \in \Pi''$, aplicando la segunda observación, existirá una partición de J , Π_J tal que $S(f,\Pi_J) - s(f,\Pi_J) < \varepsilon m(J)$. Consideremos una partición $\widetilde{\Pi}$ en I más fina que Π y tal que induzca en cada uno de los intervalos $J \in \Pi''$ una partición más fina que la Π_J. Llamemos $\widetilde{I}_j$ a los intervalos de la partición $\widetilde{\Pi}$

$$\begin{aligned} S\left(f,\widetilde{\Pi}\right) - s\left(f,\widetilde{\Pi}\right) &= \\ \sum_{\widetilde{I}_j \subset I'_i \in \Pi'} O\left(f,\widetilde{I}_j\right) m\left(\widetilde{I}_j\right) + \sum_{\widetilde{I}_j \subset I''_j \in \Pi''} O\left(f,\widetilde{I}_j\right) m\left(\widetilde{I}_j\right) &\leq \\ 2K \sum_{\widetilde{I}_j \subset I'_i \in \Pi'} m\left(\widetilde{I}_j\right) + \varepsilon \sum_{I''_j \in \Pi''} m\left(I''_j\right) &< 2K\varepsilon + \varepsilon m(I). \end{aligned}$$

Por tanto f es integrable Riemann.

Ejercicios

1. Prueba que el conjunto $\{(x,0) \in R^2\}$ es de 2-medida cero.
2. Prueba que si $f : I \to R$ es una función integrable y $g : R \to R$ es continua, la composición $g \circ f$ es integrable.
3. Prueba que toda función $f : I \to R$ acotada y continua en $I - Q$ es integrable Riemann.
4. Prueba que un conjunto acotado A de R^2 tiene contenido de Jordan definido si y sólo si su frontera tiene medida cero.

Capítulo 2

Medida de Lebesgue en $\mathbf{R}^n$

Se trata de definir para una cierta colección de conjuntos $\mathcal{M}$ una aplicación que llamaremos medida $m : \mathcal{M} \to R \cup \{+\infty\}$, de manera que $\mathcal{M}$ contenga los conjuntos con contenido de Jordan definido así como los conjuntos abiertos, y que sea una clase cerrada por uniones numerables y por paso al complementario. Sobre la función m se desea, en primer lugar, que sea no negativa y que extienda la noción de contenido. Se desea también que m tenga la propiedad de la aditividad numerable y que si un conjunto A tiene medida 0, cualquier subconjunto también sea medible con medida cero. Por último y en relación con las propiedades algebraicas de R^n se desea que m sea invariante por translaciones y por simetrías, es decir $m(x + A) = m(A)$ y $m(-A) = m(A)$. Se probará la existencia de una tal colección de conjuntos $\mathcal{M}$ y de una tal aplicación m. Empezaremos definiendo la medida de abiertos acotados, para pasar después a la de compactos. A partir de ambos definiremos los conjuntos medibles acotados y, finalmente, la clase $\mathcal{M}$ y la aplicación m.

2.1 σ-álgebras y medidas

Definición 2.1. *Una colección de subconjuntos $\mathcal{M}$ de R^n se dice que es una σ-álgebra si,*

1. $R^n \in \mathcal{M}$.
2. *Para cada conjunto de $\mathcal{M}$ su complementario está en $\mathcal{M}$.*
3. $A = \cup_n A_n$ *pertenece a $\mathcal{M}$ siempre que cada $A_n \in \mathcal{M}$.*

Resumiremos unas primeras consecuencias en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sea $\mathcal{M}$ una σ-álgebra. Entonces*

1. *El conjunto vacío ϕ pertenece a $\mathcal{M}$.*
2. *La unión finita de elementos de $\mathcal{M}$ pertenece a $\mathcal{M}$.*
3. *La intersección finita o numerable de conjuntos de $\mathcal{M}$ es de $\mathcal{M}$.*

4. La diferencia de elementos de $\mathcal{M}$ es de $\mathcal{M}$.

Demostración. El conjunto vacío ϕ siempre pertenece a $\mathcal{M}$ por ser el complementario de R^n. También tomando $A_n = \phi$ para $n > n_0$ se ve que toda unión finita de elementos de $\mathcal{M}$ es de $\mathcal{M}$. Tomando complementarios es inmediato probar que la intersección finita o numerable de conjuntos de $\mathcal{M}$ es de $\mathcal{M}$ y que la diferencia de elementos de $\mathcal{M}$ es de $\mathcal{M}$.

Ejemplo 2.1. *Si consideramos los subconjuntos de R^n que se obtienen a partir de los abiertos tomando uniones e intersecciones finitas y numerables sucesivas, así como paso al complementario obtendremos la mínima $\sigma-$álgebra de subconjuntos de R^n que contiene a todos los conjuntos abiertos. A sus conjuntos se les llama borelianos.*

Definición 2.2. *Una aplicación m de una $\sigma-$ álgebra $\mathcal{M}$ en $R \cup \{+\infty\}$ se dice aditiva si para $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$, $A_1 \cap A_2 = \phi$, se cumple $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$. Se dice que es numerablemente aditiva si para cada colección numerable A_n de subconjuntos de $\mathcal{M}$ disjuntos dos a dos, $m(\cup A_n) = \sum m(A_n)$. Una función no negativa y numerablemente aditiva se denomina una medida.*

2.2 La medida de Lebesgue

2.2.1 Medida de abiertos acotados

Ya hemos comentado que el contenido interior de conjuntos cualesquiera no da una aplicación aditiva. Por ejemplo, si consideramos contenidos unidimensionales $c_i(Q \cap [0,1]) = 0$ y $c_i([0,1] - Q) = 0$ mientras que $c_i([0,1]) = 1$. Sin embargo, si nos restringimos únicamente a los abiertos acotados si que resulta aditiva esta aplicación. Es entonces natural definir la medida de un conjunto abierto acotado como su contenido interior. Por otro lado, como veremos, todo conjunto abierto puede expresarse como una unión disjunta, numerable de "intervalos semiabiertos". La medida con la definición anterior resulta ser la suma de las "medidas" de estos intervalos, corroborando lo adecuado de la definición.

Definición 2.3. *Sea A un abierto acotado. Se define la medida de este abierto mediante la expresión*

$$m(A) = c_i(A) = \sup\{m(F);\ F \in \mathcal{F},\ F \subset A\}\ .$$

Teorema 2.2. *Si A_1, A_2 son abiertos acotados*

$$m(A_1 \cup A_2) \leq m(A_1) + m(A_2).$$

Si $A_1 \cap A_2 = \phi$, $\quad m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$.

Demostración. Sea $F \in \mathcal{F}$ con $F \subset A_1 \cup A_2$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que si $x \in F$, $B(x,\varepsilon)$ está contenida en A_1 o en A_2. La existencia de este ε puede probarse por un argumento de compacidad. Para cada $x \in F$ sea $2\varepsilon_x$ tal que $B(x, 2\varepsilon_x)$ está en uno de los dos abiertos A_1 o A_2. Mediante un número finito de las bolas $B(x,\varepsilon_x)$ se recubre F. Sean $B(x,\varepsilon_{x_1}), ..., B(x,\varepsilon_{x_r})$. Entonces $\varepsilon =$

$\min\{\varepsilon_{x_1}, ..., \varepsilon_{x_r}\}$ cumple la condición. En efecto, si $y \in B(x, \varepsilon_x)$, la bola $B(x, 2\varepsilon_x)$ estará contenida en un A_j. Entonces

$$B(y, \varepsilon) \subset B(x, 2\varepsilon_x) \subset A_j.$$

Supongamos ahora F descompuesto en intervalos de diámetro menor que ε. Cada uno de estos intervalos estarán contenidos en A_1, en A_2 o en ambos. Tendremos entonces

$$m(F) \leq m(A_1) + m(A_2)$$

lo que implica, puesto que $m(A_1 \cup A_2)$ es el supremo de $m(F)$ para $F \subset A_1 \cup A_2$ que

$$m(A_1 \cup A_2) \leq m(A_1) + m(A_2)$$

La demostración de la segunda parte de la proposición es ahora fácil de completar. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F},\ F_1 \subset A_1, F_2 \subset A_2$. Serán disjuntos y tendremos

$$m(A_1 \cup A_2) \geq m(F_1 \cup F_2) = m(F_1) + m(F_2).$$

Tomando supremos al variar F_1 y F_2

$$m(A_1 \cup A_2) \geq m(A_1) + m(A_2).$$

□

Lema 2.3. *Todo abierto de R^n es unión numerable de intervalos disjuntos del tipo*

$$I_{i_1,...,i_n;m} = \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{i_j}{2^m}, \frac{i_j + 1}{2^m}\right) \quad \textit{donde } i_j \in Z.$$

Demostración. Para cada m los intervalos $I_{i_1,...,i_n;m}$ forman un recubrimiento de R^n. Sea $\mathcal{J}_0$ la familia de los intervalos del tipo $I_{i_1,...,i_n;0}$ contenidos en A. Consideremos, a continuación, $\mathcal{J}_1$ la familia de los intervalos del tipo $I_{i_1,...,i_n;1}$ contenidos en A y no contenidos en los anteriores. Si proseguimos de esta forma obtendremos $\cup\mathcal{J}_m$ una familia numerable de intervalos disjuntos dos a dos cuya unión está contenida en A. Veamos que coincide con A. Sea $x \in A$ y $B(x, \varepsilon) \subset A$. Sea m suficientemente grande de forma que los intervalos $I_{i_1,...,i_n;m}$ tengan diámetro menor que ε. El punto x pertenecerá a uno de los intervalos $I_{i_1,...,i_n;m}$ que estará por tanto contenido en A. Se tendrá entonces que o bien $I_{i_1,...,i_n;m}$ pertenecerá a uno de los $\mathcal{J}_s$ para $s < m$, o bien pertenecerá a $\mathcal{J}_m$.

□

Teorema 2.4. *Sea A un abierto acotado de R^n y sea $A = \cup I_{i_1,...,i_n;m}$ la descomposición dada en el lema anterior. Se cumple*

$$m(A) = \sum m(I_{i_1,...,i_n;m})$$

donde $m(I_{i_1,...,i_n;m})$ significa el contenido de $I_{i_1,...,i_n;m}$, es decir, $c(I_{i_1,...,i_n;m}) = \left(\frac{1}{2^m}\right)^n$.

Demostración. Llamemos, por simplificar la notación, I_k a cada uno de los intervalos de la partición $I_{i_1,...,i_n;m}$ en que se descompone A. Observemos que forma una familia numerable. Sea $F \in \mathcal{F}$ $F \subset A$. Consideremos un $\varepsilon > 0$. Para cada intervalo I_k consideremos un intervalo abierto $\widetilde{I}_k$ que contiene a I_k y tal que $c\left(\widetilde{I_k}\right) \leq c\left(I_k\right) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Por ser F compacto estará recubierto por un número finito de intervalos abiertos $\widetilde{I_k}$, $k = 1, ..., N$. Tendremos

$$m(F) \leq c(\cup_{k=1}^{N} \widetilde{I_k}) \leq \sum c(\widetilde{I_k}) \leq \sum c(I_k) + \varepsilon.$$

Puesto que esto vale para todo $\varepsilon > 0$, se tiene $m(F) \leq \sum m(I_k)$ y puesto que esto vale para todo $F \subset A$ se tiene $m(A) \leq \sum m(I_k)$.

Recíprocamente, fijado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar intervalos cerrados J_k contenidos en I_k tales que $m(J_k) \geq m(I_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}$. Consideremos un número finito N de estos intervalos. El conjunto unión de estos es un elemento de $\mathcal{F}$ contenido en A y los J_k son disjuntos. Tendremos entonces

$$\sum_{k=1}^{N} m(I_k) \leq \sum_{k=1}^{N} m(J_k) + \varepsilon \leq m(A) + \varepsilon.$$

Puesto que vale para cada N se tiene

$$\sum m(I_k) \leq m(A) + \varepsilon.$$

Dado, por último, que vale para cada $\varepsilon > 0$ tendremos

$$\sum m(I_k) \leq m(A).$$

□

2.2.2 Medida de compactos

Dado un compacto K, siempre está contenido en un intervalo abierto I. Si deseamos que $m(I) = m(K) + m(I - K)$, puesto que la medida de $I - K$ ha sido definida como el supremo de los contenidos de los elementos de $F \in \mathcal{F}$, $F \subset I - K$, es fácil ver que $m(K)$ deberá ser el ínfimo de las medidas de los elementos de $\mathcal{F}$ que contienen a K. Es entonces natural la siguiente definición.

Definición 2.4. *Si K es un compacto de R^n, se define su medida como*

$$m(K) = c_e(K) = \inf_{K \subset L,\ L \in \mathcal{F}} m(L).$$

Obsérvese que si K es un intervalo cerrado la definición coincide con la medida ya conocida del intervalo. La próxima proposición nos dice que con esta definición, la medida sobre compactos tiene la propiedad de la aditividad.

Teorema 2.5. *Sean K_1 y K_2 compactos con $K_1 \cap K_2 = \phi$. Entonces $m(K_1 \cup K_2) = m(K_1) + m(K_2)$.*

Demostración. Sea $L \in \mathcal{F}$ con $K_1 \cup K_2 \subset L$. Siempre podremos suponer que es la unión de intervalos de diámetro menor que $d(K_1, K_2)$. Llamemos L_1 y L_2 a la unión de estos intervalos que tienen puntos en común con K_1 y con K_2 respectivamente. Tendremos $K_1 \subset L_1,\ K_2 \subset L_2$, $L_1 \cup L_2 \subset L$ y $L_1 \cap L_2 = \phi$. Por tanto

$$m(K_1) + m(K_2) \leq m(L_1) + m(L_2) \leq m(L)$$

y, tomando el ínfimo de $m(L)$ al variar L

$$m(K_1) + m(K_2) \leq m(K_1 \cup K_2).$$

Probemos la desigualdad en sentido contrario. Sean $L_i \in \mathcal{F}$ con $K_i \subset L_i$, $i = 1, 2$ con intervalos componentes de diámetro menor que $d(K_1, K_2)/2$. A efectos de calcular $m(K_1)$ y $m(K_2)$ siempre se podrá suponer que los intervalos cerrados de L_i tienen intersección no vacía con K_i, $i = 1, 2$. De esta forma se tiene $L_1 \cap L_2 = \phi$ y por tanto

$$m(K_1 \cup K_2) \leq m(L_1 \cup L_2) = m(L_1) + m(L_2).$$

Tomando el ínfimo de $m(L_1)$ y de $m(L_2)$ al variar L_1 y L_2 tendremos

$$m(K_1 \cup K_2) \leq m(K_1) + m(K_2).$$

□

2.2.3 Conjuntos medibles acotados

Definido el concepto de medida de abiertos y de compactos podemos pasar a definir una medida exterior de un conjunto mediante la "aproximación por exceso" por conjuntos abiertos y una medida interior mediante una "aproximación por defecto" por medio de conjuntos compactos. Cuando ambas medidas coincidan tendremos el concepto de conjunto acotado medible.

Definición 2.5. *Sea B un conjunto acotado. Se define su medida exterior e interior mediante*

$$\overline{m}(B) = \inf \{m(A);\ B \subset A,\ A \textit{ abierto}\}$$

$$\underline{m}(B) = \sup \{m(K);\ K \subset B,\ K \textit{ compacto}\}$$

Lema 2.6. *Si K es un compacto y A es un abierto $K \subset A$, existe $L \in \mathcal{F}$ tal que $K \subset L \subset A$.*

Demostración. Basta recubrir K por intervalos abiertos tales que su adherencia esté contenida en A. Por la compacidad de K, mediante un número finito de ellos recubriremos K. La unión de su adherencia nos dará L.

□

Teorema 2.7. *Para todo conjunto acotado B se tiene $\underline{m}(B) \leq \overline{m}(B)$.*

Demostración. En efecto, sea un compacto K y un abierto A tal que $K \subset B \subset A$. Sea L como en el lema anterior $K \subset L \subset A$. Tendremos $m(K) \leq m(L) \leq m(A)$ y tomando ínfimo al variar A y supremo al variar K se tendrá $\underline{m}(B) \leq \overline{m}(B)$.

□

Definición 2.6. *Un conjunto acotado B se dice medible si $\underline{m}(B) = \overline{m}(B)$. A este valor común se le denomina su medida y se escribe $m(B)$.*

Obsérvese que si B_1 y B_2 son medibles y $B_1 \subset B_2$ se tiene que $m(B_1) \leq m(B_2)$. Es consecuencia inmediata de la definición de medida exterior.

Teorema 2.8. *Los conjuntos abiertos acotados y los conjuntos compactos son medibles y tienen por medida el contenido interior y exterior respectivamente.*

Demostración. En efecto, si A es un abierto se tiene $\overline{m}(A) = m(A) \geq \underline{m}(A)$. Pero, dado $\varepsilon > 0$ existe $L \in \mathcal{F},\ L \subset A$ tal que $m(L) > m(A) - \varepsilon$ y por tanto $\underline{m}(A) \geq m(A) - \varepsilon$. Esto es válido para cada $\varepsilon > 0$ y por tanto $\underline{m}(A) \geq m(A)$. Luego $\underline{m}(A) \geq \overline{m}(A)$ y coinciden.

En forma análoga, si K es compacto se tiene $\underline{m}(K) = m(K) \leq \overline{m}(K)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $L \in \mathcal{F}$ con $K \subset L^\circ$ y $m(L) \leq m(K) + \varepsilon$. De aquí que $\overline{m}(K) \leq m(K) + \varepsilon$. Puesto que esto vale para cada $\varepsilon > 0$ se sigue que $\overline{m}(K) \leq m(K)$.

□

Teorema 2.9. *Todo conjunto acotado con contenido definido es medible y su medida coincide con el contenido.*

Demostración. Sea B un conjunto acotado. Puesto que los elementos de $\mathcal{F}$ son compactos se sigue de las definiciones que $c_i(B) \leq \underline{m}(B)$.

Por otro lado $c_e(B)$ es el ínfimo de las medidas de los elementos de $\mathcal{F}$ que contienen a B. Este ínfimo coincide con el ínfimo de las medidas de uniones finitas de intervalos abiertos que contienen a B y, por tanto $\overline{m}(B) \leq c_e(B)$, puesto que el primero es el ínfimo de las medidas de todos los abiertos que contienen a B. Resumiendo, para cada conjunto acotado se tiene

$$c_i(B) \leq \underline{m}(B) \leq \overline{m}(B) \leq c_e(B).$$

Es ya evidente que si B tiene contenido definido entonces es medible y coinciden medida y contenido.

□

Empezaremos estudiando las propiedades de los conjuntos medibles y acotados. Pasaremos después al caso no acotado.

Obsérvese que si B es un conjunto acotado con $\overline{m}(B) = 0$ es entonces medible con medida cero. De aquí se sigue que cualquier subconjunto de uno de medida 0 es medible de medida 0.

Lema 2.10. *Sean A y B acotados. Se cumple*

$$\overline{m}(A \cup B) \leq \overline{m}(A) + \overline{m}(B).$$

Si $A \cap B = \phi$ se cumple

$$\underline{m}(A \cup B) \geq \underline{m}(A) + \underline{m}(B).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y U, V abiertos acotados tales que $A \subset U,\ B \subset V$

$$m(U) < \overline{m}(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m(V) < \overline{m}(B) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Se tendrá

$$\overline{m}(A \cup B) \leq m(U \cup V) \leq m(U) + m(V) < \overline{m}(A) + \overline{m}(B) + \varepsilon.$$

Puesto que es válido para todo $\varepsilon > 0$

$$\overline{m}(A \cup B) \leq \overline{m}(A) + \overline{m}(B).$$

Sea ahora $A \cap B = \phi$ y $\varepsilon > 0$; sean K y L compactos tales que $K \subset A,\ L \subset B$ con

$$m(K) > \underline{m}(A) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$m(L) > \underline{m}(B) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aquí que

$$\underline{m}(A \cup B) \geq m(K \cup L) = m(K) + m(L) > \underline{m}(A) + \underline{m}(B) - \varepsilon.$$

Puesto que es válido para todo $\varepsilon > 0$ se tendrá

$$\underline{m}(A \cup B) \geq \underline{m}(A) + \underline{m}(B).$$

□

El siguiente teorema nos establece la aditividad finita para los conjuntos medibles acotados.

Teorema 2.11. *Sean A y B dos conjuntos acotados, medibles y disjuntos. Se tiene que $A \cup B$ es medible y $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.*

Demostración. Aplicando la proposición anterior

$$m(A) + m(B) \leq \underline{m}(A \cup B) \leq \overline{m}(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$$

y, por tanto, todas las desigualdades son de hecho igualdades y vale la proposición.

□

Veamos una caracterización de los conjuntos acotados medibles.

Teorema 2.12. *Un conjunto B, acotado, es medible si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto K y un abierto A tales que $K \subset B \subset A,\ m(A - K) < \varepsilon$.*

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto K y un abierto A acotado tales que $K \subset B \subset A$ y

$$m(K) > \underline{m}(B) - \frac{\varepsilon}{2}$$
$$m(A) < \overline{m}(B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea ahora B medible. Como $\overline{m}(B) = \underline{m}(B)$ y teniendo en cuenta la aditividad de m sobre los medibles acotados se sigue que

$$m(A) - m(K) = m(A - K) < \varepsilon.$$

Recíprocamente, si se cumple esta última condición, puesto que

$$m(K) \leq \underline{m}(B) \leq \overline{m}(B) \leq m(A)$$

tendremos que para cada $\varepsilon > 0$

$$\overline{m}(B) - \underline{m}(B) \leq m(A) - m(K) < \varepsilon$$

y por tanto $\overline{m}(B) = \underline{m}(B)$ y B es medible.

□

Teorema 2.13. *Si B y B_1 son conjuntos medibles acotados, también lo es $B \cap B_1,\ B \cup B_1$, y $B - B_1$.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, sean K, K_1 compactos y A, A_1 abiertos tales que

$$K \subset B \subset A,\ \ m(A - K) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$K_1 \subset B_1 \subset A_1,\ \ m(A_1 - K_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aquí que

$$K - A_1 \subset B - B_1 \subset A - K_1 \text{ y } A - K_1 - (K - A_1) \subset (A - K) \cup (A_1 - K_1).$$

Tendremos que

$$m\left(A - K_1 - (K - A_1)\right) \leq m\left(A - K\right) + m\left(A_1 - K_1\right) < \varepsilon$$

y por tanto $B - B_1$ es medible.

La medibilidad de $B \cap B_1$ y de $B \cup B_1$ se sigue de las relaciones

$$B \cap B_1 = B - (B - B_1)$$

$$B \cup B_1 = (B - B_1) \cup (B_1 - B) \cup (B \cap B_1).$$

□

Corolario 2.14. *Si B y B_1 son acotados medibles entonces $m(B \cup B_1) \leq m(B) + m(B_1)$.*

Demostración. En efecto, la medibilidad se deduce del teorema 2.13. La desigualdad del lema 2.10.

□

Se trata de ver ahora la propiedad de la aditividad numerable para conjuntos acotados. Veamos primero un lema que nos expresa la propiedad de subaditividad numerable para conjuntos abiertos.

Lema 2.15. *Sean A_i una colección numerable de abiertos con unión A acotada. Entonces $m(A) \leq \sum_{n\geq 1} m(A_n)$.*

Demostración. Sea K un compacto $K \subset A$. Existirá r tal que $K \subset A_1 \cup ... \cup A_r$. Reiterando la proposición anterior $m(K) \leq \sum_{n=1}^{r} m(A_n) \leq \sum_{n\geq 1} m(A_n)$. Tomando supremo al variar K se tiene $m(A) \leq \sum_{n\geq 1} m(A_n)$.

□

Teorema 2.16. *Sea $\{B_n\}$ una sucesión de conjuntos medibles, acotados y disjuntos dos a dos con $B = \cup_n B_n$ acotado. Entonces B es medible y $m(B) = \sum_n m(B_n)$.*

Demostración. De la aditividad finita, se sigue

$$\sum_{n=1}^{r} m(B_n) = m(B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_r) \leq \underline{m}(B)$$

y por tanto

$$\sum_{n\geq 1} m(B_n) \leq \underline{m}(B).$$

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, sean A_n abiertos tales que

$$B_n \subset A_n, \;\; m(A_n) < m(B_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Por tanto, utilizando el lema anterior

$$\overline{m}(B) \leq m(\cup A_n) \leq \sum_{n\geq 1} m(A_n) \leq \sum_{n\geq 1} m(B_n) + \varepsilon.$$

Puesto que esto vale para cada $\varepsilon > 0$, tendremos

$$\overline{m}(B) \leq \sum_{n\geq 1} m(B_n).$$

De las dos desigualdades obtenidas se sigue que B es medible y que $m(B) = \sum_{n\geq 1} m(B_n)$.

□

Corolario 2.17. *Sean $\{B_n\}$ una sucesión de conjuntos medibles con unión acotada. Entonces $B = \cup B_n$ es medible y $m(B) \leq \sum_{n\geq 1} m(B_n)$.*

Demostración. Consideremos la sucesión de conjuntos medibles, dos a dos disjuntos $C_1 = B_1$, $C_n = B_n - (B_1 \cup ... \cup B_{n-1})$, para $n > 1$. Se tendrá que $B = \cup B_n = \cup C_n$ y por tanto será medible y $m(B) = \sum_{n\geq 1} m(C_n) \leq \sum_{n\geq 1} m(B_n)$.

□

Corolario 2.18. *La intersección de una familia numerable de conjuntos medibles acotados, es medible.*

Demostración. Si B_n son tales conjuntos, es suficiente considerar la expresión

$$\cap_n B_n = B_1 - \cup_n (B_1 - B_n)$$

y tener en cuenta las proposiciones anteriores.

□

2.2.4 Conjuntos medibles

Pasemos a definir los conjuntos medibles no necesariamente acotados y a estudiar sus propiedades.

Definición 2.7. *Un subconjunto C de R^n se dice medible si para cada compacto K, $C \cap K$ es un conjunto medible. En este caso se denomina su medida a $m(C) = \sup_K m(C \cap K)$.*

Obsérvese que la medida de un conjunto medible puede ser $+\infty$.

Se trata de ver que la colección de conjuntos medibles que denominaremos $\mathcal{M}$ constituye una σ-álgebra y que la medida de estos conjuntos tienen las propiedades establecidas en la introducción del capítulo.

Desde luego ϕ y R^n son conjuntos medibles.

Ya hemos dicho que $\mathcal{M}$ contiene a todos los conjuntos con contenido definido y que su medida coincide con su contenido. También contiene a los conjuntos abiertos pues la intersección de un abierto y un compacto es medible acotado.

Si A_1 y A_2 son conjuntos medibles y $A_1 \subset A_2$ se tiene $m(A_1) \leq m(A_2)$. Se entenderá que en el caso en que $m(A_1) = +\infty$ esta relación significa que también $m(A_2) = +\infty$.

Veamos la propiedad de la aditividad finita y numerable de m.

Teorema 2.19. *Sea $\{A_n\}$ una colección finita o numerable de conjuntos medibles. Su unión es entonces medible y se cumple $m(\cup A_n) \leq \sum m(A_n)$. Si los conjuntos son disjuntos dos a dos se tiene $m(\cup A_n) = \sum m(A_n)$.*

Demostración. En primer lugar observemos que para cada compacto K, $(\cup A_n) \cap K = \cup (A_n \cap K)$ que es una unión numerable acotada de conjuntos medibles y por tanto medible. Esto nos asegura la medibilidad de $\cup A_n$.

Veamos la propiedad subaditiva. Sea K un compacto. Utilizando la propiedad de subaditividad finita o numerable para conjuntos medibles acotados (teorema 2.17) se tiene que

$$m((\cup A_n) \cap K) \leq \sum m(A_n \cap K) \leq \sum m(A_n).$$

Tomando supremo al variar K

$$m\left(\cup A_n\right) \leq \sum m(A_n).$$

Supongamos ahora que los conjuntos A_n son disjuntos dos a dos. Siempre podremos suponer que para cada n, $m(A_n) < +\infty$, pues en otro caso se tendría $m(\cup A_n) = +\infty$ y se cumpliría la propiedad aditiva. Consideremos, en primer lugar, el caso en que tenemos un número finito M de conjuntos. Para cada n sea K_n un compacto tal que

$$m(K_n \cap A_n) > m(A_n) - \frac{\varepsilon}{M}.$$

Si tomamos el compacto $K = \cup_{n=1}^{M} K_n$ tendremos, utilizando la propiedad de la aditividad para conjuntos medibles acotados (teorema 2.16),

$$m(\cup_{n=1}^{M} A_n) \geq m(K \cap (\cup_{n=1}^{M} A_n)) = \sum_{n=1}^{M} m(K \cap A_n) \geq \sum_{n=1}^{M} m(A_n) - \varepsilon.$$

Puesto que vale para todo $\varepsilon > 0$ se tiene

$$m(\cup_{n=1}^{M} A_n) \geq \sum_{n=1}^{M} m(A_n)$$

y por tanto vale la propiedad de la aditividad finita.

Pasemos a considerar una colección numerable de conjuntos A_n. Tendremos para cada M

$$m(\cup_{n\geq 1} A_n) \geq m(\cup_{n=1}^{M} A_n) = \sum_{n=1}^{M} m(A_n)$$

y por tanto

$$m(\cup_{n\geq 1} A_n) \geq \sum_{n\geq 1} m(A_n).$$

□

Corolario 2.20. *Sea una sucesión de conjuntos medibles $A_1 \subset A_2 \subset ...$ y sea $A = \cup A_n$. Se cumple $m(A) = \lim m(A_n)$.*

Demostración. Consideremos la descomposición $A = \cup_{n\geq 1}(A_n - A_{n-1})$, con $A_0 = \phi$. Aplicando la proposición anterior

$$m(A) = \sum_{n\geq 1} m(A_n - A_{n-1}) = \sum_{n\geq 1} (m(A_n) - m(A_{n-1})) = \lim m(A_n).$$

□

Corolario 2.21. *Sea una sucesión de conjuntos medibles $A_1 \supset A_2 \supset ...$ tal que $m(A_1) < +\infty$ y sea $A = \cap A_n$. Se cumple $m(A) = \lim m(A_n)$.*

Demostración. Se considera la sucesión $A_1 - A_2 \subset A_1 - A_3 \subset$ ....Se cumple que $A_1 - A = \cup(A_1 - A_n)$. Aplicando el corolario anterior tendremos

$$m(A_1 - A) = \lim m(A_1 - A_n)$$

y por tanto

$$m(A_1) - m(A) = \lim(m(A_1) - m(A_n)).$$

Puesto que $m(A_1) < +\infty$ se sigue que $m(A) = \lim m(A_n)$.

□

Ejemplo 2.2. *Es fácil comprobar que si no se impone en el corolario anterior la hipótesis $m(A_1) < +\infty$, en general es falsa la conclusión. Sea, por ejemplo $A_n = [n, +\infty)$. La medida de cada uno de estos conjuntos es $+\infty$ mientras que su intersección es el vacío y por tanto tiene medida cero.*

2.2.5 Conjuntos de medida cero

Un conjunto de medida cero será un conjunto A tal que para cada compacto K se cumpla que $\overline{m}(A \cap K) = 0$. En efecto, esto implica que $A \cap K$ es medible y que su medida es cero. De aquí se sigue inmediatamente que todo subconjunto de uno de medida cero es de medida cero. Un criterio que en ocasiones es útil es el siguiente.

Teorema 2.22. *Un conjunto A es de medida cero si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto abierto U, $A \subset U$, tal que $m(U) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos que A cumple que para cada $\epsilon > 0$ existe un abierto U con $A \subset U$ y $m(U) < \epsilon$. Para cada compacto K se tendrá $\overline{m}(A \cap K) \leq m(U) < \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$ y por tanto $\overline{m}(A \cap K) = 0$ y A será de medida cero.

Recíprocamente, supongamos que A es de medida cero. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada i,

$$\{x \in R^n;\ \|x\| \leq i\}$$

es un conjunto compacto y, por tanto, existirá un abierto $U_i \supset A \cap \{x \in R^n;\ \|x\| \leq i\}$ con $m(U_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. El abierto $U = \cup U_i$ cumplirá $A \subset \cup U_i$ y $m\,(U) < \varepsilon$.

□

Ejemplo 2.3. *Todo subconjunto numerable de R^n es de medida cero. Más generalmente, la unión numerable de conjuntos de R^n de medida nula es de medida nula. En efecto, si $N = \cup_k N_k$ con N_k de medida nula tendremos que $m(N) \leq \sum_k m(N_k) = 0$.*

2.2.6 Conjuntos medibles y medida de Lebesgue

Finalmente resumiremos en un teorema las propiedades más destacadas que en la introducción habíamos señalado como deseables para los conjuntos medibles y para sus medidas. La mayor parte de ésta han sido ya probadas. Estos conjuntos se dicen conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue y a sus medidas, las medidas de Lebesgue.

Teorema 2.23. *La colección de conjuntos medibles $\mathcal{M}$ en R^n y la aplicación medida $m : \mathcal{M} \to R \cup \{+\infty\}$ tienen las siguientes propiedades:*

a) El conjunto $\mathcal{M}$ es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de R^n que contiene a los conjuntos abiertos y a los conjuntos con contenido de Jordan definido.

b) La aplicación m es una medida. Es invariante por translaciones y por simetría. Cualquier subconjunto de un conjunto de medida cero es medible de medida cero.

Demostración. Veamos a). Hemos probado ya que la unión finita o numerable de conjuntos medibles también lo es. R^n es desde luego medible. Si A es medible su complementario $R^n - A$ es también medible ya que $K \cap (R^n - A) = K - (A \cap K)$ es medible. Como consecuencia de todo ello la intersección de un conjunto finito o numerable de conjuntos medibles es medible. El resto del apartado a) ha sido previamente probado.

En cuanto a b) queda únicamente por probar la invarianza por translaciones y por simetrías. Desde luego para elementos de $\mathcal{F}$ se cumple $m(x + F) = m(F)$. De donde para conjuntos abiertos $m(x + A) = m(A)$ y, en consecuencia, vale la misma relación para conjuntos acotados medibles. Por último, como para cada compacto K también $x + K$ es compacto y $(x + M) \cap (x + K) = x + M \cap K$, se tiene que para todo conjunto medible M, $m(x + M) = m(M)$. Razonamientos similares prueban la invarianza por simetría, es decir $m(-M) = m(M)$.

□

La colección de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue es muy amplia. No obstante pueden darse ejemplos de conjuntos no medibles. Veamos uno de ellos en R.

Ejemplo 2.4. *Consideremos en $[0, 1]$ la siguiente relación de equivalencia. $x \backsim y$ si y sólo si $x - y \in Q$. Consideremos un conjunto A que se obtiene tomando un elemento de cada clase de equivalencia. Veamos que este conjunto no es medible. En efecto, sea $\{q_n\}$ el conjunto de los racionales de $[-1, 1]$ expresados en forma de sucesión. Consideremos los conjuntos $A_n = q_n + A$. Estos conjuntos son disjuntos como se deduce de la definición de A. Si A fuese medible, lo serían A_n y $m(A_n) = m(A)$. Por otro lado $[0, 1] \subset \cup_n A_n \subset [-1, 2]$. Tendremos entonces $1 \leq \sum_n m(A_n) \leq 3$. Contradicción con ser $m(A_n) = m(A)$.*

2.3 Ejercicios

1. Consideremos $A = Q \cap [-1, 1]$. Prueba que si I_n es una colección finita de intervalos abiertos que recubren A la suma de sus medidas es mayor o igual a 2. Prueba que dado $\varepsilon > 0$, existe un recubrimiento de A formado por una colección numerable de intervalos abiertos cuya suma de medidas es menor que ε.

2. Dado $\varepsilon > 0$ construye un abierto denso en R cuya medida sea menor que ε.

3. Halla la medida de $R \times Q$ en R^2 y la medida de

$$\left\{(x,y) \in R^2;\, x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

4. Sea $f : R^n \to R^n$ una función de Lipschitz, es decir, tal que existe una constante k de forma que $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$. Prueba que si Z tiene medida cero, también lo tiene $f(Z)$.

5. Sea A un abierto de R^n y $f : A \to R^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Prueba que si $Z \subset A$ tiene medida cero, también lo tiene $f(A)$. Indicación: Expresa A como unión numerable de $A_m = \{x \in A;\, \|df_x\| < m\}$. En cada uno de estos conjuntos la función f es de Lipschitz y podemos aplicar el ejercicio anterior a $A_m \cap Z$.

6. Prueba que un conjunto M es medible si y sólo si para cada m el conjunto

$$M_m = \{x \in M; \|x\| \leq m\}$$

es medible. Prueba que entonces $m(M) = \lim m(M_m)$.

7. Prueba que un conjunto M es de medida cero si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos abiertos I_m tales que $M \subset \cup I_m$ y $\sum m(I_m) < \varepsilon$.

8. Consideremos el intervalo $I = [0,1]$ y quitémosle el intervalo abierto centrado de longitud $\frac{1}{3}m(I)$, es decir consideremos $I - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Se trata de la unión de dos intervalos cerrados disjuntos. Apliquemos el mismo proceso a cada uno de ellos. Obtendremos cuatro intervalos cerrados. Denotemos por A a la unión de los intervalos abiertos que se han ido quitando y por C a su complementario $I - A$. Este conjunto se denomina conjunto ternario de Cantor. Prueba que C es medible, de medida cero y no numerable. Indicación: Para la no numerabilidad expresa los elementos de I en base de numeración 3.

9. Prueba que si A es un conjunto medible de R y Z es un conjunto de medida cero de R, entonces $A \times Z$ tiene medida cero en R^2.

10. Sean A y B abiertos respectivamente de R^n y de R^m. Prueba que la medida de $A \times B$ en R^{n+m} es el producto de las medidas. Indicación: Expresa A y B como unión numerable disjunta de intervalos diádicos y expresa $A \times B$ como la unión de los productos de estos intervalos.

Capítulo 3

Integral de Lebesgue

3.1 Funciones medibles

Consideremos $\mathcal{M}$ la $\sigma-$ álgebra de los conjuntos medibles por la medida de Lebesgue en R^n. La idea básica en la definición de integral de una función en el sentido de Lebesgue es su aproximación por combinaciones lineales de funciones características de conjuntos medibles. Esto podría hacerse de la siguiente forma. Si, por ejemplo, la función tuviese su recorrido en $[a,b)$, podríamos dividir este intervalo en m subintervalos $\left[a+(i-1)\frac{b-a}{m},\ a+i\frac{b-a}{m}\right)$ y considerar como aproximación por defecto $\sum_i \left(a+(i-1)\frac{b-a}{m}\right)\chi_{f^{-1}\left[a+(i-1)\frac{b-a}{m},\ a+i\frac{b-a}{m}\right)}$. Obsérvese que, a diferencia de la integral de Riemann, ahora estamos dividiendo en subintervalos el recorrido y no el dominio de definición. Sería natural definir como integral de esta función a la suma

$$\sum_i \left(a+(i-1)\frac{b-a}{m}\right) m\left(f^{-1}\left[a+(i-1)\frac{b-a}{m},\ a+i\frac{b-a}{m}\right)\right).$$

Para esto es necesario que los conjuntos $f^{-1}\left[a+(i-1)\frac{b-a}{m},\ a+i\frac{b-a}{m}\right)$ sean medibles. Las funciones que cumplen esta propiedad reciben el nombre de funciones medibles. Es una clase muy amplia de funciones y en el marco de estas funciones se dará la teoría de la integración. En esta sección daremos la definición de estas funciones y estudiaremos sus propiedades.

Definición 3.1. *Sea f una función definida en R^n a valores en la recta ampliada $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$. Se dice que es medible si para cada número real a el conjunto $\{x \in R^n;\ f(x) > a\}$ es medible.*

Obsérvese que la definición sólo depende de la $\sigma-$ álgebra $\mathcal{M}$ y no de la función medida m.

Ejemplo 3.1. *1. Toda función continua es medible. En efecto, los conjuntos*

$$\{x \in R^n;\ f(x) > a\}$$

son abiertos y por tanto medibles.

2. La función característica de un conjunto medible es una función medible.

La siguiente proposición da definiciones alternativas de función medible.

Teorema 3.1. *Sea f una función definida en R^n a valores en la recta ampliada $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

a) Para cada número real a el conjunto $\{x \in R^n;\ f(x) > a\}$ es medible.

b) Para cada número real a el conjunto $\{x \in R^n;\ f(x) \geq a\}$ es medible.

c) Para cada número real a el conjunto $\{x \in R^n;\ f(x) < a\}$ es medible.

d) Para cada número real a el conjunto $\{x \in R^n;\ f(x) \leq a\}$ es medible.

e) Para cada abierto A de $\overline{R}$, su antiimagen $f^{-1}(A)$ es medible.

Demostración. a)$\Longrightarrow$b) Basta tener en cuenta que

$$\{x \in R^n;\ f(x) \geq a\} = \cap_n \left\{x \in R^n;\ f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}.$$

El conjunto $\{x \in R^n;\ f(x) \geq a\}$ es una intersección numerable de conjuntos medibles y, por tanto, medible.

b)$\Longrightarrow$c).Ya que $\{x \in R^n;\ f(x) < a\} = R^n - \{x \in R^n;\ f(x) \geq a\}$.

c)$\Longrightarrow$d). Ya que $\{x \in R^n;\ f(x) \leq a\} = \cap_n \left\{x \in R^n;\ f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}$.

d)$\Longrightarrow$a). Ya que $\{x \in R^n;\ f(x) > a\} = R^n - \{x \in R^n;\ f(x) \leq a\}$.

e)$\Longrightarrow$a). Tener en cuenta que $\{x \in R^n;\ f(x) > a\}$ es la antiimagen de $\left\{y \in \overline{R} : y > a\right\}$..

a)$\Longrightarrow$e). Todo abierto de $\overline{R}$ es una unión numerable de intervalos abiertos o de semirrectas. Puesto que $\{x \in R^n;\ a < f(x) < b\} = \{x \in R^n;\ f(x) < b\} \cap \{x \in R^n;\ f(x) > a\}$ y que a)$\Longrightarrow$c) se sigue e).

□

Con frecuencia utilizaremos funciones definidas en R^n a valores en R. En este caso, puesto que los abiertos de R son la intersección de los abiertos de $\overline{R}$ con R, la condición e) de medibilidad se reducirá a considerar únicamente las antiimágenes de los abiertos de R.

La clase de las funciones medibles es cerrada por la mayor parte de las operaciones habituales. Esto se expresará en los siguientes teoremas.

Teorema 3.2. *Sean $f_1, ..., f_r$ funciones medibles de R^n en R. Sea g una función continua de R^r en R. La función compuesta $g(f_1, ..., f_r)$ es medible.*

Demostración. Sea A un abierto de R. Por ser g continua $g^{-1}(A)$ es un abierto de R^r. Será entonces un unión numerable de intervalos de la forma $I_k = \prod_{i=1}^r [a_i, b_i)$. La antiimagen B por la función compuesta $g(f_1, ..., f_r)$ del abierto A será en consecuencia unión numerable de conjuntos del tipo $\cap_{i=1}^r f^{-1}([a_i, b_i))$. Cada uno de los conjuntos $f^{-1}([a_i, b_i)) = f^{-1}((-\infty, b_i)) \cap f^{-1}([a_i, +\infty))$ es medible y por tanto B será medible.

□

Corolario 3.3. *La suma, producto y cociente con denominador no nulo de funciones a valores reales medibles es medible.*

Corolario 3.4. *Si f es una función medible y g coincide con f salvo en un conjunto de medida nula, también g es medible.*

Demostración. La función $h = f - g$ será una función no nula únicamente en un conjunto de medida nula. Teniendo en cuenta que todo subconjunto de uno de medida cero es medible de medida cero, se tiene que h será una función medible. Tendremos que $g = f - h$ será medible.
□

Teorema 3.5. *Si f_1 y f_2 son funciones medibles también son medibles* $\sup\{f_1, f_2\}$, $\inf\{f_1, f_2\}$. *Si f es medible, también lo es* $|f|$, f^+, f^-.

Demostración. Para probar que $\sup\{f_1, f_2\}$ es medible basta observar que para cada $a \in R$, $\{x \in R^n; \sup\{f_1, f_2\}(x) > a\} = \{x \in R^n; f_1(x) > a\} \cup \{x \in R^n; f_2(x) > a\}$. Las otras propiedades pueden reducirse a ésta teniendo en cuenta las siguientes relaciones

$$\inf\{f_1, f_2\} = -\sup\{-f_1, -f_2\}$$

$$|f| = \sup\{f, -f\} \ , \ f^+ = \sup\{f, 0\}, \ f^- = \sup\{0, -f\}.$$

□

Teorema 3.6. *Sean $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles. Entonces son medibles* $\sup_n\{f_n\}$, $\inf_n\{f_n\}$, $\limsup\{f_n\}$, $\liminf\{f_n\}$. *Si f es el límite punto a punto de la sucesión f_n salvo en un conjunto de medida nula, también f es medible.*

Demostración. La medibilidad de $\sup_n\{f_n\}$ se obtiene como antes de la relación

$$\{x \in R^n; \sup\{f_n\}(x) > a\} = \cup_n \{x \in R^n; f_n(x) > a\}.$$

Teniendo en cuenta que $\inf_n\{f_n\} = -\sup_n\{-f_n\}$, $\limsup\{f_n\} = \inf_n\{\sup_{m>n}\{f_m\}\}$, $\liminf\{f_n\} = \sup_n\{\inf_{m>n}\{f_m\}\}$ se obtiene la medibilidad de estas funciones. Por último, si una sucesión de funciones medibles tiene límite puntual, éste coincide con el límite superior o inferior y es por tanto medible. Si la sucesión deja de tener límite f en un conjunto de medida cero, podemos dar en este conjunto a todas las funciones un determinado valor constante. Las nuevas funciones serán medibles y tendrán límite en todo punto. La función límite será medible y coincidirá con f salvo en un conjunto de medida nula. La función f será entonces medible.
□

Definición 3.2. *Una función $f : R^n \to R$ se dice simple si toma únicamente un número finito de valores $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$. Si $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$, la función se expresará como $f = \sum_{i=1}^r \alpha_i \chi_{A_i}$.*

Obsérvese que una función simple que se expresa en la forma anterior como $f = \sum_{i=1}^r \alpha_i \chi_{A_i}$, con α_i distintos, es medible si y sólo si todos los conjuntos A_i son medibles.

El teorema siguiente nos expresa que toda función medible puede obtenerse como límite de funciones simples medibles.

Teorema 3.7. *Sea $f : R^n \to [0, +\infty]$ una función medible. Existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples medibles tales que*

a) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq .... \leq f$

b) $s_m(x) \to f(x)$ *para cada $x \in R^n$. Si f es acotada la convergencia es uniforme.*

Demostración. Consideremos para cada $m \in N$ la función simple medible

$$s_m = \sum_{i=1}^{m2^m} \frac{i-1}{2^m} \chi_{E_{m,i}} + m\chi_{F_m}$$

donde $E_{m,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right)\right)$, $F_m = f^{-1}([m, +\infty])$.

Veamos que $s_k \leq s_{k+1}$ para cada k. Si $f(x) \geq k+1$, $s_k(x) = k < k+1 = s_{k+1}(x)$. Si $k \leq f(x) < k+1$, $s_k(x) = k \leq s_{k+1}(x)$. Si $f(x) < k$ tendremos que $f(x)$ pertenecerá a un intervalo de la forma $\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right)$ para algún $1 \leq i \leq k2^k$. Tendremos entonces $s_k(x) = \frac{i-1}{2^k} = \frac{2(i-1)}{2^{k+1}} \leq s_{k+1}(x)$.

Veamos que $s_k(x) \to f(x)$. Si $f(x) = +\infty$, $s_k(x) = k$ para cada k y es cierta la afirmación. Si $f(x) < k$, tendremos $\frac{i-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{i}{2^k}$, para algún $i \leq k2^k$. Entonces $|f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2^k}$ para $n \geq k$.

Por último, si f está acotado se tendrá que para un cierto k y para todo x, $f(x) < k$ y, como antes, $|f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2^k}$ para $n \geq k$ para todo $x \in R^n$. La convergencia será en este caso uniforme.

□

3.2 Integración de funciones simples medibles no negativas

Definición 3.3. *Sea $s = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \chi_{A_i}$ una función simple medible no negativa. Se define su integral como*

$$\int s = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i m(A_i).$$

Si E es un conjunto medible, la integral de s sobre E se define como

$$\int_E s = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i m(A_i \cap E).$$

En estas definiciones se entenderá que si algún α_i es cero el producto por la medida de un conjunto, aunque ésta sea $+\infty$, es cero.

Veamos las propiedades esenciales de esta integración.

Teorema 3.8. *a) Sea s una función simple medible $s \geq 0$, $\lambda \geq 0$, E medible. Se tiene $\int_E \lambda s = \lambda \int_E s$.*

b) Sean s_1, s_2 funciones simples no negativas, E medible. Se cumple $\int_E (s_1 + s_2) = \int_E s_1 + \int_E s_2$.

c) Si $s_1(x) \leq s_2(x)$ para cada x se cumple $\int_E s_1 \leq \int_E s_2$.

d) Si E_m es una colección finita o numerable de conjuntos medibles disjuntos dos a dos $\int_{\cup_m E_m} s = \sum_m \int_{E_m} s$.

e) Si E_m es una colección numerable de conjuntos medibles $E_1 \subset E_2 \subset ...$ con $E = \cup_m E_m$ se tiene $\int_E s = \lim \int_{E_m} s$.

f) $\int_E s = \int s\chi_E$.

Demostración. a) Es inmediata.

b) Sean $s_1 = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$ y $s_2 = \sum \beta_j \chi_{B_j}$. Tendremos que $s_1 + s_2 = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}$. De aquí, que $\int_E (s_1 + s_2) = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) m(A_i \cap B_j \cap E) =$

$\sum_{i,j} \alpha_i m(A_i \cap B_j \cap E) + \sum_{i,j} \beta_j m(A_i \cap B_j \cap E) = \int_E s_1 + \int_E s_2$.

c) Sean $s_1 \leq s_2$. Si escribimos como antes $s_1 = \sum_{i,j} \alpha_i \chi_{A_i \cap B_j}$, $s_2 = \sum_{i,j} \beta_j \chi_{A_i \cap B_j}$, tendremos $\alpha_i \leq \beta_j$ si $A_i \cap B_j \neq \phi$. Es ahora evidente que $\int_E s_1 \leq \int_E s_2$.

d) y e) se deducen de la propiedad de la aditividad numerable de la medida (teorema 2.19) y de su corolario 2.20.

f) Es inmediata.

□

3.3 Integrales de funciones medibles no negativas

Definición 3.4. *Sea $f : R^n \to [0, +\infty]$ una función medible. E un conjunto medible. Se define la integral de f sobre E como*

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E s;\ 0 \leq s \leq f, \quad s \text{ función simple medible} \right\}.$$

Obsérvese que la integral puede ser $+\infty$. Debe también observarse que si f es una función simple la definición coincide con la ya dada para estas funciones.

Veamos un primer grupo de propiedades elementales de esta integral.

Teorema 3.9. *a) Sea $0 \leq f_1 \leq f_2$, funciones medibles, E conjunto medible. Se tiene $\int_E f_1 \leq \int_E f_2$.*

b) Sea $0 \leq f$ función medible, $\alpha \geq 0$, $\alpha \in R$. Entonces $\int_E \alpha f = \alpha \int_E f$.

c) Sea $0 \leq f$ función medible, $E_1 \subset E_2$ medibles. Se cumple $\int_{E_1} f \leq \int_{E_2} f$.

d) Para f y E como antes $\int_E f = \int f \chi_E$.

Demostración. a), b) y c) son inmediatas. Veamos d). Si $0 \leq s \leq f$ se sigue que $s\chi_E \leq \chi_E f$ y además $s\chi_E$ es una función simple. De aquí que $\int_E s = \int s\chi_E \leq \int f\chi_E$. Por lo tanto $\int_E f \leq \int f\chi_E$. La desigualdad en el otro sentido sigue de que $f\chi_E \leq f$ implica $\int f\chi_E = \int_E f\chi_E \leq \int_E f$.

□

Teorema 3.10. *Sea E un conjunto medible y $f : E \to [0, +\infty]$ medible. Entonces*

a) Si Z es un conjunto de medida cero $\int_E f = \int_{E-Z} f$.

b) Si $\int_E f < +\infty$ entonces $m\{x \in E;\ f(x) = +\infty\} = 0$.

c) Si $\int_E f = 0$ entonces $m\{x \in E;\ f(x) \neq 0\} = 0$.

Una propiedad que se cumple para todos los puntos salvo para los de un conjunto de medida cero se suele decir que se cumple casi por todo (c.p.t.). De esta forma la conclusión en b) se enunciará diciendo que f es finita casi por todo. La conclusión de c) será que f es nula casi por todo.

Demostración. a) La propiedad vale para las funciones simples ya que si A es medible, $m(A) = m(A - Z)$. Se sigue entonces para cualquier función medible. Obsérvese que esta propiedad indica que la definición de f sobre un conjunto de medida nula no es relevante a efectos de la integración, en forma análoga a como ya vimos que no lo era a efectos de la medibilidad de la función. Si tenemos una función medible y la variamos sobre un conjunto de medida cero, ésta continúa siendo medible y su integral no varía.

b) Sea $F = \{x \in E;\ f(x) = +\infty\}$. Tendremos $\int_E f \geq \int_F f = \int_F (+\infty)$. Si esta integral es finita implica que $m(F) = 0$.

c) Consideremos $E_n = \left\{x \in E;\ f(x) > \frac{1}{n}\right\}$. Tendremos $\int_{E_n} \frac{1}{n} \leq \int_{E_n} f \leq \int_E f = 0$. De aquí que $m(E_n) = 0$ y, como $\{x \in E;\ f(x) \neq 0\} = \cup_n E_n$ se sigue que $m(\{x \in E;\ f(x) \neq 0\}) = 0$.

□

Veamos un teorema de paso al límite bajo el signo integral que tendrá consecuencias importantes. La hipótesis relevante en este teorema es la monotonía de la sucesión.

Teorema 3.11. (Teorema de la convergencia monótona)

Sea E un conjunto medible y f_n una sucesión de funciones medibles tales que

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq ... \text{ c.p.t.}$$

Entonces existirá c.p.t. $\lim f_n$*. Si le llamamos f se tiene*

$$\lim \int_E f_n = \int_E f.$$

Demostración. En primer lugar observemos que si en el conjunto de medida cero donde la sucesión $\{f_n\}$ deja de ser monótona damos como nuevo valor de las funciones 0, la sucesión será ahora monótona en todos los puntos y los valores de las integrales no habrán variado. Podemos pues ya suponer desde un principio que la sucesión de las funciones es monótona en todos los puntos. De esta monotonía se sigue que la sucesión $\{\int_E f_n\}$ es monótona creciente y por tanto tendrá límite. Llamémosle l. Por otro lado la función $f = \lim f_n$ será una función medible y $f_n \leq f$. Por tanto $\int_E f_n \leq \int_E f$ y $l = \lim \int_E f_n \leq \int_E f$.

Veamos la desigualdad en sentido contrario. Sea s una función simple, medible $0 \leq s \leq f$ y sea λ un número real $0 < \lambda < 1$. Consideremos $E_m = \{x \in R^n;\ f_m(x) \geq \lambda s(x)\}$. Estos conjuntos son medibles y $E_1 \subset E_2 \subset ...$ y $R^n = \cup_m E_m$. Tendremos

$$\int_E f_m \geq \int_{E \cap E_m} f_m \geq \lambda \int_{E \cap E_m} s.$$

Tomando límites y teniendo en cuenta que $E = \cup_m (E \cap E_m)$

$$l \geq \lambda \lim \int_{E \cap E_m} s = \lambda \int_E s.$$

Puesto que es válido para cada $\lambda < 1$, pasando al límite cuando $\lambda \to 1$, $l \geq \int_E s$. Tomando el supremo en s concluimos que $l \geq \int_E f$.

□

Ejemplo 3.2. *Sea f una función continua no negativa, definida en $I = [a, b]$. Consideremos una sucesión Π_n de particiones de I de manera que cada una se más fina que la anterior y que el máximo de las longitudes de los intervalos que intervienen en la partición tiene por límite cero. Asociemos a cada una de las particiones anteriores una función de la forma siguiente. Si Π_n está formado por los puntos $a = x_0 < x_1 < ... < x_{m-1} < x_m = b$ le haremos corresponder la función $f_n = s_1\chi_{[x_0,x_1)} + s_2\chi_{[x_1,x_2)} + ... + s_{m-1}\chi_{[x_{m-2},x_{m-1})} + s_m\chi_{[x_{m-1},x_m]}$, donde s_i es el ínfimo de la función en el intervalo correspondiente $[x_{i-1}, x_i)$. La sucesión $\{f_n\}$ es monótona creciente y tiene por límite f. El teorema de la convergencia monótona dirá que f es integrable y que su integral es el límite de la sucesión $\int f_n = \sum_i s_i \, |x_i - x_{i-1}|$. Observamos que este límite no es otra cosa que la integral de Riemann de f que, de esta forma, coincide con su integral de Lebesgue.*

Obsérvese que para cualquier función medible no negativa f siempre existe una sucesión $\{s_n\}$ monótona creciente de funciones simples medibles con límite f. Tendremos entonces que $\int_E f = \lim \int_E s_n$. Veamos algunas consecuencias.

Teorema 3.12. *a) Sean f, g funciones medibles, no negativas, definidas en un conjunto medible E. Entonces*

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

b) Si $f_n : E \to [0, +\infty]$ son funciones medibles, se cumple

$$\int_E \sum f_n = \sum \int_E f_n.$$

c) Sea E_n una sucesión de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos, f una función medible en $E = \cup E_n$. Entonces

$$\int_E f = \sum \int_{E_n} f.$$

Demostración. a) Consideremos dos sucesiones monótonas de funciones simples medibles $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ que converjan respectivamente a f y a g. Tendremos $\int_E (s_n + t_n) = \int_E s_n + \int_E t_n$ y, pasando al límite, $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$.

b) Es suficiente aplicar el teorema de la convergencia monótona a las sumas parciales de la serie $\sum f_n$ y tener en cuenta la propiedad anterior.

c) Considerar $f\chi_E = \sum f\chi_{E_n}$ y aplicar b).

□

Veamos una propiedad referente a funciones medibles no negativas, consecuencia del teorema de la convergencia monótona y que se utilizará en otros teoremas de paso al límite bajo el signo integral.

Teorema 3.13. (Lema de Fatou) *Sea f_n una sucesión de funciones medibles definidas en un conjunto medible E, a valores en $[0, +\infty]$. Se cumple*

$$\int_E \liminf f_m \leq \liminf \int_E f_m.$$

Demostración. Sea $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, ...\}$. Es una sucesión monótona creciente de funciones medibles no negativas cuyo límite es $\liminf f_m$. El teorema de la convergencia monótona nos dirá que

$$\int_E \liminf f_m = \lim \int_E g_m.$$

Por otro lado $g_m \leq f_r$ para $r \geq m$. Por tanto $\int_E g_m \leq \inf_{r\geq m} \int_E f_r$. De donde

$$\lim \int_E g_m \leq \lim \left(\inf_{r\geq m} \int_E f_r \right) = \liminf \int_E f_m.$$

Esto permite concluir la prueba.

□

Ejemplo 3.3. *La desigualdad en la conclusión del lema de Fatou puede ser estricta. Considérese, por ejemplo, como funciones f_n la función característica de un conjunto χ_D si n es par y $1 - \chi_D$ si n es impar. Tendremos que $\liminf f_n = 0$ mientras que $\liminf \int f_n$ no será nula si las integrales de χ_D y de $1 - \chi_D$ no lo son.*

3.4 Funciones integrables

Definición 3.5. *Sea E un conjunto medible de R^n y $f : E \to [-\infty, +\infty]$ una función medible. Se dice que f es integrable si las integrales $\int_E f^+$ y $\int_E f^-$ son finitas. En este caso la integral de f en E es $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$. Denotaremos al conjunto de las funciones integrables en E por $L(E)$.*

La finitud de las integrales $\int_E f^+$ y $\int_E f^-$ implica que la función f toma valores finitos salvo en un conjunto de medida nula. Es por ello que las operaciones entre funciones integrables se deberán entender que están definidas casi por todo. Esto no ofrece problemas referente a propiedades de las integrales de estas funciones ya que de la definición se sigue que el valor de una integral no depende de los valores que pueda tomar la función sobre un conjunto de medida nula.

Otra observación que conviene hacer sobre la definición de función integrable es que una función f medible, es integrable si y sólo si $\int_E |f|$ es finita. Esto se deduce de que $|f| = f^+ + f^-$ y de que $f^+,\ f^- \leq |f|$. De esta forma, si f es medible, es integrable si y sólo si lo es $|f|$.

Veamos un grupo de propiedades elementales de las funciones integrables.

Teorema 3.14. *a) Si $f, g \in L(E)$, entonces $f + g \in L(E)$ y $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$.*

b) Si $f \in L(E)$ y $\alpha \in R$, entonces $\alpha f \in L(E)$ y $\int_E \alpha f = \alpha \int_E f$.

c) Sean $f, g \in L(E)$, $f \leq g$. Entonces $\int_E f \leq \int_E g$.

d) Si $f \in L(E)$, se cumple $|\int_E f| \leq \int_E |f|$.

e) Sea f medible en E y $g \in L(E)$ tal que $|f| \leq g$. Entonces $f \in L(E)$.

f) Sean E y F conjuntos medibles, $F \subset E$ y $f \in L(E)$. Entonces $f \in L(F)$ y $\int_F f = \int_E f\chi_F$.

g) Sea una sucesión E_m de conjuntos medibles disjuntos dos a dos. $E = \cup E_m$ y $f \in L(E)$. Entonces $\int_E f = \sum \int_{E_m} f$.

Demostración. a) La desigualdad $|f+g| \leq |f|+|g|$ prueba que $\int_E |f+g| < \int_E |f| + \int_E |g| < +\infty$ y, por tanto, la integrabilidad de $f+g$. Llamemos $h = f+g$. Se tendrá $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$. De donde $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. Por lo tanto $\int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E h^- + \int_E f^+ + \int_E g^+$. Como todas las integrales son finitas se sigue que $\int_E h = \int_E f + \int_E g$.

b) Si $\alpha = 0$ es trivial. Si $\alpha > 0$, $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ y $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ y por tanto

$$\int_E \alpha f = \int_E \alpha f^+ - \int_E \alpha f^- = \alpha \int_E f.$$

Si $\alpha < 0$, $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ y $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$. Esto implica que

$$\int_E \alpha f = (-\alpha) \int_E f^- - (-\alpha) \int_E f^+ = \alpha \int_E f.$$

c) Si $f \leq g$ tenemos $g - f \geq 0$, de donde $\int_E (g-f) \geq 0$ y $\int_E f \leq \int_E g$.

d) Puesto que $f, -f \leq |f|$ los apartados anteriores dan $\int_E f \leq \int_E |f|$ y $-\int_E f \leq \int_E |f|$.

e) Trivialmente $|f|$ es integrable y por tanto lo es f.

f) y g) Basta considerar la mismas propiedades para f^+ y para f^-.

□

Podemos dar ahora una versión del teorema de la convergencia monótona para funciones integrables no necesariamente no negativas.

Teorema 3.15. *Sea E un conjunto medible y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en E tales que $f_1(x) \leq f_2(x) \leq ...$c.p.t. en E y $\int_E f_n \leq C$. Entonces $f = \lim f_n \in L(E)$ y $\int_E f = \lim \int_E f_n$.*

Demostración. Consideremos la sucesión monótona creciente c.p.t. de funciones no negativas c.p.t. $\{f_n - f_1\}$. El teorema de la convergencia monótona para estas funciones dará que $\int_E (f - f_1) = \lim \int_E (f_n - f_1) \leq C - \int_E f_1$. En particular la función $f - f_1$ será integrable y, por serlo f_1 también lo será su suma f. Tendremos entonces que

$$\int_E f - \int_E f_1 = \lim \left(\int_E f_n - \int_E f_1 \right).$$

La finitud de $\int_E f_1$ nos permite concluir la prueba.

□

Obsérvese que si la sucesión de funciones integrables es monótona decreciente y sus integrales están acotadas inferiormente también podremos pasar al límite bajo el signo integral. Basta considerar la sucesión de las funciones $-f_n$ y aplicar la proposición anterior. No obstante debiera observarse que sin la hipótesis de integrabilidad, aún siendo las funciones no negativas, no puede concluirse el teorema. Por ejemplo las funciones $\chi_{[n,+\infty)}$, definidas en R, forman una sucesión decreciente de integral $+\infty$. Su límite es la función idénticamente cero cuya integral es 0.

Corolario 3.16. *Sea E un conjunto medible y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en E tales que $f_1(x) \geq f_2(x) \geq ...$c.p.t. en E y $\int_E f_n \geq C$. Entonces $f = \lim f_n \in L(E)$ y $\int_E f = \lim \int_E f_n$.*

□

Teorema 3.17. (Teorema de la convergencia dominada)

Sea E un conjunto medible y $f_n : E \to [-\infty, +\infty]$ una sucesión de funciones medibles tales que

a) existe $\lim f_n(x) = f(x)$ c.p.t. en E.

b) Existe una función $g \in L(E)$ tal que c.p.t. en E $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Entonces $f \in L(E)$ y $\int_E f = \lim \int_E f_n$.

Demostración. Variando si es preciso f_n y f en un conjunto de medida nula no hay problema en suponer que el límite en a) y la desigualdad en b) existen en todos los puntos. Tendremos entonces que $|f(x)| \leq g(x)$ y tanto f_n como f serán integrables. Consideremos

$$g - f = \lim(g - f_n)$$
$$g + f = \lim(g + f_n)$$

donde $g - f_n \geq 0$ y $g + f_n \geq 0$.

Utilizando el lema de Fatou (teorema 3.13) tendremos

$$\int_E (g - f) \leq \liminf \int_E (g - f_n)$$
$$\int_E (g + f) \leq \liminf \int_E (g + f_n)$$

Puesto que $\int_E g < +\infty$ y tanto f_n como f son integrables podremos deducir

$$\int_E (-f) \leq \liminf \int_E (-f_n)$$
$$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n.$$

Por tanto

$$\limsup \int_E f_n \leq \int_E f \leq \liminf \int_E f_n.$$

De donde $\int_E f = \lim \int_E f_n$.

□

Obsérvese que la convergencia uniforme de una sucesión de funciones no implica que podamos pasar al límite bajo el signo integral. Por ejemplo la sucesión $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$ converge uniformemente a 0 mientras que sus integrales son todas ellas igual a 1. No obstante si $f_n \to f$ uniformemente en un conjunto E de medida finita entonces si que se deduce que $\int_E f_n \to \int_E f$. Basta tener en cuenta que si $|f_n - f| < \varepsilon$ en E entonces $|\int_E f_n - \int_E f| < \varepsilon m(E)$.

Veamos un teorema consecuencia de los teoremas de convergencia monótona y dominada.

Teorema 3.18. *Sea f_n una sucesión de funciones integrables en un conjunto medible E. Si se cumple $\sum_n \int_E |f_n| < +\infty$ entonces $\sum |f_n|$ converge c.p.t. en E, $\sum f_n \in L(E)$ y $\int_E \sum f_n = \sum \int_E f_n$.*

Demostración. Por el teorema de la convergencia monótona (teorema 3.11) se sigue que $\sum |f_n|$ es integrable en E. En particular la suma de la serie será finita c.p.t. en E y, en particular, $\sum f_n$ será convergente c.p.t. en E. Por otro lado las sumas parciales de esta serie estarán dominadas por una función integrable, ya que $\left|\sum_{n=1}^{N} f_n\right| \leq \sum_n |f_n| \in L(E)$. El teorema de la convergencia dominada (teorema 3.17) permitirá acabar la demostración del teorema.

□

3.5 Relación entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue

3.5.1 Integral de Riemann propia e integral de Lebesgue

Teorema 3.19. *Sea f una función definida en un intervalo I de R^k a valores en R, integrable en el sentido de Riemann. Entonces es integrable en el sentido de Lebesgue y las integrales coinciden.*

Demostración. Escribiremos con la letra L o R delante de la integral cuando se quiera precisar si la integral es en el sentido de Lebesgue o de Riemann respectivamente. Sea Π_n una sucesión de particiones de I en subintervalos, cada una más fina que la anterior y tal que $R-\int f = \lim s(f,\Pi_n) = \lim S(f,\Pi_n)$. Esto se deduce de la expresión de la integral de Riemann como ínfimo de sumas superiores o como supremo de sumas inferiores, y de las propiedades elementales de estas sumas. Sean I_i los intervalos de la partición. Tendremos que si m_i y M_i son los supremo e ínfimo de f respectivamente en el intervalo I_i

$$s(f,\Pi_n) = \int t_n \text{ donde } t_n = \sum m_i \chi_{I_i}$$

$$S(f,\Pi_n) = \int T_n \text{ donde } T_n = \sum M_i \chi_{I_i}$$

En todos los puntos que no son frontera de los diversos intervalos que aparecen en las particiones Π_n y, por tanto, c.p.t. en I se cumplirán las desigualdades

$$t_1 \leq t_2 \leq ... \leq f \leq ... \leq T_2 \leq T_1.$$

Las funciones $t(x) = \lim t_n(x)$ y $T(x) = \lim T_n(x)$ existirán c.p.t. y serán funciones medibles. Si probamos que c.p.t. $t(x) = T(x)$, estas funciones coincidirán con f y ésta será una función medible. Ahora bien $T - t$ es el límite de la sucesión monotóna decreciente de funciones integrables no negativas c.p.t. $T_n - t_n$. El teorema de la convergencia monótona (teorema 3.16) nos dirá que $L - \int (T-t) = \lim \int (T_n - t_n). = 0$. Por tanto (teorema 3.10) $T - t = 0$ c.p.t.. El teorema de la convergencia monótona nos dará también que $L - \int f = \lim \int t_n = R - \int f$.

□

Puede darse una caracterización de las funciones integrables en el sentido de Riemann en términos de la medida de los puntos de discontinuidad de la función. Concretamente f definida y acotada en $[a,b]$ es integrable en el sentido de Riemann si y sólo si el conjunto de puntos de discontinuidad de la función es de medida nula. Puede verse en el apéndice del capítulo 1 la demostración. Conociendo este teorema la medibilidad de una función integrable Riemann es ya evidente y la demostración del teorema anterior podría haberse simplificado.

Obsérvese que el teorema permite aplicar al cálculo de la integración en el sentido de Lebesgue de las funciones integrables en el sentido de Riemann los métodos conocidos para éstas. Por ejemplo el teorema fundamental del cálculo o el cálculo por integrales iteradas cuando éste sea válido.

Ejemplo 3.4. *Sea I un intervalo cerrado, f continua en I. La función es integrable Lebesgue y su integral coincide con la integral de Riemann. Más generalmente, si $A \subset I$ es un conjunto con contenido de Jordan definido la integral de Lebesgue sobre A coincide con la integral de Riemann.*

3.5.2 Relaciones de la integración de Lebesgue con la integración impropia de Riemann

Teorema 3.20. *Sea $f : [a, b) \to R$ una función localmente integrable en el sentido de Riemann con $b \in R \cup \{+\infty\}$. Son equivalentes:*

a) La integral impropia de Riemann $\int_a^{\overrightarrow{b}} f$ es absolutamente convergente, es decir existe C tal que $\int_a^x |f| \leq C$ para $a < x < b$.

b) $f \in L([a, b))$.

En este caso $\int_a^{\overrightarrow{b}} f = L - \int_{[a,b]} f$.

Demostración. Supongamos que se cumple a). Sea $\{x_n\}$ una sucesión monótona creciente de números reales, $a < x_n < b$ y $\{x_n\} \to b$. Tendremos $f = \lim f\chi_{[a,x_n]}$. Cada elemento de esta sucesión es medible, por ser R-integrable, y por tanto f es medible. Por otro lado, puesto que $|f| = \lim |f| \chi_{[a,x_n]}$, aplicando el teorema de la convergencia monótona (teorema 3.11) y la hipótesis a) se sigue que $|f|$ es L- integrable y por tanto lo es f.

Sea ahora b) cierto. Se tendrá $\int_a^x |f| \leq \int_{[a,b)} |f|$ y por tanto vale a).

El teorema de la convergencia dominada (teorema 3.17) da

$$\int_a^{\overrightarrow{b}} f = \lim \int_a^{x_n} f = L - \int_{[a,b]} f.$$

□

Ejemplo 3.5. *La función $\frac{e^{-x}}{x}$ es integrable en $[1, +\infty)$ ya que la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ es convergente. Por la misma razón son integrables las funciones x^{-a} para $a < 1$. Sus integrales coinciden con las correspondientes integrales de Riemann impropias.*

Debe observarse que la existencia de integral impropia de Riemann no implica la convergencia de Lebesgue. De hecho, como consecuencia del teorema anterior, si existe la integral impropia pero sin convergencia absoluta la función no es integrable en el sentido de Lebesgue.

Ejemplo 3.6. *Sea la función $f : [0, +\infty) \to R$ definida por $f(x) = \frac{(-1)^n}{n}$ si $n - 1 \leq x < n$. Es integrable en sentido impropio de Riemann pues $\int_0^x f = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i} + \frac{(-1)^n}{n}(x - n + 1)$ si $n - 1 \leq x < n$ y por tanto su límite cuando x tiende a $+\infty$ es la suma de la serie convergente $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. La integral no converge absolutamente pues $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ y, por lo tanto, la función no es integrable en el sentido de Lebesgue.*

3.6 Continuidad de una función definida por una integral dependiente de un parámetro.

Teorema 3.21. *Sean I, J dos intervalos de R^p y R^q respectivamente y $f : I \times J \to R$ tal que*
a) Para cada $y \in J$ la función de I en R tal que $x \to f(x, y)$ es medible.
b) Existe $g \in L(I)$ tal que para cada $y \in J$ se cumple $|f(x, y)| \leq g(x)$ c.p.t. en I.
c) La función $f(x, y)$ es continua en la variable y c.p.t. x de I.
Entonces $f(., y) \in L(I)$ para cada y y su integral es una función continua en y, es decir

$$\lim_{y\to t} \int_I f(x, y) = \int_I \lim_{y\to t} f(x, y) = \int_I f(x, t).$$

Demostración. Desde luego de a) y de b) se sigue que $f(x, y)$ es integrable en la variable x para cada y. Sea ahora y_n una sucesión que tenga por límite t. Llamemos $F_n(x) = f(x, y_n)$. De la condición c) tenemos que c.p.t. x se cumple que $F_n(x) \to f(x, t)$. Además $|F_n(x)| \leq g(x)$. Por el teorema de la convergencia dominada (teorema 3.17) podremos pasar al límite bajo el signo integral.

□

Ejemplo 3.7.
1. *Se define la función Γ mediante la integral $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{y-1}dx$. Esta integral es convergente para $y > 0$. En efecto, basta tener en cuenta que si $0 < y_0 \leq y \leq y_1 < +\infty$, $|e^{-x}x^{y-1}|$ está acotada por cx^{y_0-1} para $0 < x \leq 1$ y por $e^{-x}x^{y_1-1}$ para $x \geq 1$ y que esta función "dominadora" es integrable. La proposición anterior permitirá asegurar que Γ está definida y es continua en $y_0 \leq y \leq y_1$ y, por tanto, para cada $y > 0$.*

2. *$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$ es convergente y continua para $y > 0$. En forma similar al ejemplo anterior basta considerar para $0 < y_0 \leq y \leq y_1 < +\infty$ la acotación $\left|e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\right| \leq ce^{-xy_0}$.*

3.7 Derivación bajo el signo integral

Teorema 3.22. *Sean I, J intervalos abiertos de R^p y de R respectivamente, $f : I \times J \to R$ que cumple*
a) Para cada $y \in J$ la función $f(., y)$ es medible y para un $a \in J$, $f(., a) \in L(I)$.
b) Existe $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ para cada $(x, y) \in I \times J$.
c) Existe $g \in L(I)$ tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq g(x)$ para $(x, y) \in I \times J$.
Entonces para cada $y \in J$, $f(., y) \in L(I)$, la función $F(y) = \int_I f(x, y)$ es derivable en todos sus puntos y $F'(y) = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Demostración. Aplicando el teorema del valor medio, para cada x, y existe c comprendido entre a e y tal que $f(x, y) - f(x, a) = (y - a)\frac{\partial f}{\partial y}(x, c)$. Por tanto $|f(x, y)| \leq |f(x, a)| + |y - a|\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, c)\right|$. De a) y b) se sigue entonces que $f(., y) \in L(I)$.

Sea $y \in J$ y una sucesión $y_n \to y$ con $y_n \neq y$. La sucesión $g_n(x) = \frac{f(x,y_n)-f(x,y)}{y_n-y} \in L(I)$ tiene por límite $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ para cada $x \in I$. Como consecuencia del teorema del valor medio

$|g_n(x)| \leq g(x)$, para $x \in I$ con $g \in L(I)$. Podremos aplicar el teorema de la convergencia dominada con lo que

$$\lim \frac{F(y_n) - F(y)}{y_n - y} = \lim \int_I g_n(x) = \int_I \lim g_n(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

□

Ejemplo 3.8. *La función $\Gamma(y)$ es derivable en $0 < y < +\infty$. En efecto, la derivada bajo el signo integral de la expresión de Γ da $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{y-1} \ln x \, dx$. Será suficiente tener en cuenta que para $0 < y_0 \leq y \leq y_1 < +\infty$ se tiene la acotación $|e^{-x} x^{y-1} \ln x| \leq c x^{y_0 - 1} |\ln x|$ si $0 < x \leq 1$ y $|e^{-x} x^{y-1} \ln x| \leq e^{-x} x^{y_1 - 1} |\ln x|$ si $1 \leq x < +\infty$ y que la función definida por $c x^{y_0 - 1} |\ln x|$ si $0 < x \leq 1$ y por $e^{-x} x^{y_1 - 1} |\ln x|$ si $1 \leq x < +\infty$ es integrable.*

3.8 Integración en un espacio producto

Designaremos por (x, y) a los elementos de $R^n = R^p \times R^q$ para $x \in R^p$ y $y \in R^q$. Dado un conjunto E de R^n y $x \in R^p$ consideraremos el subconjunto de R^q, $E_x = \{y \in R^q;\ (x, y) \in E\}$. Análogamente, si $y \in R^q$ sea $E^y = \{x \in R^p;\ (x, y) \in E\}$. Designaremos por m_n, m_p, m_q respectivamente a las medidas de Lebesgue en R^n, R^p, R^q si queremos especificar de cual se trata. Siguiendo estas notaciones tendremos el siguiente teorema.

Teorema 3.23. *Sea E un conjunto medible de R^n. Entonces*

a) Los conjuntos E_x son medibles c.p.t. x. Análogamente los E^y son medibles c.p.t. y.

b) Las funciones $x \to m_q(E_x)$ y $y \to m_p(E^y)$ son medibles.

c) $m_n(E) = \int_{R^p} m_q(E_x) = \int_{R^q} m_p(E^y)$.

Demostración. Veremos, en primer lugar, que el teorema se cumple para los conjuntos de la forma producto de dos intervalos, pasaremos después a probarlo para el caso de un conjunto abierto, seguidamente para un conjunto medible acotado y, finalmente para un conjunto medible cualquiera. Probaremos el teorema únicamente para los conjuntos E_x y su correspondiente función medible. En forma completamente análoga se probarán los enunciados para los conjuntos E^y y la función medible $y \to m_p(E^y)$.

Sea $E = I^p \times I^q$. Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados o semiabiertos. Tendremos que $E_x = I^q$ si $x \in I^p$ y $E_x = \phi$ si $x \notin I^p$. De esta forma E_x es un conjunto medible para todo x y la función $x \to m_q(E_x) = m_q(I^q)\chi_{I^p}(x)$ es una función medible. Por último, se cumple c) para estos conjuntos ya que

$$\int_{R^p} m_q(I^q)\chi_{I^p} = m_p(I_p) m_q(I_q) = m_n(I_p \times I_q).$$

Sea ahora E un conjunto abierto. Se podrá expresar como una unión de un conjunto numerable de intervalos semiabiertos disjuntos. Sea una tal descomposición $E = \cup I_m$. Cada uno de estos intervalos cumple el teorema. Tendremos que $E_x = \cup I_{mx}$ y, por ser unión numerable de conjuntos medibles, será medible para cada x. La función $m_q(E_x) = \sum m_q(I_{mx})$ y será por tanto

medible. Por último del teorema de la convergencia monótona (teorema 3.11) y de la propiedad de la aditividad numerable de las medidas (teorema 2.19) tendremos

$$m_n(E) = \sum m_n(I_m) = \sum \int_{R^p} m_q(I_{mx}) = \int_{R^p} \sum m_q(I_{mx}) = \int_{R^p} m_q(E_x)$$

y, por tanto, vale el teorema para conjuntos abiertos.

Seguidamente sea E un conjunto medible acotado. Existirán una sucesión de conjuntos abiertos A_m acotados y una sucesión K_m de compactos tales que

$$A_1 \supset A_2 \supset ... \supset E \supset ... \supset K_2 \supset K_1$$

con $m_n(A_m - K_m) \to 0$.

A cada abierto $A_m - K_m$ se le podrá aplicar el teorema con lo que $m_q(A_{mx} - K_{mx})$ será una sucesión de funciones medibles, decreciente y no negativas. Tendrá un límite, sea $\varphi(x) = \lim m_q(A_{mx} - K_{mx})$. El teorema de la convergencia monótona decreciente (teorema 3.16) nos dará que $\int_{R^p} \varphi(x) = \lim \int_{R^p} m_q(A_{mx} - K_{mx}) = \lim m_n(A_m - K_m) = 0$. Tendremos entonces que $\varphi(x) = 0$ c.p.t. x. Consideremos los puntos x en que $\lim m_q(A_{mx} - K_{mx}) = 0$. Puesto que A_{mx} son abiertos y K_{mx} son compactos tendremos que E_x será medible y vale a) para estos conjuntos. Tendremos también que, para los mismos puntos, $m_q(E_x) = \lim m_q(A_{mx})$ y por tanto la función $x \to m_q(E_x)$ será medible. Por último el teorema de la convergencia monótona dará

$$m_n(E) = \lim m_n(A_m) = \lim \int_{R^p} m_q(A_{mx}) = \int_{R^p} \lim m_q(A_{mx}) = \int_{R^p} m_q(E_x).$$

Esto prueba c) para los conjuntos medibles acotados.

Sea finalmente E un conjunto medible arbitrario. Consideremos los conjuntos $E_m = E \cap ([-m, m] \times \cdots \times [-m, m])$. Tendremos que $E_x = \cup E_{mx}$. Cada E_{mx} es medible para cada x salvo un conjunto N_m de medida nula. E_x será medible salvo quizá en $\cup N_m$ que es de medida nula. Tendremos, por otro lado, $m_q(E_x) = \lim m_q(E_{mx})$ y por ser $m_q(E_{mx})$ funciones medibles será a su vez medible. Una nueva aplicación del teorema de la convergencia monótona junto a propiedades básicas de la medida permite obtener

$$m_n(E) = \lim m_n(E_m) = \lim \int_{R^p} m_q(E_{mx}) = \int_{R^p} \lim m_q(E_{mx}) = \int_{R^p} m_q(E_x)$$

que nos da c).

□

Dada una función f definida en el espacio producto $R^p \times R^q$ se designará por f_x a la función definida en R^q mediante $f_x(y) = f(x, y)$. Análogamente f^y denotará la función definida en R^p por $f^y(x) = f(x, y)$. Por ejemplo, si f es χ_E, la función característica de un conjunto $E \subset R^p \times R^q$, tendremos que $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$ y $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$.

Teorema 3.24. (Teorema de Tonelli)

Sea $f : R^p \times R^q \to [0, +\infty]$ una función medible, no negativa. Entonces

a) Las funciones f_x son c.p.t. x medibles. Análogamente las funciones f^y.

b) La función $x \to \int_{R^q} f_x$ es medible. Análogamente la función $y \to \int_{R^p} f^y$.

c) Se cumple $\int_{R^p \times R^q} f = \int_{R^p} \int_{R^q} f_x = \int_{R^q} \int_{R^p} f^y$.

Demostración. El teorema anterior es equivalente a decir que el teorema es válido para funciones características de conjuntos medibles. Será entonces también cierto para funciones simples medibles no negativas. Para una función f como la del enunciado consideremos una sucesión s_m de funciones simples no negativas, monótona creciente y cuyo límite es f. Tendremos que para cada x de R^p, $s_{mx} \to f_x$. Por lo que acabamos de decir cada s_{mx} es medible salvo en un conjunto N_m de medida nula y, por lo tanto, todas ellas son medibles salvo en $\cup N_m$ que es de medida nula. Por tanto las funciones f_x son medibles c.p.t. x y vale a). Por el teorema de la convergencia monótona se tiene $\int_{R^q} f_x = \lim \int_{R^q} s_{mx}$ y por ser éstas medibles lo será el límite y por tanto es válido b). Por último, el teorema de la convergencia monótona aplicado dos veces dará

$$\int_{R^p} \int_{R^q} f_x = \lim \int_{R^p} \int_{R^q} s_{mx} = \lim \int_{R^p \times R^q} s_m = \int_{R^p \times R^q} f.$$

De forma análoga se prueban los enunciados cambiando el orden de integración de las variables. □

Ejemplo 3.9. *1. Expresemos el volumen del interior del cilindro en R^3 definido por $x^2+y^2 = 4x$ comprendido entre el plano $z = 0$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$ como integrales iteradas. Para cada $0 < x < 4$ los valores de y estarán en el intervalo de extremos $-\sqrt{4x - x^2}$ y $+\sqrt{4x - x^2}$. Para cada par (x, y) la variable z estará en el intervalo $\left[0, \frac{x^2+y^2}{4}\right]$. Tendremos entonces que el volumen será $\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{+\sqrt{4x-x^2}} dy \int_0^{\frac{x^2+y^2}{4}} dz$.*

2. Consideremos la función $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ definida en $(0, 1) \times (0, 1)$. Se tiene que

$$\int_0^1 \frac{xy}{x^2 + y^2} dy = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Esta función se extiende por continuidad en $x = 0$ y por tanto es integrable en $(0, 1)$. Luego, por tratarse de una función no negativa, f es integrable en $(0, 1) \times (0, 1)$.

Obsérvese que las únicas hipótesis del teorema son la no negatividad de la función y su medibilidad. A partir de éstas si una de las integrales iteradas es finita se obtiene que, permutando el orden de integración, el resultado es el mismo y coincide con la integral en el espacio producto. En el enunciado no se excluye que todas las integrales sean $+\infty$, pero si una de las integrales iteradas es finita ya se puede asegurar que la función es integrable. Como veremos sin la hipótesis de no negatividad de la función el resultado puede ser falso. Veamos antes un teorema en que sin esta hipótesis de no negatividad permite obtener la integral en el espacio producto como integrales iteradas.

Teorema 3.25. (Teorema de Fubini)

Sea $f : R^p \times R^q \to R$ una función integrable. Entonces

a) Las funciones f_x son c.p.t. x integrables. Análogamente las funciones f^y son c.p.t. y integrables.

b) La función $x \to \int_{R^q} f_x$ es integrable. Análogamente lo es la función $y \to \int_{R^p} f^y$.

c) Se cumple $\int_{R^p \times R^q} f = \int_{R^p} \int_{R^q} f_x = \int_{R^q} \int_{R^p} f^y$.

Demostración. Las funciones f^+ y f^- son no negativas y de integral finita. El teorema anterior nos da que f_x^+ y f_x^- son medibles, que $\int_{R^p}\int_{R^q} f_x^+ = \int_{R^p\times R^q} f^+ < +\infty$ y $\int_{R^p}\int_{R^q} f_x^- = \int_{R^p\times R^q} f^- < +\infty$. En particular $\int_{R^q} f_x^+$ y $\int_{R^q} f_x^-$ son finitas c.p.t. y por tanto f_x son integrables c.p.t. x. Tendremos que $\int_{R^q} f_x = \int_{R^q} f_x^+ - \int_{R^q} f_x^-$. Puesto que las funciones de x, $\int_{R^q} f_x^+$ y $\int_{R^q} f_x^-$ son integrables lo será su diferencia (vale, entonces b)) y su valor será

$$\int_{R^p}\int_{R^q} f = \int_{R^p}\int_{R^q} f_x^+ - \int_{R^p}\int_{R^q} f_x^- = \int_{R^p\times R^q} f^+ - \int_{R^p\times R^q} f^- = \int_{R^p\times R^q} f.$$

De una forma análoga se prueban los enunciados cambiando el orden de integración de las variables.

□

Con frecuencia, para comprobar la hipótesis de integrabilidad de la función en el teorema de Fubini, se utiliza el teorema de Tonelli. Supuesta ya la medibilidad de la función f, su integrabilidad es equivalente a la de $|f|$. Esta es una función no negativa por lo que su integrabilidad equivale que las integrales iteradas den un valor finito. Una vez asegurada su integrabilidad podemos aplicar ya las conclusiones del teorema de Fubini, en particular la integral de la función se puede calcular mediante las integrales iteradas en el orden que sea más adecuado.

Ejemplo 3.10. 1. *Consideremos la función definida en* $[0,1]\times[1,+\infty)$ *por* $f(x,y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$. *Veamos que las integrales iteradas existen pero que son distintas si se cambia el orden de integración. En efecto, obsérvese que para cada* $x \in (0,1)$ *la función* $e^{-xy} - 2e^{-2xy}$ *toma valores positivos para* y *suficientemente grande. Tendremos entonces que la integral de Lebesgue en la variable* y *en la semirrecta* $[1,+\infty)$ *existirá si es convergente la integral impropia de Riemann* $\int_1^{+\infty}(e^{-xy} - 2e^{-2xy})\,dy$ *y coincidirá con su valor* $\frac{e^{-x}(1-e^{-x})}{x}$. *Esta función es integrable en* $(0,1)$ *y dará un valor positivo. Por otro lado* $\int_0^1 (e^{-xy} - 2e^{-2xy})\,dx = -\frac{e^{-y}(1-e^{-y})}{y}$. *Esta función es integrable en* $[1,+\infty)$ *y dará como integral un valor negativo. La conclusión, teniendo en cuenta el teorema de Fubini, es que la función no es integrable.*

2. *Sea* $f \in L(R^p)$ *y* $g \in L(R^q)$, *entonces* $f(x)g(y) \in L(R^p \times R^q)$. *Veamos en primer lugar la medibilidad de la función. Será suficiente probar la medibilidad de* $f(x)$ *como función definida en* $R^p \times R^q$. *Si* f *como función en* R^p *es el límite de funciones simples medibles de la forma* $\sum a_i\chi_{A_i}$, *tendremos que como función en* $R^p \times R^q$ *será límite de una sucesión de funciones de la forma* $\sum a_i\chi_{A_i\times R^q}$. *Será entonces suficiente probar que si* A *y* B *son conjuntos medibles respectivamente en* R^p *y en* R^q, $A\times B$ *es medible en* $R^p\times R^q$. *Todo tal conjunto se puede expresar como una unión numerable de conjuntos del mismo tipo donde* A *y* B *son ahora acotados. Dado* $\varepsilon > 0$ *existirán abiertos acotados* $U \subset R^p$ *y* $V \subset R^q$ *y compactos* K *y* L *tales que*

$$\begin{array}{ll} K \subset A \subset U & \text{y } m_p(U-K) < \varepsilon \\ L \subset B \subset V & \text{y } m_q(V-L) < \varepsilon. \end{array}$$

Tendremos entonces que $K\times L$ *es compacto,* $U\times V$ *es un abierto,*

$$K\times L \subset A\times B \subset U\times V$$

y $m_{p+q}(U \times V - K \times L) \leq m_{p+q}(U \times (V - L)) + m_{p+q}((U - K) \times V)$. *Ahora bien, la medida de un producto de dos abiertos es el producto de las medidas de los abiertos. Esto puede comprobarse descomponiendo cada uno de ellos como unión numerable de intervalos diádicos disjuntos, o bien aplicando el teorema de Fubini a la función característica del producto de estos abiertos. Tendremos entonces que*

$$m_{p+q}(U \times V - K \times L) \leq m_p(U) \times m_q(V - L) + m_p(U - K) \times m_q(V) \leq c\varepsilon.$$

Por lo tanto $A \times B$ *es medible.*

Una vez visto que $f(x)g(y)$ *es medible su integrabilidad se sigue aplicando el teorema de Tonelli a* $|f(x)g(y)|$, *ya que* $\int_{R^p} \int_{R^q} |f(x)g(y)| = \int_{R^p} |f(x)| \int_{R^q} |g(y)| < +\infty$. *Podremos entonces aplicar el teorema de Fubini y tendremos que* $\int_{R^p \times R^q} f(x)g(y) = \int_{R^p} f(x) \int_{R^q} g(y)$.

3.9 Cambio de variable en la integración

Sean U y V dos abiertos de R^n y g una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$, biyectiva de U en V con inversa del mismo tipo. Como consecuencia del teorema de la función inversa es equivalente a decir que la aplicación g es biyectiva, de clase $\mathcal{C}^1$ y que $\frac{\partial(g_1,\ldots,g_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ es no nulo en todos los puntos. A esta aplicación g se le denominará un cambio de variable. Obsérvese que si g es un cambio de variable también lo es g^{-1}. Es de interés observar que la imagen por una tal aplicación g de un conjunto compacto es un conjunto compacto y que la imagen de un abierto es un conjunto abierto. Más adelante veremos que la imagen de un conjunto medible también es un conjunto medible. Se trata de relacionar las integrales de una función f definida en V con una integral en que que a la función f se le haya efectuado el "cambio de variable" es decir $f \circ g$. Como en el caso de las integrales de Riemann de una variable la integral de f no coincidirá con la de $f \circ g$ sino que esta función deberá multiplicarse por el módulo del determinante jacobiano de la transformación g.

Ejemplo 3.11. *1. Consideremos* U *el abierto de* R^2 *definido por* $(0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ *y* $V = R^2 - \{(x, 0)\,; x \geq 0\}$. *Sea* $g : U \to V$ *definida por* $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. *Se trata de un cambio de variable. A las nuevas coordenadas se les denomina coordenadas polares. Si tenemos una función definida en* V, $z = f(x, y)$ *efectuar el "cambio de variables" a esta función es considerar* $z \circ g$, *es decir,* $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. *Como ya veremos, la integral de una función* $f(x, y)$ *sobre* V *coincidirá con la integral de* $f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,|\det dg|$ *sobre* U. *Para este cambio de coordenadas se tiene* $|\det dg| = \rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)$ *y por tanto se deberá integrar* $f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho$ *sobre* U. *Si se trata de integrar* f *sobre un subconjunto de* V *coincidirá con la integral de* $f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho$ *sobre el conjunto correspondiente por* g *en* U. *Por ejemplo si* D *es el interior del disco unidad centrado en el origen intersección con el primer cuadrante tendremos que* $g^{-1}(D) = (0, 1) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *y si deseamos integrar* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *obtendremos* $\int_D (x^2 + y^2) = \int_{g^{-1}(D)} \rho^2\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{8}$. *Con frecuencia se utiliza este cambio de coordenadas para el cálculo*

de una integral de una función definida sobre todo R^2. Esto no supone problema alguno ya que, puesto que $\{(x,0)\,;x\geq 0\}$ es de medida 2-dimensional cero, la integral sobre R^2 y sobre V coinciden y en este abierto podemos efectuar el cambio de coordenadas. Una situación análoga se presenta en los ejemplos siguientes.

2. *Consideremos U el abierto de R^3 definido por $(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times R$ y $V=R^3-\{(x,0,z)\,;x\geq 0\}$. La función $g:U\to V$ definida por $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=u$ constituye un cambio de variable. A las nuevas coordenadas se les denomina coordenadas cilíndricas.*

3. *Consideremos U el abierto de R^3 definido por $(0,+\infty)\times(0,2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ y $V=R^3-\{((x,0,z)\,;x\geq 0)\}$. La función $g:U\to V$ definida por $x=\rho\cos\varphi\cos\lambda$, $y=\rho\sin\varphi\cos\lambda$, $z=\rho\sin\lambda$ es un cambio de variable. A las nuevas coordenadas se les denomina coordenadas esféricas.*

Empezaremos estudiando la relación entre la medida de un conjunto y la de su conjunto imagen mediante una aplicación lineal.

Lema 3.26. *Sea T un isomorfismo lineal de R^n en R^n. Si A es un abierto de R^n entonces* $m(T(A))=|\det T|\,m(A)$.

Demostración. Todo isomorfismo lineal puede obtenerse por composiciones de aplicaciones elementales del tipo siguiente.

$$\begin{gathered}T_1(x_1,x_2,...,x_n)=(kx_1,x_2,...x_n),\ \ k\neq 0\\ T_2(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_n)=(x_1,...,x_j,...,x_i,...,x_n)\\ T_3(x_1,x_2,...,x_n)=(x_1+x_2,x_2,...,x_n).\end{gathered}$$

Si demostramos que para cada una de estas aplicaciones vale la proposición, ésta será cierta para cualquier isomorfismo. En efecto, si S y T son isomorfismos que cumplen $m(T(A))=|\det T|\,m(A)$ y $m(S(A))=|\det S|\,m(A)$ se tendrá que

$$m\left(TS\left(A\right)\right)=|\det T|\,m\left(S\left(A\right)\right)=|\det T|\,|\det S|\,m\left(A\right)=|\det TS|\,m\left(A\right).$$

Veamos que si I es un intervalo de la forma $I=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_n,b_n)$ se cumple $m(T(I))=|\det T|\,m(I)$ para cada una de los tres tipos de aplicaciones elementales. En efecto, si $k>0$

$$T_1(I)=[ka_1,kb_1)\times\cdots\times[a_n,b_n)$$

y por tanto $m(T_1(I))=km(I)$. Análogamente si $k<0$

$$T_1(I)=(kb_1,ka_1]\times\cdots\times[a_n,b_n)$$

y $m(T_1(I))=-km(I)=|k|\,m(I)$. En ambos casos $m(T_1(I))=|\det T_1|\,m(I)$.

Directamente se comprueba que $m(T_2(I))=m(I)=|\det T_2|\,m(I)$.

Para probarlo para T_3 podemos calcular $m(T_3(I))$ mediante el teorema de Fubini:

$$m(T_3(I)) = \int_{a_n}^{b_n} dx_n \cdots \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_1+x_2}^{b_1+x_2} dx_1 = m(I) = |\det T_3|\, m(I).$$

Para probar el enunciado para cualquier abierto y respecto a cada uno de los tipos de transformaciones elementales basta descomponer el abierto en intervalos diádicos disjuntos dos a dos del tipo de los anteriores y aplicar la proposición ya probada utilizando la aditividad numerable de la medida.

□

Teorema 3.27. *Sea T un isomorfismo lineal de R^n en R^n. Si M es un conjunto medible de R^n entonces $T(M)$ es medible y $m(T(M)) = |\det T|\, m(M)$.*

Demostración. Es suficiente probarlo para los acotados medibles. En efecto, todo conjunto medible se podrá expresar como una unión numerable de una sucesión creciente de conjuntos medibles acotados. Aplicando la proposición a cada uno de ellos y pasando al límite las igualdades entre las medidas se obtendrá el teorema en general. Sea entonces M medible acotado y sea $\varepsilon > 0$. Existirán un abierto A y un compacto K tal que $K \subset M \subset A$ y $m(A - K) < \varepsilon$. Tendremos entonces que $T(A)$ es un abierto, $T(K)$ es un compacto, $T(K) \subset T(M) \subset T(A)$ y

$$m(T(A) - T(K)) = m(T(A - K)) < |\det T|\, \varepsilon.$$

Esto asegura la medibilidad de $T(M)$. Veamos la relación entre las medidas.

$$\begin{gathered} m(T(M)) = \inf \{m(T(A));\ \ A \text{ abierto } \ M \subset A\} \\ = \inf \{|\det T|\, m(A);\ \ A \text{ abierto } \ M \subset A\} = |\det T|\, m(M). \end{gathered}$$

□

En la demostración del teorema del cambio de variable una de las herramientas que se utilizará es la aproximación local de la función que expresa el cambio de variable por su aplicación diferencial. Otra técnica que ya hemos utilizado en diversas ocasiones es la descomposición de un abierto en intervalos diádicos. Cierta propiedad que se conoce para estos se lleva entonces a los conjuntos abiertos y después a los conjuntos medibles. Es cómodo, cuando se trabaja con endomorfismos de R^n y buscamos propiedades de las imágenes de los intervalos, considerar una norma en R^n tal que sus bolas sean los intervalos. Así en el próximo lema consideraremos la norma de R^n definida por $\|x\| = \max\{|x_i|\}$. Las bolas respecto a esta norma son cubos. Si T es un endomorfismo de R^n definido por la matriz (a_{ij}) se le asociará ahora la norma $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|$ que vendrá dada por

$$\|T\| = \max_{i,|\lambda_j|\leq 1} \left|\sum a_{ij}\lambda_j\right| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

Esta norma cumple la desigualdad $\|T(x)\| \leq \|T\|\, \|x\|$ ya que $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|T\|$. En particular, si T es la diferencial en un punto del cambio de variable g, tendremos $\|dg\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|$ y se cumplirá que $\|dg(x)\| \leq \|dg\|\, \|x\|$.

Lema 3.28. *Sea g un cambio de variable de U en V. La imagen por g de un cubo cerrado C contenido en U, de semiarista r está contenido en un cubo de semiarista* $\sup_{x\in C} \|dg_x\| \, r$.

Demostración. Sea C centrado en un punto a. Aplicando el teorema del valor medio para cada $x \in C$, existe λ_i, $0 < \lambda_i < 1$ tal que

$$g_i(x) - g_i(a) = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a + \lambda_i(x-a))(x_j - a_j).$$

Por lo tanto

$$|g_i(x) - g_i(a)| \leq \sum_j \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a + \lambda_i(x-a))\right| \|x-a\| \leq \sup_{x\in C} \|dg_x\| \, \|x-a\| \,,$$

de donde

$$\|g(x) - g(a)\| \leq \sup_{x\in C} \|dg_x\| \, \|x-a\| \,.$$

□

Lema 3.29. *Sea g un cambio de variable de U en V. Sea C un cubo cerrado contenido en U, entonces*

$$m(g(C)) \leq \int_c |\det dg| \,.$$

Demostración. Para cada cubo cerrado contenido en U, como consecuencia del lema anterior

$$m(g(C)) \leq (\sup_{x\in C} \|dg_x\|)^n m(C).$$

Sea y un punto de C. Apliquemos esta desigualdad al "cambio de variables" $dg_y^{-1} \circ g$. Tendremos

$$m(dg_y^{-1} \circ g(C)) \leq (\sup_{x\in C} \left\|dg_y^{-1} \circ dg_x\right\|)^n m(C).$$

Sabemos (teorema 3.27) que $m(dg_y^{-1} \circ g(C)) = \left|\det dg_y^{-1}\right| m\left(g\left(C\right)\right)$. Por la continuidad de la aplicación $\left\|dg_y^{-1} \circ dg_x\right\|$ existirá un $x \in C$ en que se alcanzará $\max \left\|dg_y^{-1} \circ dg_x\right\|$ y por tanto tal que

$$m\left(g\left(C\right)\right) \leq |\det dg_y| \left\|dg_y^{-1} \circ dg_x\right\|^n m(C).$$

Sería de desear que el factor $\left\|dg_y^{-1} \circ dg_x\right\|^n$ fuese "próximo" a 1. Para lograrlo descompondremos el cubo C en otros cubos de manera que esto ocurra. Concretando, ya que la función $(x, y) \to \left\|dg_y^{-1} \circ dg_x\right\|$ es uniformemente continua en $C \times C$, para cada $\varepsilon > 0$, existe una descomposición de C como unión finita de cubos cerrados C_i, con interiores disjuntos dos a dos, tales que

$$\left\|dg_y^{-1} \circ dg_x\right\| < 1 + \varepsilon, \text{ para } x, y \text{ pertenecientes al mismo } C_i.$$

Para cada cubo C_i sea $y_i \in C_i$ tal que $|\det dg_{y_i}| = \inf\{|\det dg_z|\,;\ z \in C_i\}$. Tendremos

$$m\left(g\left(C_i\right)\right) \leq |\det dg_{y_i}|\left(1+\varepsilon\right)^n m(C_i) \leq (1+\varepsilon)^n \int_{C_i} |\det dg|$$

y por tanto

$$m\left(g(C)\right) \leq \sum_i m\left(g\left(C_i\right)\right) \leq (1+\varepsilon)^n \sum_i \int_{C_i} |\det dg| = (1+\varepsilon)^n \int_C |\det dg|$$

donde hemos tenido en cuenta para probar la última igualdad que los solapamientos de los conjuntos C_i forman un conjunto de medida nula. Por último, puesto que esta desigualdad vale para cada $\varepsilon > 0$, se sigue que $m\left(g\left(C\right)\right) \leq \int_C |\det dg|$.

□

Lema 3.30. *Sea g un cambio de variable de U en V. Sea A un abierto contenido en U, entonces*

$$m\left(g\left(A\right)\right) \leq \int_A |\det dg|\,.$$

Demostración. Obsérvese en primer lugar que por ser A abierto, su imagen $g(A)$ también es un abierto y en particular es un conjunto medible. Descompongamos el abierto A como unión numerable de cubos C_i cerrados con interiores disjuntos dos a dos. Por ejemplo ya hemos visto que todo abierto es unión numerable de cubos disjuntos del tipo $\prod (a_i, b_i]$ y es ya fácil ver que éste se puede expresar como unión numerable de cubos cerrados con interiores disjuntos. Aplicando a cada cubo el lema anterior

$$m\left(g\left(A\right)\right) \leq \sum m\left(g\left(C_i\right)\right) \leq \sum \int_{C_i} |\det dg| = \int_A |\det dg|\,.$$

□

Teorema 3.31. *Sea g un cambio de variable de U en V. Sea E un conjunto medible contenido en U, entonces $g(E)$ es medible y*

$$m\left(g\left(E\right)\right) \leq \int_E |\det dg|\,.$$

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $|\det dg|$ está acotado en U por k. Sea por el momento E acotado. Por ser medible, para cada $\varepsilon > 0$ existen un compacto K y un abierto A, que podrá suponerse contenido en U, tales que $K \subset E \subset A$ y $m(A-K) < \varepsilon$. Tendremos entonces que $g(K)$ es un compacto, $g(A)$ es abierto, $g\left(K\right) \subset g(E) \subset g(A)$. Aplicando el lema anterior

$$m\left(g\left(A\right) - g\left(K\right)\right) = m\left(g\left(A-K\right)\right) \leq \int_{A-K} |\det dg| \leq km(A-K) < k\varepsilon.$$

De donde se obtiene la medibilidad de $g\left(E\right)$. Por otro lado

$$m\left(g\left(E\right)\right) \leq m\left(g\left(A\right)\right) \leq \int_E |\det dg| + \int_{A-E} |\det dg| \leq \int_E |\det dg| + k\varepsilon.$$

Puesto que vale para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $m\left(g\left(E\right)\right) \leq \int_E \left|\det dg\right|$.

Si E no es acotado se podrá expresar como unión de una sucesión monótona creciente de conjuntos medibles E_m acotados. Aplicando la proposición a cada uno de ellos tendremos que $g(E) = \cup g(E_m)$ será medible y

$$m\left(g\left(E\right)\right) = \lim m\left(g\left(E_m\right)\right) \leq \lim \int_{E_m} \left|\det dg\right| = \int_E \left|\det dg\right|.$$

Por último, si $\left|\det dg\right|$ no está acotado consideremos

$$U_m = \{x \in U;\ \left|\det dg\right| < m\}$$

y apliquemos el teorema a $E \cap U_m$. Tendremos que $g(E) = \cup_m g(E \cap U_m)$ será medible y

$$m\left(g\left(E\right)\right) = \lim m\left(g\left(E \cap U_m\right)\right) \leq \lim \int_{E \cap U_m} \left|\det dg\right| = \int_E \left|\det dg\right|.$$

□

Podemos pasar ya a enunciar el teorema del cambio de variable

Teorema 3.32. *Sea g un cambio de variable de U en V y E un conjunto medible contenido en U.*

a) Si f es una función medible no negativa definida en V se tiene

$$\int_{g(E)} f = \int_E f \circ g \left|\det dg\right|.$$

b) Sea f una función definida en V entonces f es integrable en $g(E)$ si y solamente si es integrable $f \circ g \left|\det dg\right|$ en E y en este caso

$$\int_{g(E)} f = \int_E f \circ g \left|\det dg\right|.$$

Demostración. Probemos a). Consideremos en primer lugar una función simple medible. Sea $s = \sum_{i=1}^{r} a_i \chi_{g(E_i)}$ con $E = \cup E_i$ y los E_i disjuntos dos a dos. Tendremos como consecuencia de la proposición anterior

$$\int_{g(E)} s = \sum_i a_i m(g(E_i)) \leq \sum_i a_i \int_{E_i} \left|\det dg\right| = \int_E s \circ g \left|\det dg\right|.$$

Sea ahora f no negativa. Tendremos

$$\int_{g(E)} f = \sup\left\{\int_{g(E)} s;\ 0 \leq s \leq f,\ s \text{ simple}\right\} \leq$$
$$\sup\left\{\int_E s \circ g \left|\det dg\right|;\ 0 \leq s \leq f,\ s \text{ simple}\right\} \leq \int_E f \circ g \left|\det dg\right|.$$

Veamos la desigualdad en el otro sentido. Apliquemos la desigualdad que acabamos de probar al cambio de variable g^{-1}, a la función $f \circ g \left|\det dg\right|$ y al conjunto $g(E)$. Tendremos

$$\int_E f \circ g \left|\det dg\right| \leq \int_{g(E)} \left(f \circ g \left|\det dg\right|\right) \circ g^{-1} \left|\det dg^{-1}\right| = \int_{g(E)} f$$

y, por tanto, hemos probado a). Veamos b). Sabemos que f es integrable sobre $g(E)$ si las integrales de f^+ y de f^- son finitas. Análogamente $f \circ g \left|\det dg\right|$ es integrable en E si son finitas las integrales de $\left(f \circ g \left|\det dg\right|\right)^+ = f^+ \circ g \left|\det dg\right|$ y de $\left(f \circ g \left|\det dg\right|\right)^- = f^- \circ g \left|\det dg\right|$. Aplicando el apartado a) a cada una de estos pares de funciones tendremos que f es integrable en $g(E)$ si y sólo si $f \circ g \left|\det dg\right|$ es integrable en E y $\int_{g(E)} f = \int_E f \circ g \left|\det dg\right|$.

□

Obsérvese que si aplicamos el teorema del cambio de variable a la función constante igual a 1 obtenemos que $m(g(E)) = \int_E \left|\det dg\right|$.

Ejemplo 3.12. *1. Veamos que la función*

$$\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2 \ln^2\left(x^2+y^2\right)}$$

es integrable en $\left\{(x,y) \in R^2;\, x^2+y^2 < \frac{1}{4}\right\}$. *Efectuemos el cambio a coordenada polares. Deberemos integrar la función no negativa* $\frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{\rho^4 \ln^2 \rho^2}\rho$. *La integral iterada es finita y por tanto la función es integrable.*

2. *Calculemos el volumen del recinto de* R^3 *definido por* $x^2+y^2+z^2 \leq 2$, $z \geq x^2+y^2$. *La intersección de las superficies* $x^2+y^2+z^2 = 2$, $z = x^2+y^2$ *son los puntos de la forma* $z = 1$, $z = x^2+y^2$. *Aplicando el teorema de Fubini tendremos que calcular*

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\sqrt{2-x^2-y^2} - \left(x^2+y^2\right)\right).$$

Pasemos esta integral a coordenadas polares. Deberemos calcular

$$\int_{(\rho,\varphi) \in [0,1]\times[0,2\pi]} \left(\sqrt{2-\rho^2} - \rho^2\right)\rho = \pi \frac{8\sqrt{2}-7}{6}.$$

3. *Calculemos* $\int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} e^{-x^2-y^2}$. *Es equivalente al cálculo de la integral sobre*

$$(0,+\infty) \times (0,+\infty).$$

Pasando a coordenadas polares deberemos calcular $\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{4}$. *Nótese que de aquí puede verse que* $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. *En efecto, por el teorema de Fubini*

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} e^{-x^2-y^2}.$$

4. *Calculemos* $\int_D \left(1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\right)$ *donde*

$$D=\left\{(x,y,z)\in R^3;\, x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}.$$

Pasando a coordenadas esféricas deberemos calcular

$$\int_{(\rho,\varphi,\lambda)\in(0,1)\times(0,2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\left(1+\rho^3\right)\rho^2\cos\lambda=4\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right).$$

5. *Calculemos el volumen del dominio definido por* $z>0$, $z<\frac{x^2+y^2}{2}$, $x^2+y^2<4$. *Pasando a coordenadas cilíndricas deberemos integrar la función* ρ *sobre el dominio*

$$\left\{(\rho,\varphi,z)\,;\,0<z<\frac{\rho^2}{2},\,0<\rho<2,\,0<\varphi<2\pi\right\}.$$

Las fronteras de estos dominios no afectan, una vez más, al cálculo de las integrales $2\pi\int_0^2\rho d\rho\int_0^{\frac{\rho^2}{2}}dz=2\pi\int_0^2\frac{\rho^3}{2}d\rho=4\pi$.

3.10 Ejercicios

1. Sea S un conjunto denso en R. Prueba que si $f:R^n\to R$ es tal que $f^{-1}\left((-\infty,a)\right)$ es medible para toda $a\in S$ entonces f es medible.

2. Prueba que si s es una función simple medible y f es una función medible entonces $s\circ f$ es medible. Prueba que la composición de dos funciones medibles definidas en R a valores reales es medible.

3. Sea $f\left(x,y\right)=E\left[x+y\right]$ donde $E\left[z\right]$ es la parte entera de z. Halla la integral en $[0,n]\times[0,m]$ para n y m naturales.

4. Sea la sucesión de funciones $f_n\left(x\right)=\frac{n}{x^2+n^2}$. Prueba que $\lim f_n\left(x\right)=0$ uniformemente en R y que al tiempo $\int_R\frac{n}{x^2+n^2}=\pi$. ¿Contradice esto el teorema de la convergencia dominada? ¿Qué puede decirse en relación a este teorema?

5. Calcula $\int_D\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ donde D es el dominio definido por $\frac{\pi^2}{9}<x^2+y^2<\pi^2$.

6. Determina los valores de a tales que el volumen de

$$\left\{(x,y,z)\in R^3,\ z>1,\ x^2+y^2<\left(\frac{1}{z}\right)^a\right\}$$

es finito.

7. Estudia la integrabilidad o no integrabilidad de

(a) $\int_{x^2+y^2\leq 1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^a}$ según los diversos valores de a.

(b) $\int_{(1,+\infty)} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

(c) $\int_{x^2+y^2\geq 1} \frac{xy}{(x^2+3y^2)^a}$ según los diversos valores de a.

8. Estudia la integrabilidad para los diversos valores de a de la función $\frac{1}{|x-y|^a}$ en $(0,1)\times(0,1)$.

9. Prueba por inducción que si B_n es la bola de radio r en el espacio $n-$dimensional, se cumple $m(B_n) = c_n r^n$. Determina las constantes c_n para $n = 2, 3, 4$.

10. Sea $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos xt\,dx$. Prueba que $F'(t) = -\frac{1}{2}tF(t)$ y calcula $F(t)$.

11. Prueba que para todo $t \neq 0$ existe la derivada de $\int_0^1 \ln(x^2+t^2)\,dx$.

12. Calcula el volumen del dominio intersección de los cilindros $x^2+y^2 \leq 1$ y $x^2+z^2 \leq 1$.

13. Invierte los órdenes de integración en

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos x} f(x,y)\,dy\right)dx$.

(b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx$.

14. Estudia la integrabilidad de Riemann impropia y la de Lebesgue de $\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

15. Prueba que
$$\lim \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}dx.$$

16. Consideremos $K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$. Veamos una forma de calcularlo. Sea $x = ut$, tendremos $K = u\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}d\dot{t}$. Por lo tanto
$$K\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = K^2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}udu\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}d\dot{t}.$$
Justifica que se puede intercambiar el orden de integración y calcula K.

17. Calcula $\int_D z$, donde D es el dominio definido por $x^2+y^2 \leq z^2$, $z \geq 0$, $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

18. Halla el volumen de la intersección de la bola unidad $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ con el interior del cilindro definido por $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

19. Calcula $\int_D (x+y)^3(x-y)^2$ donde D es el recinto acotado limitado por las rectas $x+y = 1$, $x-y = 1$, $x+y = 3$, $x-y = -1$.

3.11 Nota histórica

La idea de área de un rectángulo, de un triángulo y de otras figuras geométricas aparece ya en el Antiguo Egipcio y en Babilonia. Los griegos admitían que figuras simples tenían un área que era un número no negativo. Estos números tenían una propiedad de aditividad ,esto es, si R era la unión disjunta de S y T se cumplía $a(R) = a(S) + a(T)$.

El método básico para determinar un área era el método de exhaución que, al parecer, proviene de Eudoxio ($\sim$ 300 a. C.) y aparece en los Elementos de Euclides. Se aproximaba el área de una determinada figura por la de polígonos inscritos de las que se conocía su área. No se trataba después de hacer un paso al límite más o memos riguroso sino que mediante un método alternativo, riguroso, se evitaba su uso. De esta forma podían probar, por ejemplo, que la razón de las áreas de dos círculos era equivalente a la razón de los cuadrados de los diámetros y otros muchos resultados.

Arquímedes (287-212 a.C.) estudió las longitudes de ciertas curvas así como gran número de áreas y volúmenes. Aplicó el método de exhaución a problemas que fueron después fuente de inspiración para los creadores del Cálculo. Sus resultados, como todos los de la época, se expresaban en forma de proporciones. Una de las novedades más significativas es el trabajo de "El método" en que utiliza ciertas ideas de la mecánica para obtener resultados que luego probará con el método de exhaución.

La creación del Cálculo fue una respuesta a los problemas prácticos y científicos que se presentaban en el siglo XVII. Algunos de los problemas que se plantearon fueron el cálculo de longitudes de curvas (por ejemplo, distancias recorridas por un planeta), áreas limitadas por curvas, centros de gravedad, volúmenes acotados por superficies, etc. En esta época se vuelven a estudiar los trabajos de Arquímedes y el método de exhaución y se modifican totalmente con la invención del Cálculo. Se sigue admirando el rigor del método de exhaución pero prima la obtención de resultados rápidos, fáciles y generales. Por otra parte la geometría analítica de Descartes (1596-1650) permitía una nueva formulación de los problemas de áreas y volúmenes.

Entre los iniciadores de la época deben mencionarse a Kepler (1571-1630), Galileo (1564-1642) y Cavalieri (1598-1647). El método de Kepler consiste en identificar la áreas y volúmenes con una suma de infinitos elementos infinitesimales. De esta forma el área de un círculo es la suma de las áreas de infinitos triángulos con base en la circunferencia y vértice en el centro. El volumen de la esfera se obtiene como suma de volúmenes de pirámides. La descomposición en "indivisibles" depende del problema particular que se presenta. Piensa que, si se desea, se pueden rigorizar los resultados obtenidos mediante el método de exhaución. Galileo consideró también las áreas en forma similar como suma de indivisibles. Esta técnica fue popularizada por Cavalieri. Dadas dos figuras se establece una correspondencia biyectiva entre los infinitesimales. Si estos tienen áreas en una cierta proporción, ésta se conserva en los volúmenes.

Fermat (1601-1665) y Pascal (1623-62) utilizaron una variante del método de exhaución. En lugar de considerar diferentes aproximaciones poligonales de las figuras dependiendo del problema se empezó el uso sistemático de los rectángulos.

En esta época se empezaron a introducir los métodos analíticos en el Cálculo. Entre otros matemáticos del momento cabe citar a Wallis (1616-1703) y a Barrow (1630-1677). Estaba, por otra parte, en el ambiente la conveniencia de obtener métodos generales. Esta fue la principal

aportación de Newton (1642-1727) y de Leibniz (1646-1716).

El mayor énfasis del trabajo de Newton se situó en la derivación. Planteó el problema de la antiderivación e identificó ésta con el problema del cálculo del área. Estableció la regla del cambio de variables en la integración. Clasificó ciertos tipos de integrales, estableció la fórmula para el cálculo de longitudes de curvas, etc..

Leibniz dio un mayor énfasis al cálculo de áreas. Lo planteó como suma infinita de "diferenciales" que luego se computaba por antiderivación. Introdujo la notación $\int$ para la integración. Como Newton no definió con rigor sus conceptos. Sus contemporáneos admitieron sus resultados como correctos pero, con frecuencia, eran conscientes de la poca claridad de ciertos conceptos básicos como los elementos infinitamente pequeños o de cómo la suma de infinitos de estos podía ser finita.

Durante el siglo XVIII se desarrolló el Cálculo. Se dio un tratamiento formal de los problemas sin una gran preocupación con los fundamentos. Euler es la figura más destacada. El uso de la integral como límite de sumas era limitado. Se utilizaba el lenguaje de Leibniz pero pensando en términos de antiderivación. Se desarrollaron técnicas de cálculo de primitivas como la descomposición en fracciones simples, utilización de logaritmos o técnicas de desarrollo en serie. Se estudiaron integrales múltiples calculándolas mediante integrales reiteradas.

Para Euler una función era una "expresión analítica", aunque también consideraba funciones que tenían diferentes expresiones en diferentes partes del dominio. El interés sobre funciones arbitrarias se desarrolló en relación con el problema de la cuerda vibrante, principalmente por D'Alembert (1717-1783) y a los trabajos sobre la teoría del calor por Fourier (1768-1830). La representación de funciones mediante series trigonométricas necesitaba justificar la existencia de integrales de la forma $\int f(x) \cos nx$. Durante el siglo XVIII la integración era esencialmente antiderivación y para estas funciones no era evidente la existencia de primitiva. Ello hizo volver a la concepción de integral como un área, concepto que, por otra parte, tampoco estaba definido.

A Cauchy (1789-1857) y a Bolzano (1781-1848) se les atribuye el concepto actual de función continua. Cauchy definió la integral de una función continua en un intervalo como un límite de expresiones $\sum f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$. Probó que este límite se puede obtener como antiderivación. Durante el siglo XVIII se admitía intuitivamente la existencia de áreas y volúmenes y se calculaban con integrales. Cauchy definió estos conceptos mediante integrales de funciones continuas que había previamente introducido. La definición general de área y volumen quedaba sin resolver.

Con Dirichlet (1805-59), en sus trabajos sobre series de Fourier, aparece la primera distinción entre funciones continuas e integrables. Riemann (1826-66), continuando los trabajos sobre estas series, se plantea estudiar la situación más general posible en que existan los límites de las sumas que aparecían en la integral de Cauchy y desligó la noción de integrabilidad de la de continuidad. En años posteriores se reformuló la integral de Riemann preparando las generalizaciones posteriores. Así Darboux (1842-1917) y otros autores definen las sumas superiores e inferiores y Volterra (1860-1940) introdujo las nociones de integral superior e inferior.

Durante la década de los 1880 se estudia la relación entre integrabilidad y puntos de discontinuidad y el interés se centra en medir el conjunto de estos puntos.

La noción de contenido exterior fue debida a Stolz (1842-1905) en una variable y a Cantor (1845-1918) en varias variables. Este concepto de contenido no cumplía la propiedad de la

aditividad finita.

Peano (1858-1932) dio la primera definición formal de área. Retoma las ideas de Eudoxio considerando polígonos que contienen y que están contenidos en una región. Si el ínfimo de las áreas de los primeros y el supremo de las áreas de los segundos coinciden, ésta es el área de la región. Jordan (1838-1922) considera la misma construcción con polígonos de lados paralelos a los ejes. El área es lo que hemos denominado contenido de Jordan.

Borel (1871-1956) consideró medidas de lo que hemos llamado conjuntos borelianos en sus trabajos sobre la teoría de funciones complejas. No generalizaba el concepto de contenido pero se cumplía la propiedad de la aditividad numerable.

Lebesgue (1875-1945) amplió la noción de integral empezando por aumentar los conjuntos medibles. Su concepto de medida amplía el concepto de contenido de forma que se cumple la propiedad de la aditividad numerable. Formuló los teoremas básicos de la teoría de la integración. Trabajó también con integrales múltiples. A este respecto deben citarse además los trabajos de Fubini (1879-1943).

La integral de Lebesgue fue generalizada por Radon (1887-1956) dando un concepto que incluye tanto ésta como la de Stieltjes (1856-94). Otras formulaciones de estos conceptos, como la de Daniell no requieren una construcción completa de la teoría de la medida para la formulación de la teoría de la integral.

Capítulo 4

Calculo vectorial

4.1 Longitud de un arco de curva. El parámetro arco.

Definición 4.1. *Un arco de curva o simplemente una curva en R^n es una aplicación continua de un intervalo $[a,b]$ en R^n. Si la aplicación es de clase $\mathcal{C}^r$ se dice que la curva es de esta clase. $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ reciben respectivamente el nombre de punto inicial y final del arco. Si existe una partición de $[a,b]$ de la forma $a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b$ de manera que la restricción de la curva a cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ sea de clase $\mathcal{C}^r$ se dice que la curva es de clase $\mathcal{C}^r$ a trozos.*

Si una curva γ definida en $[a,b]$ cumple que $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice cerrada. Si es inyectiva con la posible excepción de que $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice simple.

Debe distinguirse entre la curva γ que es una aplicación y su imagen que denotaremos por $\gamma\hat{}$. La imagen no determina la clase de la curva.

Sea un arco de curva $\gamma : [a,b] \to R^n$. A cada partición Π del dominio de definición de la forma $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ se le puede asociar una poligonal de vértices $\gamma(t_i)$. Esta poligonal tendrá por longitud $l(\gamma, \Pi) = \sum_{i=1}^{m} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$. Observemos que si Π_1 es una partición más fina que Π se cumple que $l(\gamma, \Pi) \leq l(\gamma, \Pi_1)$. Basta considerar el caso en que Π_1 consiste en añadir un punto a la partición Π y tener en cuenta la desigualdad triangular para la norma en R^n. Estas longitudes pueden pensarse como aproximaciones a la longitud de la curva. Es entonces natural considerar la siguiente definición.

Definición 4.2. *Sea un arco de curva $\gamma : [a,b] \to R^n$. Diremos que la curva es rectificable si el conjunto de las longitudes de las poligonales inscritas en la curva está acotado. En este caso se llama longitud del arco al supremo de este conjunto.*

Se trata de ver que las curvas de clase $\mathcal{C}^1$ son rectificables y que su longitud puede obtenerse mediante una integral. Será conveniente disponer de la definición de integral de una función vectorial.

Definición 4.3. *Sea E un conjunto medible de R^m y $f : E \to R^n$ una función definida por n funciones a valores reales $f = (f_1, ..., f_n)$. Se dice que f es medible (resp.integrable) en E si lo son cada una de las funciones $f_1, ..., f_n$. En este caso se define $\int_E f = (\int_E f_1, ..., \int_E f_n)$.*

Teorema 4.1. *Sea E un conjunto medible de R^m y $f : E \to R^n$ una función medible. Entonces f es integrable si y sólo si la función a valores reales $\|f\| = (\sum_{i=1}^n (f_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ es integrable. En este caso se tiene $\|\int_E f\| \leq \int_E \|f\|$.*

Demostración. La afirmación sobre la integrabilidad se obtiene de las desigualdades

$$|f_i(x)| \leq \|f(x)\| \leq \sum_{j=1}^n |f_j(x)|.$$

Veamos que se cumple la desigualdad $\|\int_E f\| \leq \int_E \|f\|$.

$\|\int_E f\|^2 = \int_E f \cdot \int_E f = \int_E ((\int_E f) \cdot f) \leq \int_E \|\int_E f\| \|f\| \leq \|\int_E f\| \int_E \|f\|$. Simplificando, se obtiene la desigualdad. Naturalmente si este valor fuese cero la desigualdad sería trivial.

□

Teorema 4.2. *Sea un arco de curva $\gamma : [a,b] \to R^n$ de clase $\mathcal{C}^1$. El arco es rectificable y su longitud es $L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.*

Obsérvese que por ser la curva de clase $\mathcal{C}^1$ la función en el integrando es continua y por tanto la integral existe en el sentido de Riemann.

Demostración. Veamos en primer lugar la rectificabilidad del arco. Veamos que el conjunto de las longitudes de las poligonales inscritas en el arco está acotada.

$$l(\gamma, \Pi) = \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^m \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\, dt\right\| \leq \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt$$
$$= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Esta última integral es finita y por tanto γ es rectificable. Además

$$L = \sup_{\Pi} l(\gamma, \Pi) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Veamos la desigualdad en sentido inverso. Sea $\varepsilon > 0$, por la continuidad uniforme de $\gamma'(t)$, existe $\delta > 0$ tal que si $|t-u| \leq \delta$ entonces $\|\gamma'(t) - \gamma'(u)\| < \varepsilon$. Sea Π una partición de $[a,b]$ tal que para cada i, $|t_i - t_{i-1}| < \delta$. Tendremos

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \leq \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\|\gamma'(t_i)\| + \varepsilon) dt$$
$$= \sum_{i=1}^m \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t_i) dt\right\| + \varepsilon(b-a) = \sum_{i=1}^m \left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t_i) - \gamma'(t) + \gamma'(t))\, dt\right\| +$$
$$\varepsilon(b-a) \leq \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| + 2\varepsilon(b-a) \leq L + 2\varepsilon(b-a).$$

Puesto que la desigualdad vale para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq L$.

□

Dada una curva $\gamma : [a,b] \to R^n$ y una aplicación biyectiva $g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ de clase $\mathcal{C}^1$ con inversa del mismo tipo, se tiene que $\gamma \circ g$ es un arco de curva con dominio de definición $[\alpha, \beta]$. Se dice que ha sido obtenida a partir de la primera mediante un cambio de parámetros. Por ser g' continua y no nula deberá ser en todos los puntos positiva o en todo los puntos negativa. En el

primer caso g es monótona creciente y no varía la orientación de la curva en el sentido de que su inicio y final es el mismo para γ que para $\gamma \circ g$. Si g' es negativa, g es monótona decreciente, se tiene que $g(\alpha) = b$ y $g(\beta) = a$, con lo que los inicios y finales de los arcos quedan permutados. Se dice que el cambio de parámetros cambia la orientación.

Ejemplo 4.1. *Sea un arco de curva $\gamma : [a, b] \to R^n$. La curva $\gamma_1(t) = \gamma(a + b - t)$ está también definida en el intervalo $[a, b]$ y cambia la orientación del arco. Se suele escribir $-\gamma$.*

Debe observarse que si una curva se obtiene a partir de otra por medio de un cambio de parámetros, la longitud no varía. Es suficiente tener en cuenta que el conjunto de poligonales consideradas en la definición de longitud del arco es el mismo en los dos casos.

Definición 4.4. *Una curva γ de clase $\mathcal{C}^1$ se dice regular si $\gamma'(l) \neq 0$ para todo valor l del parámetro.*

Veamos un cambio de parámetro en estas curvas regulares de especial importancia.

Consideremos un arco de curva regular $\gamma : [a, b] \to R^n$ de longitud L. Consideremos la aplicación $s : [a, b] \to [0, L]$ definida por $s(t) = \int_0^t \|\gamma'(l)\| \, dl$. Se trata de una aplicación biyectiva, de clase $\mathcal{C}^1$, estrictamente creciente, con $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$. Su aplicación inversa $t = t(s)$ definida en $[0, L]$, a valores en $[a, b]$, define un cambio de parámetro en la curva. A este nuevo parámetro s se le denomina parámetro arco. Obsérvese que si expresamos el arco en este nuevo parámetro $\gamma_1(s) = \gamma(t(s))$, tendremos que $\|\gamma_1'(s)\| = \|\gamma'(t(s))\| \, |t'(s)| = \|\gamma'(t(s))\| \, \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|} = 1$. De esta forma la longitud del arco de curva entre los parámetros s_0 y s_1 será $\int_{s_0}^{s_1} \|\gamma_1'(s)\| \, ds = s_1 - s_0$, es decir, coincide con la diferencia entre los dos parámetros.

Ejemplo 4.2. *Consideremos un arco de hélice en R^3 dado por las ecuaciones $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = kt$ y definido en $[0, 2\pi]$. Tendremos que, siguiendo las notaciones anteriores, $s(t) = \int_0^t (R^2 + k^2)^{\frac{1}{2}} \, dr = (R^2 + k^2)^{\frac{1}{2}} \, t$. La función cambio de parámetro al parámetro arco será $t(s) = s\,(R^2 + k^2)^{-\frac{1}{2}}$ y las ecuaciones de la curva en el parámetro arco serán*

$$x = R\cos\left(R^2 + k^2\right)^{-\frac{1}{2}} s, \;\; y = R\sin\left(R^2 + k^2\right)^{-\frac{1}{2}} s, \;\; z = k\left(R^2 + k^2\right)^{-\frac{1}{2}} s.$$

4.2 Integración de un campo escalar y de un campo vectorial sobre un arco de curva

4.2.1 Integración sobre un arco de curva

La idea de integral de un campo escalar sobre una curva responde a la idea física de cálculo de la masa de una "curva material" de la que se conoce una distribución de densidades. Si la curva con respecto su parámetro arco es $\gamma : [0, L] \to R^n$ y $f : \gamma \hat{} \to R$ es una distribución de densidades, una aproximación de su masa correspondiente a una partición $0 = s_0 < s_1 < ... < s_m = L$ de $[0, L]$ se obtendrá como $\sum_{i=1}^m f(\gamma(s_i))(s_i - s_{i-1})$. Esta expresión es una suma de Riemann de la función $f \circ \gamma$ y, por tanto, su límite al variar las particiones haciendo $\max(s_i - s_{i-1}) \to 0$ será $\int_0^L f(\gamma(s))ds$. Si se trabaja con un parámetro arbitrario $t \in [a, b]$, $s = s(t)$ la anterior integral

quedará $\int_a^b f(\gamma(s(t)))s'(t)dt = \int_a^b f(\gamma_1(t))\|\gamma_1'(t)\|\,dt$, donde $\gamma_1 = \gamma \circ s$. Esto nos lleva a las siguientes definiciones.

Definición 4.5. *Sea $\gamma : [a,b] \to R^n$ un arco de curva de clase $\mathcal{C}^1$. Llamaremos un campo escalar sobre un subconjunto de R^n a una aplicación continua de este subconjunto en R. Si f es un campo escalar sobre $\gamma\hat{}$ (o sobre un conjunto que contenga a éste), llamaremos integral de este campo sobre γ y la escribiremos $\int_\gamma f ds$ a la integral $\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma_1'(t)\|\,dt$. Si la curva es de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos se define como la suma de las integrales sobre cada uno de los trozos $\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt$.*

Observemos, en primer lugar, que esta integral no depende de una particular parametrización de la curva. En efecto si $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ es un cambio de parámetros y $\gamma_1 = \gamma \circ g$ tendremos $\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_{[\alpha,\beta]} f(\gamma(g(l)))\|\gamma'(g(l))\|\,|g'(l)|\,dl = \int_{[\alpha,\beta]} f(\gamma_1(l))\|\gamma_1'(l)\|\,dl$. En particular, aunque el cambio de parámetros cambie la orientación la integral no varía.

Es inmediato comprobar que $\int_\gamma (f_1+f_2)\,ds = \int_\gamma f_1 ds + \int_\gamma f_2 ds$ y que $\int_\gamma \lambda f ds = \lambda \int_\gamma f ds$ para $\lambda \in R$. Es también una comprobación directa que $\left|\int_\gamma f ds\right| \le \int_\gamma |f|\,ds$.

Se trata ahora de definir la integral de un campo vectorial. Esta integral corresponde a la idea física de trabajo desarrollado por un campo al transportar un punto material a lo largo de un arco de curva. Sea F un campo de fuerzas en R^n y $\gamma : [0,L] \to R^n$ un arco de curva de clase $\mathcal{C}^1$ expresado en el parámetro arco. Puesto que $\|\gamma'(s)\| = 1$ una aproximación al trabajo realizado será

$$\sum_{i=1}^m F(\gamma(s_i)) \cdot \gamma'(s_i)(s_i - s_{i-1}) \text{ donde } 0 = s_0 < s_1 < ... < s_m = L.$$

Se trata de una suma de Riemann correspondiente a la partición $\{s_i\}$ para la función $(F \circ \gamma)\cdot\gamma'$ y por tanto su límite cuando $\max(s_i - s_{i-1}) \to 0$ será $\int_0^L F(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)\,ds$. Si expresamos la curva en otro parámetro la integral quedaría $\int_a^b F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\,dt$. Esto nos lleva a dar las siguientes definiciones.

Definición 4.6. *Un campo vectorial en un subconjunto E de R^n es una aplicación continua $F : E \to R^n$. Sea $\gamma : [a,b] \to R^n$ un arco de curva de clase $\mathcal{C}^1$ y F un campo vectorial sobre $\gamma\hat{}$. Llamaremos integral del campo F sobre γ y lo escribiremos $\int_\gamma F \cdot ds$ a la integral $\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$. Si la curva es de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos se define como la suma en cada uno de los trozos $\sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$. Esta integral recibe también el nombre de circulación del campo respecto el arco de curva.*

La primera observación que debe hacerse es que este valor no varía al efectuar un cambio de parámetro que respete la orientación. El valor cambia de signo si la orientación cambia. En efecto si $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ es un cambio de parámetros que conserva la orientación y $\gamma_1 = \gamma \circ g$

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta F(\gamma(g(l))) \cdot \gamma'(g(l))\,g'(l)\,dl = \int_\alpha^\beta F(\gamma_1(l)) \cdot \gamma_1'(l)\,dl.$$

Si el cambio es tal que la orientación se invierte, es decir $g'(l) < 0$, tendremos

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_\beta^\alpha F(\gamma(g(l))) \cdot \gamma'(g(l))\,g'(l)\,dl = -\int_\alpha^\beta F(\gamma_1(l)) \cdot \gamma_1'(l)\,dl.$$

Es inmediato comprobar que $\int_\gamma (F_1 + F_2) \cdot ds = \int_\gamma F_1 \cdot ds + \int_\gamma F_2 \cdot ds$ y que $\int_\gamma \lambda F \cdot ds = \lambda \int_\gamma F \cdot ds$ para $\lambda \in R$.

Ejemplo 4.3. *Consideremos la curva $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = kt$ definida en $[0, 2\pi]$ y el campo escalar $f(x, y, z) = z^2$. Tendremos*

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{2\pi} k^2 t^2 \left(R^2 + k^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = \left(R^2 + k^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(2\pi)^3}{3} k^2.$$

Si ahora F es un campo vectorial $F(x, y, z) = (y, -x, 0)$ tendremos

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_0^{2\pi} \left(-R^2 \sin^2 t - R^2 \cos^2 t\right) dt = -R^2 2\pi.$$

4.2.2 La integral de un campo a lo largo de una curva y el lenguaje de formas

Un campo vectorial F en R^n puede pensarse como una correspondencia que a cada punto x se le asigna un diferencial en el punto, es decir, una expresión del tipo $\sum_{i=1}^n F_i(x)\, dx_{i\,x}$. Obsérvese que no decimos que sea la diferencial de la misma función en cada punto. Es decir se trata simplemente de asignar a cada punto x la n-pla $F_1(x), ..., F_n(x)$. Es lo que se llama una forma de orden uno y lo escribiremos brevemente $\sum_{i=1}^n F_i dx_i$. Sea $\Phi : R^m \to R^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Se define una aplicación Φ^* de las formas de orden uno en R^n en las formas de orden uno en R^m mediante la expresión $\Phi^*(\sum_{i=1}^n F_i dx_i) = \sum_{i=1}^n F_i \circ \Phi d\Phi_i$. Si Φ está definida en un cierto subconjunto de R^m, en él estarán definidas las nuevas formas. En particular, si $\tau : [a, b] \to R^n$ es un arco de curva de clase $\mathcal{C}^1$ tendremos que $\gamma^*\left(\sum_{i=1}^n F_i dx_i\right) = \sum_{i=1}^n F_i \circ \gamma(t)\, \gamma_i'(t)\, dt$. Es entonces natural dar la siguiente definición.

Definición 4.7. *Sea $w = \sum_{i=1}^n F_i dx_i$ una forma de orden uno definida en R^n y $\gamma : [a, b] \to R^n$ un arco de curva de clase $\mathcal{C}^1$. Se define la integral de w sobre γ como*

$$\int_\gamma \sum_{i=1}^n F_i dx_i = \int_a^b \gamma^* \left(\sum_{i=1}^n F_i dx_i\right) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n F_i \circ \gamma(t)\, \gamma_i'(t)\right) dt.$$

Obsérvese que si se efectúa un cambio de parámetros que no cambie la orientación de la curva la integral no varía. En efecto, si $g : [c, d] \to [a, b]$ es un cambio de parámetros con $g'(l) > 0$ y llamamos $\sigma = \gamma \circ g$ tendremos

$$\int_\gamma \sum_{i=1}^n F_i dx_i = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n F_i \circ \gamma(t)\, \gamma_i'(t)\right) dt = \int_c^d \left(\sum_{i=1}^n F_i \circ \gamma(g(l))\, \gamma_i'(g(l))\right) g'(l)\, dl = \int_c^d \left(\sum_{i=1}^n F_i \circ \sigma(l)\, \sigma_i'(l)\right) dl = \int_\sigma \sum_{i=1}^n F_i dx_i.$$

Debe observarse también que esta definición coincide con la dada para el campo vectorial F. Así pues, estas integrales se pueden pensar indistintamente como la integral de un campo de vectores, que responde a la idea de trabajo de un campo de fuerzas, o como la integral de una forma de orden uno que, mediante la curva, se ha transportado a una integral sobre un intervalo de una forma del tipo $g(t)dt$.

Ejemplo 4.4. *Sea* $\gamma(t) = (t, t, \sin t)$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$. *Tendremos*

$$\int_\gamma z dx + x dy + dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + t + \cos t)\, dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

4.3 Teorema de Green

4.3.1 Teorema de Green para dominios elementales

Sea un intervalo bidimensional $I = (a, b) \times (c, d)$ en R^2. Su frontera estará formada por cuatro intervalos unidimensionales que supondremos orientados de tal forma que "al recorrerlos quede I a la izquierda". Es decir, por el intervalo de origen (a, c) y extremo (b, c), el de origen (b, c) y extremo (b, d), el de origen (b, d) y extremo (a, d) y el de origen (a, d) y extremo (a, c). Le llamaremos a este conjunto con estas orientaciones la frontera orientada y la escribiremos $\partial^+ I = \sum_{i=1}^4 \gamma_i\hat{}$, donde cada $\gamma_i\hat{}$ designa uno de los intervalos anteriores con su orientación respectiva. Dado un campo F escribiremos $\int_{\partial^+ I} F \cdot ds = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} F \cdot ds$. Veamos un teorema que relaciona la integral de un campo vectorial a lo largo del contorno de un intervalo con la integral de una función sobre este dominio. Constituye la fórmula de Green para intervalos.

Teorema 4.3. *Sea* I *un intervalo de* R^2 *y* F *un campo de clase* $\mathcal{C}^1$. *Se tiene*

$$\int_{\partial^+ I} F \cdot ds = \int_I \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Demostración. Aplicando el teorema de Fubini tendremos

$$\int_I \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \int_c^d dx_2 \int_a^b \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 = \int_c^d (F_2(b, x_2) - F_2(a, x_2))\, dx_2 = \int_{\partial^+ I} (0, F_2) \cdot ds.$$

Análogamente

$$-\int_I \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\int_a^b dx_1 \int_c^d \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 = \int_{\partial^+ I} (F_1, 0) \cdot ds$$

y, por tanto, vale la proposición.

□

Veamos que el mismo teorema vale si se sustituye el intervalo I por lo que llamaremos un dominio elemental, es decir, un dominio de la forma

$$D = \{(x_1, x_2)\,;\, a < x_1 < b,\ c < x_2 < f(x_1)\}$$

con f de clase $\mathcal{C}^1$ y $c < f(x_1)$.

La frontera orientada de D, $\partial^+ D$ estará formada por los segmentos γ_1 de origen $(a, f(a))$ y extremo (a, c), γ_2 de origen (a, c) y extremo (b, c), γ_3 de origen (b, c) y extremo $(b, f(b))$ y el arco de curva γ_4 definido por $x_1 = a + b - t,\ x_2 = f(a + b - t)$ definido en $[a, b]$. Cuando queramos referirnos a esta última componente de $\partial^+ D$ la denotaremos γ^e. Como antes se definirá $\int_{\partial^+ D} F \cdot ds = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} F \cdot ds$. Veamos la fórmula de Green para estos dominios.

Teorema 4.4. *Sea D un dominio elemental y F un campo vectorial definido en $\overline{D}$, de clase $\mathcal{C}^1$. Se cumple*

$$\int_{\partial^+ D} F \cdot ds = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Demostración. Veamos que si el campo tiene su segunda componente nula, la demostración es, como antes, una simple consecuencia del teorema de Fubini.

$$\begin{gathered} -\int_D \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\int_a^b dx_1 \int_c^{f(x_1)} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 = \\ -\int_a^b \left(F_1\left(x_1, f(x_1)\right) - F_1\left(x_1, c\right) \right) dx_1 = \int_{\partial^+ D} \left(F_1, 0\right) \cdot ds. \end{gathered}$$

Sea ahora el campo de la forma $(0, F_2)$. Lo reduciremos a la integración de un campo del tipo anterior. Observemos, en primer lugar, que si un campo es un gradiente de una función la integral a lo largo de cualquier camino depende únicamente de los valores que toma esta función en los extremos del camino. En efecto $\int_\gamma \text{grad} f \cdot ds = \int_a^b \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\gamma\left(t\right)\right) \gamma'\left(t\right) dt = f\left(\gamma\left(b\right)\right) - f\left(\gamma\left(a\right)\right)$. Si la curva es diferenciable a trozos la conclusión es la misma. En particular, si la curva es cerrada, es decir $\gamma\left(a\right) = \gamma\left(b\right)$, la integral será cero. Apliquemos esta observación a $\partial^+ D$ y a la función $U\left(x_1, x_2\right) = \int_c^{x_2} F_2\left(x_1, t\right) dt$. Tendremos que $\int_{\partial^+ D} \text{grad} U \cdot ds = 0$. Es decir

$$\int_{\partial^+ D} \left(0, \frac{\partial U}{\partial x_2}\right) \cdot ds = -\int_{\partial^+ D} \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, 0\right) \cdot ds.$$

Tendremos entonces que

$$\int_{\partial^+ D} \left(0, F_2\right) \cdot ds = \int_{\partial^+ D} \left(0, \frac{\partial U}{\partial x_2}\right) \cdot ds = -\int_{\partial^+ D} \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, 0\right) \cdot ds.$$

Podemos ahora aplicar el caso demostrado y la integral coincidirá con $\int_D \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} = \int_D \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$ como queríamos probar.

□

Pueden darse versiones de este teorema cuando la curva γ^e que interviene en la definición del dominio es de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. También cuando el dominio es del tipo

$$D = \left\{ \left(x_1, x_2\right); a < x_1 < b,\ f\left(x_1\right) < x_2 < d \right\}$$

con γ^e de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y $f\left(x_1\right) < d$. En este caso uno de los arcos es el definido en $[a, b]$ mediante $x_1 = t$, $x_2 = f(t)$. Continuaremos llamando a este arco, para futuras referencias, γ^e. De una forma análoga vale el teorema cuando los papeles de las variables primera y segunda están intercambiados en la definición del dominio y se dan las definiciones naturales de frontera orientada. A todos estos dominios les llamaremos elementales.

4.3.2 Teorema de Green para dominios regulares

Vamos a dar el teorema de Green para dominios de R^2 tales que localmente sean dominios elementales.

Definición 4.8. *Un abierto conexo $D \subset R^2$, acotado, diremos que es un dominio con borde regular a trozos o, simplemente, un dominio regular si se cumplen las siguientes propiedades:*

a) La frontera de D está formada por una unión de un número finito de curvas cerradas, simples y de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos. Supondremos que cada una de estas curvas γ_i tiene una orientación.

b) Para cada $x \in \partial D$ existe un entorno U_x tal que $U_x \cap D$ es un dominio elemental y si su frontera orientada positivamente es $\partial^+ (U_x \cap D)$, su componente γ^e coincide con $\partial^+ D \cap U_x$ con la orientación dada en el apartado a). A esta orientación le llamaremos orientación positiva.

La integral de un campo sobre $\partial^+ D$ se entenderá que es la suma de las integrales sobre las curvas componentes de $\partial^+ D$ con sus orientaciones positivas.

Ejemplo 4.5. *El disco $D = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 < 1\}$ es un dominio con borde regular. $\partial^+ D$ podrá parametrizarse mediante $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.*

Para establecer el teorema de Green para dominios con borde regular necesitaremos un resultado, la existencia de particiones de la unidad, que permite pasar en ésta y en otras situaciones de un resultado local a un resultado global.

Definición 4.9. *Dada una función f, definida en un abierto de R^n a valores reales, se denomina soporte de f a la adherencia del conjunto de puntos en que la función es distinta de cero.*

Teorema 4.5. ***(Existencia de particiones de la unidad)*** *Sea K un compacto de R^n y U_i , $i \in I$, un recubrimiento abierto de K. Entonces existen funciones $\varphi_1, ..., \varphi_m$ de $\mathcal{C}^\infty (R^n, R)$ tales que*

a. $0 \leq \varphi_i (x) \leq 1$ *si* $x \in R^n$ *,* $i = 1, ..., m$.

b. Cada φ_i tiene su soporte contenido en algún U_{j_i}.

c. $\varphi_1 (x) + ... + \varphi_m (x) = 1$ *para* $x \in K$.

Demostración. Observemos, en primer lugar, que dado $a \in R^n$ y $\varepsilon > 0$ existe una función de $\mathcal{C}^\infty (R^n, R)$ que vale uno en $B (a, \varepsilon)$, cero en el complementario de $B (a, 2\varepsilon)$ y toma valores comprendidos entre cero y uno. Esto puede probarse considerando la función $g \left(\frac{\|x-a\|}{\varepsilon} \right)$ donde g es una función de $\mathcal{C}^\infty (R, R)$ que vale 1 para $0 \leq t \leq 1$, 0 para $t \geq 2$ y toma valores entre cero y uno. Una sugerencia para construir una tal función g es la siguiente. Se considera la función definida por $e^{-\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}}$ para $t < \frac{1}{2}$ y 0 para $t \geq \frac{1}{2}$. Multiplicándola por su simétrica respecto al eje de ordenadas se obtiene una función h_1 no negativa, de $\mathcal{C}^\infty (R, R)$ a soporte en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Si consideramos ahora la función $h_2 (t) = \int_t^{+\infty} h_1 (t)\, dt$ se obtiene una función de $\mathcal{C}^\infty (R, R)$, que vale 0 para $t \leq -\frac{1}{2}$ y es constante para $t \geq \frac{1}{2}$. Consideremos una trasladada de esta función $h_3 (t) = h_2 \left(t + \frac{3}{2} \right)$. Tomará el valor cero para $t \leq -2$ y el valor 1 para $t \geq -1$. Consideraremos la función simétrica de esta respecto el eje de ordenadas y multiplicaremos ambas. Será una

función que tomará un valor constante k para $|t| \leq 1$, el valor 0 para $|t| \geq 2$. Esta función dividida por k cumplirá las condiciones requeridas.

Consideremos para cada $x \in K$ un U_i con $x \in U_i$. Existirá $\delta_x > 0$ tal que $B(x, 3\delta_x) \subset U_i$. Un número finito de bolas $B(x, \delta_x)$ recubrirán K. Sean $B(x_1, \delta_1), ..., B(x_m, \delta_m)$. Consideremos, para cada una de estas bolas, una función ψ_i de clase $\mathcal{C}^\infty(R^n, R)$ que vale uno en $B(x_i, \delta_i)$, cero en el complementario de $B(x_i, 2\delta_i)$ y que toma sus valores en $[0, 1]$. Podemos ya definir las funciones φ_i requeridas.

$\varphi_1 = \psi_1$
$\varphi_2 = (1 - \psi_1)\psi_2$
.....
$\varphi_m = (1 - \psi_1)(1 - \psi_2)...(1 - \psi_{m-1})\psi_m$.

Las condiciones (a) y (b) son ya inmediatas. Para comprobar la condición (c) basta tener en cuenta la relación

$$\varphi_1 + ... + \varphi_m = 1 - (1 - \psi_1)(1 - \psi_2)...(1 - \psi_m)$$

y las propiedades de las funciones ψ_i.

□

Podemos ahora pasar a establecer el teorema de Green para dominios regulares.

Teorema 4.6. (Teorema de Green)

Sea D un dominio regular. Sea F un campo de clase $\mathcal{C}^1$ definido en un entorno de $\overline{D}$. Se cumple

$$\int_{\partial^+ D} F \cdot ds = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Demostración. Para cada $x \in D$ sea U_x un entorno de x contenido en D. Para cada $x \in \partial D$ sea U_x un entorno que cumple la condición b) de la definición anterior. Puesto que $D \cup \partial D$ es un compacto mediante un número finito de estos entornos se recubrirá este conjunto. Sean estos $U_1, U_2, ..., U_r$ y consideremos $\varphi_1, ..., \varphi_r$ una partición de la unidad de un entorno de $\overline{D}$ relativa a este recubrimiento. Si llamamos $\text{rot}F = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$, tendremos

$$\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = \int_D \text{rot}F = \int_D \text{rot}\left(\sum \varphi_i F\right) = \sum \int_D \text{rot}\left(\varphi_i F\right) =$$
$$\sum \int_{D \cap U_i} \text{rot}\left(\varphi_i F\right) = \sum \int_{\partial^+(D \cap U_i)} \varphi_i F \cdot ds = \sum_{U_i \cap \partial D \neq \phi} \int_{\partial^+ D} \varphi_i F \cdot ds =$$
$$\int_{\partial^+ D} \left(\sum \varphi_i\right) F \cdot ds = \int_{\partial^+ D} F \cdot ds.$$

□

Ejemplo 4.6. *Calculemos la circulación del campo $F = \left(x^2, ye^{-y^2}\right)$ respecto del arco de semicircunferencia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 < t < \pi$. Podemos considerar el dominio D limitado por la semicircunferencia y por el diámetro $\gamma_1(t) = (-1 + 2t, 0)$, $0 < t < 1$. Puesto que $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$ la fórmula de Green dirá que $\int_\gamma F \cdot ds + \int_{\gamma_1} F \cdot ds = 0$. Por lo tanto*

$$\int_\gamma F \cdot ds = -\int_{\gamma_1} F \cdot ds = \int_0^1 (-1 + 2t)^2 \, 2dt = \frac{2}{3}.$$

4.3.3 El teorema Green en el lenguaje de formas.

Dada una forma de orden uno $w = F_1 dx_1 + F_2 dx_2$, se define su diferencial exterior como $dw = dF_1 \wedge dx_1 + dF_2 \wedge dx_2$, donde se conviene que $df \wedge dg = -dg \wedge df$ y por tanto $df \wedge df = 0$. Es decir

$$dw = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2.$$

Se define entonces $\int_D dw = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$. En este lenguaje la conclusión del teorema de Green tendrá esta sugestiva forma

$$\int_{\partial^+ D} w = \int_D dw.$$

Ejemplo 4.7. *El área de un dominio de borde regular a trozos D será $\int_D 1 = \int_D dx \wedge dy$. Aplicando el teorema de Green será igual a la integral a lo largo de la frontera orientada de una forma de orden uno cuya diferencial exterior sea $dx \wedge dy$. Pueden seleccionarse diversas formas con esta propiedad. Así el área coincidirá con cualquiera de las siguientes integrales $\int_{\partial+D} xdy$, $\int_{\partial^+ D} -ydx$ o bien $\int_{\partial^+ D} \frac{1}{2}(xdy - ydx)$. Utilicemos, por ejemplo, esta última para el cálculo del área de un circulo de radio r. Una parametrización de la frontera será $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Tendremos $\int_D dx \wedge dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t\right) dt = r^2\pi$.*

4.3.4 El teorema de la divergencia y fórmulas de Green

Definición 4.10. *Si F es un campo vectorial definido en R^n se define su divergencia como el campo escalar $\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$. Se escribirá div$F$.*

Si f es un campo escalar se define su gradiente como el campo vectorial $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. Se escribirá ∇f.

Si F es un campo vectorial de R^3 se denomina rotacional de F y se escribe rot$F$ al campo vectorial definido por

$$\text{rot}F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Simbólicamente puede pensarse como $\nabla \wedge F$.

Teorema 4.7. (Teorema de la divergencia en dimensión 2)

Sea D un dominio regular, $\partial^+ D$ su frontera orientada y F un campo de clase C^1 definido en $\overline{D}$. Para cada curva $\gamma(t)$ componente de $\partial^+ D$ orientada positivamente, sea $n(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$ el campo vectorial normal exterior unitario. Se cumple

$$\int_D \text{div}F = \int_{\partial^+ D} (F \cdot n)\, ds.$$

Demostración. Consideremos el campo $G = (-F_2, F_1)$. Apliquemos el teorema de Green a este campo

$$\int_D \text{div}F = \int_D \text{rot}G = \int_{\partial^+ D} G \cdot ds = \sum \int_{\gamma_i} G \cdot ds = \sum \int_{\gamma_i} (F \cdot n)\, ds = \int_{\partial^+ D} (F \cdot n)\, ds.$$

□

Sea D un dominio regular y n el campo vectorial normal exterior unitario definido en cada uno de los arcos (abiertos) componentes de la frontera. Si g es una función de clase $\mathcal{C}^1$ definida en un entorno de $\overline{D}$ se define la derivada normal de g en cada punto en que está definido n como la derivada direccional de g respecto a n, es decir $\sum \frac{\partial g}{\partial x_i} n_i$. La denotaremos $\partial_n g$. Se tendrán las llamadas fórmulas o identidades de Green.

Teorema 4.8. *Sea D un dominio regular y f, g dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$ definidas en un entorno de $\overline{D}$. Se tiene*

$$a) \int_{\partial^+ D} f \partial_n g ds = \int_D (\nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g)$$

$$b) \int_{\partial^+ D} (f \partial_n g - g \partial_n f)\, ds = \int_D (f \Delta g - g \Delta f)\,.$$

Demostración. Aplicando el teorema de la divergencia al campo $f \nabla g$ obtenemos a). Si se considera el resultado análogo a este intercambiando los papeles de f y de g y restando miembro a miembro se obtiene b).

□

Corolario 4.9. *Sea f una función de clase $\mathcal{C}^2$ en un entorno de un dominio regular $\overline{D}$ tal que $\Delta f = 0$. Si f se anula sobre ∂D entonces f es cero en D.*

Demostración. Apliquemos el apartado a) de la proposición anterior a $f = g$. Tendremos

$$\int_{\partial^+ D} f \partial_n g ds = 0 \ , \int_D f \Delta f = 0$$

y por tanto

$$\int_D \|\nabla f\|^2 = 0.$$

De aquí que f es constante en D y, por ser cero sobre la frontera, es nula en D.

□

4.4 Superficies e integrales de superficie

4.4.1 Superficies elementales

Definición 4.11. *Sea D un dominio regular de R^2. Una superficie elemental de R^3 es una aplicación σ, inyectiva, de clase $\mathcal{C}^1$ de un entorno de $\overline{D}$ en R^3 tal que $d\sigma$ sea de rango dos en cada punto. Escribiremos $S = \sigma\left(\overline{D}\right)$.*

Sea σ una superficie y sean u, v las coordenadas en el dominio de definición de ésta. Los vectores $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$ y $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$ son tangentes a la superficie y $\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ será un campo de vectores normal a la superficie, no nulo. El campo $\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|^{-1}$ será normal unitario a la superficie y es en cada punto de S uno de los dos posibles. Un tal campo normal, unitario y continuo sobre la superficie diremos que define una orientación de la misma.

Ejemplo 4.8. *Consideremos la aplicación* $(x,y) \to \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$ *definida en un entorno del conjunto* $\left\{(x,y) \in R^2, x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}\right\}$. *Se trata de una superficie elemental. Calculemos el vector normal asociado. Tendremos* $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$, $\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \left(0, 1, -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$ *y por tanto*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right).$$

Definición 4.12. *Sean* G *y* D *dos dominios regulares de* R^2 *y* α *un difeomorfismo de clase* $\mathcal{C}^1$ *de un entorno de* $\overline{G}$ *en un entorno de* $\overline{D}$ *que aplica* G *en* D. *Si* σ *es una superficie elemental definida en dicho entorno de* $\overline{D}$ *tendremos que* $\sigma \circ \alpha$ *será una superficie elemental definida en un entorno de* $\overline{G}$. *Diremos que ésta ha sido obtenida mediante un cambio de parámetros de la primera.*

No es difícil probar que en las condiciones anteriores o bien $\frac{\partial(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial(s,t)}$ es positivo en todos los puntos de G o bien es negativo en todos los puntos. Por otra parte si llamamos $\gamma = \sigma \circ \alpha$, es una comprobación el verificar que $\frac{\partial \gamma}{\partial s} \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \left(\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right) \circ \alpha\right) \frac{\partial(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial(s,t)}$. De aquí que si $\frac{\partial(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial(s,t)}$ es positivo la superficie no cambia de orientación mientras que si $\frac{\partial(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial(s,t)}$ es negativo la orientación queda cambiada.

Ejemplo 4.9. *Sea* σ *una superficie elemental definida en un entorno de* $\overline{D}$. *Consideremos la aplicación* σ_1 *definida en un entorno de* $\overline{D_1} = \left\{(x,y)\,;(x,-y) \in \overline{D}\right\}$ *mediante* $\sigma_1(x,y) = \sigma(x,-y)$ *que, obviamente tendrá la misma imagen. Si* n *es el vector normal unitario asociado a* σ, *ahora* $-n$ *será el vector normal asociado a* σ_1 *en el punto correspondiente y las orientaciones que definirán* σ *y* σ_1 *serán distintas.*

4.4.2 Área de una superficie

Se trata ahora de dar una noción de área de una superficie. Esta noción será independiente por cambio de parámetros.

Definición 4.13. *Sea* σ *una superficie elemental definida en un entorno de* $\overline{D}$ *para un cierto dominio regular* D *con coordenadas* u *y* v. *Se define el área de* $S = \sigma(D)$ *mediante*

$$\textit{Area}\,(S) = \int_D \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|.$$

Obsérvese que, si hacemos el cambio de parámetros antes descrito, la integral no varía pues por el teorema del cambio de variables para las integrales tendremos

$$\int_D \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = \int_G \left(\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| \circ \alpha \right) \left| \frac{\partial(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial(s,t)} \right| = \int_G \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s} \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\|.$$

La idea que está en la base de la definición puede verse fácilmente si se considera una superficie de la forma $x = x,\ y = y,\ z = f(x,y)$ para $(x,y) \in I$. Consideremos una partición de $I = [a,b] \times [c,d]$ de la forma $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b,\ c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d$.

Tomemos un punto $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. La parte del plano tangente a la superficie en el punto $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j, f(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j))$ que se proyecta en $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ tiene por área la de este rectángulo dividida por el coseno del ángulo que forma con el plano x, y. Un vector normal al plano tangente será $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\right) \wedge \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j)\right) = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j), -\frac{\partial f}{\partial x}(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j), 1\right)$ y, por tanto, este coseno será $\frac{1}{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}}$. Una aproximación al área de la superficie consistirá en hacer esto para cada intervalo de la partición y efectuar la suma, es decir

$$\sum_{i,j} \left(\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1 \right) (\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j) \right)^{\frac{1}{2}} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Cuando $\max(x_i - x_{i-1}),\ \max(y_j - y_{j-1}) \to 0$ la suma tiende a

$$\int_I \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

que coincide con la definición de área de la superficie que hemos dado antes.

Ejemplo 4.10. *Calculemos el área de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el semiespacio $z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Aplicando las expresiones anteriores su área será $\int_{x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ que, en coordenadas polares, equivale a calcular $2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.*

4.4.3 Integral de un campo escalar sobre una superficie y flujo de un campo vectorial.

Definición 4.14. *Sea σ una superficie elemental definida en un entorno de $\overline{D}$ para un cierto dominio regular D con coordenadas u y v. Sea f un campo escalar continuo definido en $S = \sigma(D)$. Se define la integral de este campo sobre la superficie como*

$$\int_S f d\sigma = \int_D (f \circ \sigma) \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|.$$

Definición 4.15. *Sea σ una superficie elemental definida en un entorno de $\overline{D}$ para un cierto dominio regular D con coordenadas u y v. Sea F un campo vectorial continuo definido en S. Se define el flujo de este campo respecto a σ como*

$$\int_S F \cdot d\sigma = \int_D (F \circ \sigma) \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right).$$

Ejemplo 4.11. *Consideremos el campo $F = (x, y, 0)$. Se trata de calcular el flujo a través de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ orientada por la normal exterior a la esfera. Si*

parametrizamos la superficie mediante $(x,y) \to \left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right)$ *obtenemos* $\frac{\partial\sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y} = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right)$. *El flujo será*

$$\int_{x^2+y^2\leq\frac{1}{2}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\rho^3 d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Mediante un cambio de parámetros la integral $\int_S f d\sigma$ permanece invariante. Tampoco la integral $\int_S F \cdot d\sigma$, es decir, el flujo del campo varía si el cambio de parámetros no cambia la orientación de la superficie. En caso contrario cambia el signo de la integral.

Definición 4.16. *Sea σ una superficie elemental definida en un entorno de $\overline{D}$ para un cierto dominio regular D. Denominaremos frontera de la superficie a la imagen por σ de la frontera de D. Si consideramos la frontera de D con su orientación positiva inducirá una orientación en la frontera de la superficie que denominaremos orientación positiva.*

Obsérvese que la frontera de una superficie elemental en el sentido anterior no coincide con la frontera topológica de la imagen de D en R^3 que es la adherencia de $\sigma(D)$. Si denominamos por S a la superficie, a su frontera positivamente orientada la denominaremos $\partial^+ S$. La orientación de la superficie puede venir determinada por un campo normal unitario continuo definido sobre S. En este caso la orientación de $\partial^+ S$ queda fijada de manera que el vector tangente a ésta, el vector normal a $\partial^+ S$, tangente a S y dirigido hacia el interior y el campo normal unitario continuo formen una base positiva. De una forma intuitiva "una persona situada en el sentido de la normal y caminando por la frontera lo hará en sentido positivo si el interior de la superficie le queda a la izquierda". Estamos ya en condiciones de enunciar el teorema de Stokes.

Teorema 4.10. (Teorema de Stokes para superficies elementales)
Sea S una superficie elemental definida por una aplicación σ de clase $\mathcal{C}^2$ y F un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ definido en $\overline{S}$. Se tiene

$$\int_{\partial^+ S} F \cdot ds = \int_S \mathrm{rot} F \cdot d\sigma.$$

Demostración. Supondremos σ definido en un entorno de $\overline{D}$. Designemos por γ la frontera de D positivamente orientada. Llamemos u, v a las funciones coordenadas de D. Tendremos que $\sigma \circ \gamma$ será la frontera orientada positivamente de S. Sea $[a,b]$ su dominio de definición. Tendremos

$$\int_{\partial^+ S} F \cdot ds = \int_a^b F \circ \sigma \circ \gamma \cdot \frac{d\sigma \circ \gamma}{dt} = \int_a^b F \circ \sigma \circ \gamma \cdot \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\frac{d\gamma_2}{dt}\right)$$

que es la integral a lo largo de γ del campo $\left(F \circ \sigma \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial u},\ F \circ \sigma \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)$. Aplicando el teorema de Green a este campo de clase $\mathcal{C}^1$ y al dominio D tendremos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ S} F \cdot ds &= \int_D \frac{\partial}{\partial u}\left(F \circ \sigma \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(F \circ \sigma \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) \\ &= \int_D \frac{\partial}{\partial u}(F \circ \sigma) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}(F \circ \sigma) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial u} \\ &= \int_D \mathrm{rot} F \circ \sigma \cdot \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right) = \int_S \mathrm{rot} F \cdot d\sigma. \end{aligned}$$

□

El teorema es válido también para superficies de clase $\mathcal{C}^1$. La demostración puede hacerse por un proceso de aproximación por superficies de clase $\mathcal{C}^2$. No entraremos en detalles de la demostración.

Podemos extender la validez del teorema de Stokes a una superficie que pueda descomponerse adecuadamente en superficies elementales.

Definición 4.17. *Una superficie orientada regular a trozos es un conjunto S que admite una descomposición $S = \cup_{i=1}^{r} S_i$ en superficies elementales orientadas positivamente tales que*

a) $\left(\overline{S_i} - \partial S_i\right) \cap \left(\overline{S_j} - \partial S_j\right) = \phi$ *si* $i \neq j$.

b) $\partial S_i \cap \partial S_j$ *es o el vacío, o un punto, o una curva* $\mathcal{C}^1$ *a trozos. En este último caso las orientaciones inducidas por* S_i *y* S_j, $i \neq j$ *deben ser una las inversa de la otra.*

Definición 4.18. *Dada una superficie orientada regular a trozos se denomina su frontera a la unión de las curvas de las fronteras de las superficies elementales S_i tales que pertenezcan a una sola frontera (excluidos los extremos). Al conjunto de estas curvas con las orientaciones positivas inducidas por las superficies elementales la denotaremos por $\partial^+ S$.*

Obsérvese que una superficie orientada regular a trozos puede no tener frontera.

Ejemplo 4.12. *1. Consideremos S la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Una descomposición de la misma en superficies elementales podría ser la siguiente. $S_1 = S \cap \left\{z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $S_2 = S \cap \left\{z \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $S_3 = S \cap \left\{x \geq 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, $S_4 = S \cap \left\{x \leq 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ con orientaciones inducidas por la normal exterior a la esfera. Se trata de una superficie sin frontera.*

2. La parte de la esfera anterior tal que $z \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ admite la descomposición en superficies elementales $S_1 \cup S_3 \cup S_4$. Ahora su frontera está formada por la curva $[0, 2\pi] \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Es fácil comprobar que la orientación positiva es la dada por esta parametrización.

Definición 4.19. *Dada S una superficie orientada regular a trozos y F un campo definido sobre S se denomina flujo sobre S a la suma de los flujos sobre las diversas superficies S_i. Lo escribiremos $\int_S F \cdot d\sigma$.*

Puede probarse que este flujo no depende de la particular descomposición de la superficie en superficies elementales.

Ejemplo 4.13. *Calculemos el flujo del campo $F = (x, y, 0)$ a través de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada según la normal exterior. Podemos considerar la descomposición considerada en el ejemplo 4.12. Deberíamos dar una parametrización para cada superficie elemental, calcular el flujo en cada una de ellas y obtener la suma. Una manera simple de calcular cada una de estas integrales es utilizar coordenadas esféricas, es decir, $x = \cos\varphi\cos\lambda$, $y = \sin\varphi\cos\lambda$, $z = \sin\lambda$. Esto puede hacerse salvo conjuntos de medida nula. Si consideramos los dominios de definición correspondientes a estas coordenadas y tomamos su unión vemos que, finalmente, el dominio de la parametrización será $(\varphi, \lambda) \in (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Tendremos*

ahora que $\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\lambda} = (\cos\varphi\cos^2\lambda, \sin\varphi\cos^2\lambda, \sin\lambda\cos\lambda)$*. El producto escalar por el campo* $F = (\cos\varphi\cos\lambda, \sin\varphi\cos\lambda, 0)$ *será* $\cos^3\lambda$ *y el flujo* $2\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\lambda d\lambda = 0$

Enunciemos el teorema de Stokes para estas superficies.

Teorema 4.11. *Sea* S *una superficie orientada regular a trozos de clase* $\mathcal{C}^2$ *y* F *un campo vectorial de clase* $\mathcal{C}^1$ *definido en* $\overline{S}$*. Se tiene*

$$\int_{\partial^+ S} F \cdot ds = \int_S \mathrm{rot}F \cdot d\sigma.$$

Demostración. Sea $S = \cup S_i$ una descomposición en superficies elementales orientadas con las propiedades de la definición 4.17 . Tendremos $\int_{\partial^+ S} F \cdot ds = \sum \int_{\partial^+ S_i} F \cdot ds = \sum \int_{S_i} \mathrm{rot}F \cdot d\sigma = \int_S \mathrm{rot}F \cdot d\sigma$. □

Ejemplo 4.14. *Comprobemos el teorema de Stokes para el campo* $F = (z - y, x + z, -x - y)$ *respecto a la superficie* $z = 1 - x^2 - y^2$*,* $z \geq 0$ *orientada según la normal que tiene la tercera coordenada positiva.*

La frontera de esta superficie orientada positivamente es $x = \cos\varphi$*,* $y = \sin\varphi$*,* $z = 0$*. La circulación de* F *respecto a esta curva es* $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$*.*

El rotacional del campo es $(-2, 2, 2)$*. Veamos el flujo de éste a través de la superficie. Una parametrización de la superficie es* $\sigma : (\rho, \varphi) \to (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 1 - \rho^2)$ *definida en* $(0, 1) \times (0, 2\pi)$ *. La orientación es la requerida como puede verse calculando* $\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = (2\rho^2\cos\varphi, 2\rho^2\sin\varphi, \rho)$ *. El flujo del rotacional será*

$$\int_{0<\rho<1}\int_{0<\varphi<2\pi}\left(-4\rho^2\cos\varphi + 4\rho^2\sin\varphi + 2\rho\right) = 2\pi.$$

Definición 4.20. *1. Análogos al concepto de dominio elemental y de dominio con borde regular en* R^2 *puede definirse un dominio elemental y un dominio con borde regular o regular a trozos en* R^3*. Un dominio elemental es un dominio de la forma*

$$G = \left\{(x, y, z) \in R^3, (x, y) \in D, c < z < f(x, y)\right\}$$

con D *un dominio regular en* R^2 *y* f *de clase* $\mathcal{C}^1$*. La frontera* $\partial^+ G$ *estará formada por tres superficies:* S_1 *que corresponde a los puntos en que* $z = c$*.* S_2 *aquellos* $(x, y, z) \in \partial^+ G$ *tales que* $(x, y) \in \partial D$ *y* S_3 *aquellos de la forma* $(x, y, f(x, y))$*.* S_1 *se orientará mediante el campo* $(0, 0, -1)$*.* S_2 *mediante* $(a_1, a_2, 0)$ *si* (a_1, a_2) *es la normal exterior a* D*.* S_3 *mediante* $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$*. Pueden definirse dominios análogos permutando los papeles de las coordenadas.*

2. *Un dominio* $G \subset R^3$ *acotado diremos que es un dominio con borde regular si la frontera está formada por una superficie orientada regular* $\partial^+ G$ *sin frontera, tal que para cada punto de la frontera de* G *existe un entorno* U_i *tal que* $U_i \cap G$ *es un dominio elemental de manera que la orientación inducida por* $\partial^+ G$ *y por* $\partial^+(U_i \cap G)$ *en su intersección sea la misma.*

Teorema 4.12. (Teorema de Gauss o de la divergencia)
Sea G un dominio acotado de R^3 por una o varias superficies regulares a trozos, orientables sin frontera. Sea F un campo vectorial definido en un entorno de $\overline{G}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces

$$\int_G \text{div}F = \int_{\partial^+ G} F \cdot d\sigma$$

donde $\partial^+ G$ está orientada según la normal exterior.

El significado intuitivo de los dominios acotados de la forma anterior es evidente. Su formalización se hará en el transcurso de la demostración.

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que G es un dominio elemental, es decir, existe un sistema de coordenadas ortonormales en las que

$$G = \left\{(x,y,z) \in R^3, (x,y) \in D, c < z < f(x,y)\right\}$$

con D un dominio regular en R^2 y f de clase $\mathcal{C}^1$ a trozos y $F = (0,0,R)$. Tendremos que $\text{div}F = \frac{\partial R}{\partial z}$ y por tanto, en este caso,

$$\int_G \text{div}F = \int_D \left(R(x,y,f(x,y)) - R(x,y,c)\right).$$

Hemos distinguido en $\partial^+ G$ tres superficies: S_1 que corresponde a los puntos en que $z = c$. S_2 aquellos $(x,y,z) \in \partial^+ G$ tales que $(x,y) \in \partial D$ y S_3 aquellos de la forma $(x,y,f(x,y))$. Obsérvese que la normal a S_2 tiene tercera componente cero y, por tanto

$$\int_{S_2} F \cdot d\sigma = 0.$$

La normal exterior sobre S_1 es $-e_3$ y por tanto $\int_{S_1} F \cdot d\sigma = -\int_D R(x,y,c)$. Por último, sobre S_3 tenemos $\frac{\partial \sigma}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)$ y $\int_{S_3} F \cdot d\sigma = \int_D R(x,y,f(x,y))$. Vale entonces el teorema en esta situación.

Consideremos ahora para el mismo dominio G un campo de la forma $F = (P,Q,0)$. Definamos las funciones $U(x,y,z) = \int_c^z Q(x,y,t)\,dt$, $V(x,y,z) = -\int_c^z P(x,y,t)\,dt$ y los campos vectoriales $W = (U,V,0)$, $X = \left(0,0,\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right)$. Se tiene

$$\text{rot}W = F - X, \;\; \text{div}F = \text{div}X.$$

Dado que por el teorema de Stokes $\int_{\partial^+ G} \text{rot}W \cdot d\sigma = 0$ y que para un campo de la forma de X hemos ya probado el teorema tendremos

$$\int_{\partial^+ G} F \cdot d\sigma = \int_{\partial^+ G} X \cdot d\sigma = \int_G \text{div}X = \int_G \text{div}F.$$

Sumando dos campos de los tipos antes considerados tendremos que el teorema es cierto par todo campo siempre que el dominio sea del tipo anterior.

Sea ahora un dominio G con borde regular. Supondremos que existe un recubrimiento finito de $\overline{G}$ por abiertos U_i tales que $U_i \cap G$ sean elementales, para los que se ha demostrado el teorema y de manera que la orientación inducida por $\partial^+ G$ y por $\partial^+ (U_i \cap G)$ en $\partial^+ (U_i \cap G) \cap \partial^+ G$ sea la misma.

Sea φ_i una partición de la unidad subordinada a este recubrimiento. Tendremos

$$\int_G \text{div} F = \sum_i \int_G \text{div}\varphi_i F = \sum_i \int_{U_i \cap G} \text{div}\varphi_i F = \sum_i \int_{\partial^+(U_i \cap G)} \varphi_i F \cdot d\sigma = \sum_i \int_{U_i \cap \partial^+ G} \varphi_i F \cdot d\sigma = \sum_i \int_{\partial^+ G} \varphi_i F \cdot d\sigma = \int_{\partial^* G} F \cdot d\sigma.$$

□

Ejemplo 4.15. *Calculemos el flujo del campo*

$$F = \left(x\left(z^2 - y^2\right), y\left(x^2 - z^2\right), z\left(y^2 - x^2\right)\right)$$

a través de la superficie $S_1 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ z > 1$*, orientada según la normal exterior de la esfera. Llamemos* S_2 *a la superficie* $z = 1,\ x^2 + y^2 \leq 1$ *orientada según la normal* $(0, 0, 1)$*. Aplicando el teorema de la divergencia tendremos*

$$\int_{S_1} F \cdot d\sigma - \int_{S_2} F \cdot d\sigma = 0.$$

De donde

$$\int_{S_1} F \cdot d\sigma = \int_{S_2} F \cdot d\sigma = 0 = \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left(-y^2 + x^2\right) = 0.$$

4.5 El lenguaje de las formas

4.5.1 Campos de formas en R^n

Sea $E \cong R^n$ un espacio vectorial de dimensión n sobre R. Supongamos que $e_1, ..., e_n$ es una base de E y $w_1, ..., w_n$ la correspondiente base dual en $\mathcal{L}(E, R) \cong E^*$. Sabemos que una base de las aplicaciones $k-$lineales $\mathcal{L}^k(E, R)$ está formado por los elementos del tipo $w_{i_1} \otimes \cdots \otimes w_{i_k}$, definidas por $w_{i_1} \otimes \cdots \otimes w_{i_k}(u_1, ..., u_k) = w_{i_1}(u_1) \cdots w_{i_k}(u_k)$.

Definición 4.21. *Una aplicación* $k-$*lineal* $T \in \mathcal{L}^k(E, R)$ *se dice hemisimétrica si para cada colección de* k *vectores* $u_1, ..., u_k$ *y cada permutación de los índices* $1, ..., k$ *se tiene*

$$T(u_{i_1}, ..., u_{i_k}) = \sigma \begin{pmatrix} 1, ..., k \\ i_1, ..., i_k \end{pmatrix} T(u_1, ..., u_k),$$

donde $\sigma\binom{1,...,k}{i_1,...,i_k}$ *es el signo de la permutación, es decir +1 si la permutación es par y -1 si es impar. Al conjunto de estas aplicaciones la designaremos por* Ω_k *y a sus elementos se les denomina formas de orden* k.

Obsérvese que si T se expresa en una base como $T = \sum a_{i_1,...,i_k} w_{i_1} \otimes \cdots \otimes w_{i_k}$ una condición necesaria y suficiente para que sea hemisimétrica es que para cada permutación de cada $k-$epla

$$a_{j_1,...,j_k} = \sigma \begin{pmatrix} j_1, ..., j_k \\ i_1, ..., i_k \end{pmatrix} a_{i_1,...,i_k}.$$

Si consideramos $k > n$, en los coeficientes $a_{i_1,...,i_k}$ deberán coincidir al menos dos índices y, por tanto, si la aplicación es hemisimétrica, el coeficiente deberá ser cero. La única aplicación $k-$lineal hemisimétrica para $k > n$ es entonces la idénticamente nula. Supondremos entonces que $k \leq n$.

Definición 4.22. *Sea $T \in \mathcal{L}^k(E, R)$. Se define su hemisimetrización HT como el elemento de Ω_k definido por*

$$HT(u_1, ..., u_k) = \sum \sigma \begin{pmatrix} 1, ..., k \\ i_1, ..., i_k \end{pmatrix} T(u_{i_1}, ..., u_{i_k}).$$

Sean $\theta_1, ..., \theta_k \in E^*$. Se llama producto exterior de estas formas y se escribe $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k$ al elemento de Ω_k

$$\theta_1 \wedge ... \wedge \theta_k = H(\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_k)$$

Ejemplo 4.16. *Sean $w_{i_1}, ..., w_{i_k}$ k elementos de la base dual con $i_1 < ... < i_k$. El producto exterior de estas formas lineales será*

$$w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}(u_1, ..., u_k) = \sum \sigma \begin{pmatrix} i_1, ..., i_k \\ j_1, ..., j_k \end{pmatrix} w_{i_1}(u_{j_1}) \cdots w_{i_k}(u_{j_k})$$

o bien

$$w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k} = \sum \sigma \begin{pmatrix} j_1, ..., j_k \\ i_1, ..., i_k \end{pmatrix} w_{j_1} \otimes \cdots \otimes w_{j_k}$$

donde los sumatorios están extendidos a todas las permutaciones de los índices $i_1, ..., i_k$.

Obsérvese que si permutamos dos formas θ_i, θ_j en un producto $\theta_1 \wedge ... \wedge \theta_k$ se obtiene el mismo cambiado de signo. En particular si dos de estas formas son iguales es resultado es cero. También es fácil ver que este producto es lineal en cada factor.

Ejemplo 4.17. *Sean $\theta_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} w_j$. Aplicando reiteradamente las reglas anteriores*

$$\theta_1 \wedge ... \wedge \theta_n = \det c_{ij} w_1 \wedge ... \wedge w_n.$$

Teorema 4.13. *Una base del espacio vectorial Ω_k está formado por los elementos del tipo $w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}$ para $i_1 < ... < i_k$.*

Demostración. Obsérvese que si T es hemisimétrica se tiene que $T = \frac{1}{k!} HT$. Sea ahora $T \in \Omega_k$. Admitirá una expresión $T = \sum a_{i_1,...,i_k} w_{i_1} \otimes \cdots \otimes w_{i_k}$. Tendremos entonces

$$T = \frac{1}{k!} HT = T = \frac{1}{k!} H \sum a_{i_1,...,i_k} w_{i_1} \otimes \cdots \otimes w_{i_k} = \frac{1}{k!} \sum a_{i_1,...,i_k} w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}.$$

Puesto que $w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k} = \sigma \binom{i_1,...,i_k}{j_1,...,j_k} w_{j_1} \wedge \cdots \wedge w_{j_k}$, siempre se puede reducir a un sumatorio en que los índices $j_1, ..., j_k$ es un conjunto estrictamente creciente. Hemos probado que los elementos $w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}$ con $i_1 < ... < i_k$ forman un sistema de generadores de Ω_k.

Veamos que forman un sistema linealmente independiente. Consideremos

$$\sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1,...,i_k} w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k} = 0.$$

Apliquémoslo a $e_{j_1}, ..., e_{j_k}$, con $j_1 < ... < j_k$. Tendremos

$$\sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1,...,i_k} w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k} (e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = a_{j_1,...,j_k} = 0.$$

Son, por tanto, linealmente independientes.

□

Ejemplo 4.18. *En $E \cong R^2$ las únicas formas no nulas son las de orden $0, 1, 2$. Ω_0 se entiende que es R, Ω_1 coincide con E^*, una base es entonces w_1, w_2. Una base de Ω_2 es $w_1 \wedge w_2$.*

Si tomamos como espacio de partida $E \cong R^3$, tendremos como espacios de formas no nulas las de orden $0, 1, 2$ y 3. Como antes Ω_0 es R. Una base de Ω_1 es w_1, w_2, w_3. Una base de Ω_2 estará formada por $w_1 \wedge w_2$, $w_1 \wedge w_3$, $w_2 \wedge w_3$. Por último, una base de Ω_3 es $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3$.

Definición 4.23. *Si consideramos como espacio E el espacio de las diferenciales en un punto p de las funciones de R^n a valores en R, a los elementos de Ω_k se les llama formas de orden k en p.*

Una base de estas formas será $dx_{i_1\ p} \wedge ... \wedge dx_{i_k\ p}$ para $i_1 < ... < i_k$.

Definición 4.24. *Sea A un abierto de R^n. Se llama un campo de formas de orden k sobre A a una correspondencia que a cada punto $p \in A$ le asocia una forma de orden k en p. Al conjunto de estos campos lo designaremos por $\Omega_k(A)$.*

Un campo de formas de orden k tendrá una expresión en coordenadas de la forma

$$\sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1,...,i_k}(x)\, dx_{i_1\ x} \wedge ... \wedge dx_{i_k\ x}.$$

La expresaremos brevemente $\sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1,...,i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$. Si las funciones $a_{i_1,...,i_k}(x)$ son de clase $\mathcal{C}^r$ se dirá que el campo es de esta clase y, si no hay lugar a confusión, se hablará simplemente de formas de orden k y de clase $\mathcal{C}^r$. Las formas de orden cero se entenderán que son simplemente las funciones.

Veamos que una aplicación $\varphi : R^m \to R^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ induce una aplicación lineal φ^* de las formas de un determinado orden k sobre R^n en las formas del mismo orden en R^m. Si denominamos $x_1, ..., x_m$ las coordenadas en R^m y $y_1, ..., y_n$ las coordenadas en R^n tendremos que

$$\varphi^* \left(\sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1,...,i_k} dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k} \right) = \sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1,...,i_k} \circ \varphi d\varphi_{i_1} \wedge ... \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Teorema 4.14. *Sean $\gamma : R^s \to R^m$ y $\theta : R^m \to R^l$ aplicaciones diferenciables. Las aplicaciones sobre las formas cumplen $(\theta \circ \gamma)^* = \gamma^* \circ \theta^*$.*

Demostración. En efecto, llamemos t_i, x_j e y_k a las coordenadas en R^s, R^m y R^l respectivamente. Tendremos, utilizando la linealidad de la aplicación γ^*, así como la linealidad en cada factor del producto exterior.

$$\begin{gathered}(\theta \circ \gamma)^* (f dy_{k_1} \wedge ... \wedge dy_{k_n}) = f \circ \theta \circ \gamma d (\theta_{k_1} \circ \gamma) \wedge ... \wedge d (\theta_{k_n} \circ \gamma) = \\ f \circ \theta \circ \gamma (d\theta_{k_1} \circ d\gamma) \wedge ... \wedge (d\theta_{k_n} \circ d\gamma) = \\ = f \circ \theta \circ \gamma \left(\sum_{i_1=1}^m \frac{\partial \theta_{k_1}}{\partial x_{i_1}} \circ \gamma d\gamma_{i_1} \right) \wedge ... \wedge \left(\sum_{i_n=1}^m \frac{\partial \theta_{k_n}}{\partial x_{i_n}} \circ \gamma d\gamma_{i_n} \right) = \\ \sum_{i_1,...,i_n=1}^m f \circ \theta \circ \gamma \frac{\partial \theta_{k_1}}{\partial x_{i_1}} ... \frac{\partial \theta_{k_n}}{\partial x_{i_n}} \circ \gamma d\gamma_{i_1} \wedge ... \wedge d\gamma_{i_n} = \\ \gamma^* \left(\sum_{i_1,...,i_n=1}^m \left(f \circ \theta \frac{\partial \theta_{k_1}}{\partial x_{i_1}} ... \frac{\partial \theta_{k_n}}{\partial x_{i_n}} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_n} \right) \right) = \\ \gamma^* (f \circ \theta d\theta_{k_1} \wedge ... \wedge d\theta_{k_n}) = \gamma^* \circ \theta^* (f dy_{k_1} \wedge ... \wedge dy_{k_n}) .\end{gathered}$$

□

Sea ahora $\Psi : R^n \to R^n$ un cambio de coordenadas. Las formas de orden n en R^n vienen dadas por $f dy_1 \wedge ... \wedge dy_n$. Tendremos que

$$\begin{gathered}\Psi^* (f dy_1 \wedge ... \wedge dy_n) = f \circ \Psi d\Psi_1 \wedge ... \wedge d\Psi_n = \\ f \circ \Psi \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge ... \wedge \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_n}{\partial x_i} dx_i \right) = f \circ \Psi \frac{\partial (\Psi_1,...,\Psi_n)}{\partial (x_1,...,x_n)} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n.\end{gathered}$$

Ejemplo 4.19. *Sea Ψ el cambio a coordenadas polares, es decir $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. La forma $x^2 dx + x dx$ se transformará en*

$$\begin{gathered}\Psi^* (x^2 dx + x dx) = \\ \rho^2 \cos^2 \varphi (\cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi) + \rho \cos \varphi (\sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi) = \\ (\rho^2 \cos^3 \varphi + \rho \cos \varphi \sin \varphi) d\rho + (-\rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi) d\varphi.\end{gathered}$$

La forma $x dx \wedge dy$ se transformará en

$$\rho \cos \varphi (\cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi) \wedge (\sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi) = \rho^2 \cos \varphi d\rho \wedge d\varphi.$$

Tenemos entonces que una función f, como tal función o campo de formas de orden 0, al efectuar un cambio de coordenadas Ψ se transforma en la función $f \circ \Psi$. Sin embargo si esta función f expresa la función coordenada de la forma $f dy_1 \wedge ... \wedge dy_n$, al efectuar el cambio de coordenadas, se transforma en $f \circ \Psi \frac{\partial (\Psi_1,...,\Psi_n)}{\partial (x_1,...,x_n)} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$. La función anterior $f \circ \Psi$ queda multiplicada por el determinante jacobiano del cambio de coordenadas. Estos cambios de coordenadas son los que aparecían cuando estudiábamos los cambios de coordenadas en el cálculo de integrales y sugieren que las formas son un lenguaje adecuado en el contexto del cálculo integral. Es natural dar entonces la siguiente definición.

Definición 4.25. *Sea $w = f dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$ una n-forma en R^n. Sea un conjunto medible de R^n. Se define la integral de w sobre D como*

$$\int_D w = \int_D f.$$

Cuando integremos sobre R^n escribiremos simplemente $\int w$.

Observérvese que si Ψ es un cambio de coordenadas que no cambia la orientación, es decir, con determinante jacobiano positivo en todos los puntos, tendremos que

$$\int w = \int f = \int f \circ \Psi \left| \frac{\partial (\Psi_1, ..., \Psi_n)}{\partial (t_1, ..., t_n)} \right| = \int f \circ \Psi \frac{\partial (\Psi_1, ..., \Psi_n)}{\partial (t_1, ..., t_n)} = \int \Psi^* (w).$$

Es decir la definición dada de integral de n-formas no depende de un cambio de coordenadas que conserve la orientación.

Ejemplo 4.20. *Calculemos $\int_D xy^2 dx \wedge dy$ donde D está definido por $x^2 + y^2 \leq r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. En coordenadas polares deberemos calcular $\int_E \rho^4 \cos\varphi \sin^2\varphi d\rho \wedge d\varphi$ donde E está definido por $0 < \rho < r$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Esta integral es simplemente $\int_E \rho^4 \cos\varphi \sin^2\varphi = \frac{r^5}{15}$.*

Sea ahora σ una aplicación diferenciable de un abierto de R^m en R^n. Si tenemos una forma de orden m en R^n, mediante la aplicación σ^* se transformará en una forma del mismo orden en R^m. Para éstas hemos definido su integral. Es natural entonces considerar la siguiente definición.

Definición 4.26. *Sea σ una aplicación diferenciable de un abierto D de R^m en R^n y w una forma de orden m en R^m. Se define la integral de w respecto a σ como*

$$\int_\sigma w = \int_D \sigma^* (w).$$

Ejemplo 4.21. *1. Calculemos $\int_\sigma x^2 dy \wedge dz$ donde σ es la aplicación definida en*

$$D = \left\{ 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \lambda < \frac{\pi}{2} \right\}$$

mediante

$$\sigma (\varphi, \lambda) = (\cos\varphi \cos\lambda, \sin\varphi \cos\lambda, \sin\lambda).$$

Deberemos calcular

$$\int_D \cos^2\varphi \cos^2\lambda (\cos\varphi \cos\lambda d\varphi - \sin\varphi \sin\lambda d\lambda) \wedge \cos\lambda d\lambda = \int_D \cos^3\varphi \cos^5\lambda = 0$$

2. El área de una superficie elemental $S = \sigma(D)$ es $\int_\sigma \omega$ para $\omega = N_x dy \wedge dz + N_y dz \wedge dx + N_z dx \wedge dy$ donde N es el vector normal $\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v} \right\|}$. En efecto $\sigma^* (\omega) = \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v} \right\| du \wedge dv$.

Se debe observar que si Ψ es un cambio de coordenadas en R^m que no cambia la orientación se tiene que $\int_\sigma w = \int_{\sigma\circ\Psi} w$. En efecto

$$\int_{\sigma\circ\Psi} w = \int_{\Psi^{-1}(D)} (\sigma \circ \Psi)^* (w) = \int_{\Psi^{-1}(D)} \Psi^* (\sigma^* (w)) = \int_D \sigma^* (w) = \int_\sigma w.$$

4.5.2 Identificación de campos escalares y vectoriales con formas en R^2 y en R^3

Se trata ahora de ver como los campos escalares y vectoriales pueden identificarse con ciertas formas y que, a través de estas identificaciones, la integración de formas que acabamos de definir coincide con los diversos conceptos de integración en estos campos. Lo haremos por separado en R^2 y en R^3.

En R^2 podemos considerar campos escalares, que están definidos por funciones f y campos vectoriales que están definidos por pares de funciones (f_1, f_2) . Los primeros pueden identificarse con formas de orden cero o con formas de orden dos. En el primer caso se asigna a la función f la propia función. En el segundo caso se identifica la función f con la forma $f dx_1 \wedge dx_2$. Por último el campo vectorial (f_1, f_2) se identifica con la forma de orden uno $f_1 dx_1 + f_2 dx_2$.

Ya vimos en su momento que la integral de un campo vectorial (f_1, f_2) a lo largo de un arco de curva γ definida en $[a, b]$, lo que denominamos su circulación, coincide con la integral de la forma $f_1 dx_1 + f_2 dx_2$ respecto de γ ya que

$$\begin{aligned}\int_\gamma f_1 dx_1 + f_2 dx_2 &= \int_{[a,b]} \gamma^* (f_1 dx_1 + f_2 dx_2) = \\ &\int_{[a,b]} f_1 \circ \gamma \cdot \gamma_1' + f_2 \circ \gamma \cdot \gamma_2'.\end{aligned}$$

La integral de una forma de orden dos $f dx_1 \wedge dx_2$ respecto a la aplicación ρ que es la identidad en un cierto dominio $D \subset R^2$ es simplemente la integral de la propia función.

$$\int_\rho f dx_1 \wedge dx_2 = \int_D f.$$

En R^3 los campos escalares vienen dados por funciones f y los campos vectoriales por ternas de funciones (f_1, f_2, f_3) . Los primeros pueden identificarse con las formas de orden cero, asignando a cada función f la propia función o bien con las formas de orden tres asignando a f la forma $f dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Los campos vectoriales se pueden identificar con las formas de orden uno asignando a

$$(f_1, f_2, f_3)$$

la forma $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$. También pueden identificarse con las formas de orden dos haciendo corresponder a (f_1, f_2, f_3) la forma $f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$. Nótese el orden preciso en que se han tomado las diferenciales (permutación cíclica de los índices en cada sumatorio respecto los del anterior). Esto es relevante, como ahora veremos, al estudiar el significado de las integrales de estas formas a través de las identificaciones anteriores.

Como hemos visto antes en R^2 la integral de la forma $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ respecto de una curva es la circulación del campo (f_1, f_2, f_3) respecto a la misma.

Sea ahora una forma de orden dos $f_1dx_2 \wedge dx_3 + f_2dx_3 \wedge dx_1 + f_3dx_1 \wedge dx_2$ y sea σ una superficie elemental definida en $D \subset R^2$ a valores en R^3. La integral de la forma respecto a σ será

$$\begin{aligned} & \int_\sigma f_1dx_2 \wedge dx_3 + f_2dx_3 \wedge dx_1 + f_3dx_1 \wedge dx_2 \\ = & \int_D f_1 \circ \sigma \frac{\partial(\sigma_2, \sigma_3)}{\partial(t_1, t_2)} + f_2 \circ \sigma \frac{\partial(\sigma_3, \sigma_1)}{\partial(t_1, t_2)} + f_3 \circ \sigma \frac{\partial(\sigma_1, \sigma_2)}{\partial(t_1, t_2)}. \end{aligned}$$

Esta última integral es el flujo del campo (f_1, f_2, f_3) a través de la superficie σ.

Por último, la integral de la forma de orden tres $fdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ respecto a la identidad definida sobre un dominio es la integral sobre este de la función.

4.5.3 La diferencial exterior

Para poder formular los teoremas de Green, de Stokes y de la divergencia en el lenguaje de formas necesitamos definir un operador sobre las formas. Este operador asignará a cada forma de un determinado orden k una forma de orden $k+1$. Extenderá el operador diferencial de una función que asignaba a cada función, forma de orden cero, una forma de orden uno. Se denomina diferencial exterior. Veamos su definición.

Definición 4.27. *Dada una forma $\omega = \sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1,...,i_k}dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$ se denomina su diferencial exterior y la escribiremos $d\omega$ a la forma $\sum_{i_1<...<i_k} da_{i_1,...,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$.*

Ejemplo 4.22. *Consideremos en R^2 la forma $w = x^2ydx + x^3y^2dy$. Tendremos*

$$dw = x^2dy \wedge dx + 3x^2y^2dx \wedge dy = \left(3x^2y^2 - x^2\right) dx \wedge dy.$$

Teorema 4.15. *Se cumple que $d(d\omega) = 0$.*

Demostración. En efecto, por la linealidad de la diferencial exterior será suficiente probarlo para las formas del tipo $\omega = a_{i_1,...,i_k}dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$. Tendremos $d\omega = \sum_r \frac{\partial a_{i_1,...,i_k}}{\partial x_r}dx_r \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}\}$. Por lo tanto $d(d\omega) = \sum_{r,s} \frac{\partial^2 a_{i_1,...,i_k}}{\partial x_r \partial x_s}dx_s \wedge dx_r \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} = 0$. □

Veamos la expresión de la diferencial exterior de las formas en R^2 y en R^3 y a qué operaciones se corresponden de los campos escalares y vectoriales a través de las identificaciones establecidas.

Consideremos en primer lugar la diferencial exterior en R^2. Si f es una forma de orden cero. Su diferencial exterior será $\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$. Esta forma de orden uno se ha identificado con el campo vectorial $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$, es decir, con grad f. La diferencial exterior sobre las funciones se corresponde entonces en el lenguaje de los campos con el gradiente.

Si consideramos ahora una forma de orden uno $f_1dx_1 + f_2dx_2$, su diferencial exterior será $\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$. Esta forma se ha identificado con el campo escalar $\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$ que es el llamado rotacional escalar del campo (f_1, f_2).

Naturalmente la diferencial exterior de una forma de orden 2 es este caso cero.

Consideremos ahora la diferencial exterior en R^3. Sea f una forma de orden cero. Su diferencial es $\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3$ que se identifica, como antes con el campo vectorial grad $f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$.

Sea ahora una forma de orden uno $f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3$. Su diferencial exterior será $\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$. Esta forma se ha identificado con el campo vectorial $\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$ que es el rotacional del campo (f_1, f_2, f_3).

Si consideramos una forma de orden dos $\omega = f_1dx_2 \wedge dx_3 + f_2dx_3 \wedge dx_1 + f_3dx_1 \wedge dx_2$, su diferencial exterior será $\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Esta forma se ha identificado con el campo escalar $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ que es la divergencia del campo (f_1, f_2, f_3) que se ha identificado con ω.

Por último, las formas de orden tres tienen naturalmente diferencial exterior cero.

Ejemplo 4.23. *Dado un campo F en R^3 $div(rot\, F) = 0$. En efecto, si $F = (F_1, F_2, F_3)$ se ha identificado con $\omega = F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3$, se tiene que $rot\, F = (G_1, G_2, G_3)$ donde*

$$d\omega = G_1dx_2 \wedge dx_3 + G_2dx_3 \wedge dx_1 + G_3dx_1 \wedge dx_2.$$

Por otra parte, la diferencial de la forma anterior es $div\,(G_1, G_2, G_3)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. De esta forma la igualdad $div(rot\, F) = 0$ es simplemente la expresión $dd\omega = 0$.

4.5.4 Los teoremas de Green, Stokes y de la divergencia en el lenguaje de formas

Recordemos que en R^2 el teorema de Green dice que si D es un dominio regular y $F = (F_1, F_2)$ es un campo de clase $\mathcal{C}^1$ se cumple

$$\int_{\partial^+ D} F \cdot ds = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right).$$

Ya vimos que la primera integral coincide con la integral de la forma $\omega = F_1dx_1 + F_2dx_2$ respecto a la frontera orientada $\partial^+ D$. El segundo miembro es la integral sobre D de la forma $dw = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$. La fórmula de Green se escribirá en este lenguaje, como ya vimos

$$\int_{\partial^+ D} \omega = \int_D d\omega.$$

El teorema de Stokes para superficies S orientadas regulares de R^3 dice que si

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

es un campo regular definido en un entorno de $\overline{S}$

$$\int_{\partial^+ S} F \cdot ds = \int_S \text{rot}F \cdot d\sigma.$$

La primera integral coincide como antes con la integral de la forma $\omega = F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3$ respecto ∂^+S. La segunda integral, flujo del rotacional de F respecto de S coincidirá con la integral respecto a S de la forma $d\omega$. El teorema de Stokes se escribirá

$$\int_{\partial^+S} w = \int_S dw.$$

El teorema de la divergencia dice que si G es un dominio acotado por una superficie regular a trozos, orientable y sin frontera y $F = (F_1, F_2, F_3)$ es un campo vectorial definido en un entorno de $\overline{G}$ entonces

$$\int_{\partial^+G} F \cdot d\sigma = \int_G \text{div}F$$

donde ∂^+G está orientada según la norma exterior.

La primera integral coincide con la integral de la forma de orden dos $\Theta = F_1dx_2 \wedge dx_3 + F_2dx_3 \wedge dx_1 + F_3dx_1 \wedge dx_2$ respecto a la superficie ∂^+S. La segunda integral es la integral de la forma $d\Theta = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ en G. El teorema de la divergencia se escribirá

$$\int_{\partial^+G} \Theta = \int_G d\Theta.$$

Vemos entonces que, en este lenguaje, los tres teoremas admiten una formulación única. Esta se conoce como el teorema de Stokes.

Ejemplo 4.24. *1. Calculemos $\int_S \omega$ donde $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ y S es la superficie del paraboloide $x^2 + y^2 = z$ tal que $z \leq 4$ orientada según la normal con tercera componente negativa.*

Si llamamos S_1 a la superficie del plano $z = 4$ tal que $x^2 + y^2 \leq 4$ orientada por el campo normal $(0, 0, 1)$ tendremos que $\int_S \omega + \int_{S_1} \omega = \int_D d\omega$ donde D es el dominio acotado por S y por S_1. Tendremos entonces que

$$\int_S \omega = \int_D 3dx \wedge dy \wedge dz - \int_{S_1} 4dx \wedge dy = 3m\,(D) - 4\pi 2^2.$$

Ahora bien

$$m\,(D) = \int_{x^2+y^2\leq 4} \left(4 - \left(x^2 + y^2\right)\right) = 2\pi \int_0^2 \left(4 - \rho^2\right) \rho d\rho = 8\pi.$$

2. Calculemos el flujo del rotacional del campo (y, z, x) a través de la superficie

$$S = \left\{(x, y, z)\,;\; z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\right\}$$

orientada según la normal que tiene tercera componente positiva.

Debemos calcular

$$\int_S d\,(ydx + zdy + xdz) = \int_{\partial^+C} ydx + zdy + xdz$$

donde ∂^+C es la circunferencia $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, para $0 \leq t \leq 2\pi$. Se obtiene que el flujo es igual a

$$\int_{\partial^+C} ydx = \int_0^{2\pi} -\sin^2 t dt = -\pi.$$

Observemos que el teorema de Stokes permite pasar de una integral de una forma ω de orden k a la integral de una forma de orden $k-1$ siempre que la primera sea del tipo $\omega = d\theta$. A estas formas se les llama diferenciales exactas. Es entonces interesante saber cuando una diferencia es de este tipo. Una condición necesaria, que ahora probaremos, es que $d\omega = 0$. Estas formas cuya diferencial es cero reciben el nombre de cerradas. Tendremos el siguiente teorema.

Teorema 4.16. *Toda forma exacta es cerrada, es decir* $dd\theta = 0$.

Demostración. Si $\theta = \sum_{i_1<...<i_k} a_{i_1,...,i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$ tendremos

$$d\theta = \sum_{i_1<...<i_k} da_{i_1,...,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} = \sum_{i_1<...<i_k} \sum_j \frac{\partial a_{i_1,...,i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}.$$

$$dd\theta = \sum_{i_1<...<i_k} \sum_{j,k} \frac{\partial^2 a_{i_1,...,i_k}}{\partial x_j \partial x_k} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} = 0$$

pues para cada k, j $dx_j \wedge dx_k = -dx_k \wedge dx_j$.

□

En ciertos dominios es válido el recíproco, es decir que toda forma cerrada es exacta. Probaremos este teorema para dominios estrellados.

Definición 4.28. *Un abierto $D \subset R^n$ se dice estrellado si existe un punto $a \in D$ tal que para cada todo $x \in D$ el intervalo de extremos a y x está contenido en D.*

Teorema 4.17. *Sea D un abierto estrellado de R^n y ω una forma de clase $\mathcal{C}^1$ cerrada. Entonces la forma es exacta.*

Demostración. Consideraremos que D es estrellado respecto el origen de coordenadas. En otro caso mediante una traslación nos reduciríamos a este caso. Definamos un operador lineal T sobre las formas que envía formas de orden k en formas de orden $k-1$. Será suficiente definirlo sobre las formas del tipo $\alpha = a(x)\, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$.

$$T(\alpha) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} a(tx)\, dt \right) x_{i_j} dx_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

donde $\widehat{dx_{i_j}}$ significa que esta forma se ha suprimido.

Veamos que se cumple que $dT + Td = I$, donde I es el operador identidad. Dada la linealidad de los operadores es suficiente probarlo para las formas del tipo considerado anteriormente.

Tendremos que

$$dT\alpha = k \left(\int_0^1 t^{k-1} a(tx)\, dt \right) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} +$$
$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_r}(tx)\, dt \right) x_{i_j} dx_r \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

Por otro lado $d\alpha = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_r} dx_r \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} Td\alpha &= \sum_{r=1}^{n} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_r}(tx)\, dt \right) x_r dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} + \\ &\sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial a}{\partial x_r}(tx)\, dt \right) x_{i_j} dx_r \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge ... \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Sumando y simplificando se obtiene $dT\alpha + Td\alpha = \alpha$.

Si ahora tenemos una forma ω tal que $d\omega = 0$, tendremos que aplicando la igualdad anterior $\omega = dT\omega$. La forma será exacta. Obsérvese que al tiempo nos da un método para encontrar una forma de la cual es su diferencial.

□

Ejemplo 4.25. *1. La forma $w = (3e^{3x}y - 2x)\, dx + e^{3x} dy$ está definida en R^2 y cumple $dw = 0$. Existe entonces una función f tal que $df = w$. Calculémosla.*

$$f(x,y) = \int_0^1 \left(3e^{3tx} ty - 2tx \right) dt \cdot x + \int_0^1 e^{3ty} dt \cdot y = ye^{3x} - x^2.$$

2. *Calculemos $\int_C dx \wedge dy$ donde C es el disco $x^2 + y^2 \leq 1$. Tendremos que $\int_C dx \wedge dy = \int_{\partial^+ C} xdy$, o bien $\int_C dx \wedge dy = \int_{\partial^+ C} -ydx$, o bien $\int_C dx \wedge dy = \int_{\partial^+ C} \frac{1}{2}(xdy - ydx)$. Calculemos esta última integral parametrizando $\partial^+ C$ mediante $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Obtendremos $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\cos^2 t + \sin^2 t \right) dt = \pi$.*

3. *La forma $w = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ está definida en $R^2 - \{(0,0)\}$ y cumple $dw = 0$. Sin embargo no existe una función g tal que $dg = w$. En efecto, en este caso la integral de w a lo largo de cualquier camino cerrado sería cero. Este no es así. Consideremos γ la curva $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Tendremos*

$$\int_\gamma w = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

4.6 Ejercicios

1. Calcula la circulación del campo $(xy, x^2 - y^2)$ a lo largo del arco de curva γ donde

   a) γ es la circunferencia unidad centrada en el origen y recorrido en sentido positivo (contrario a las agujas del reloj).

   b) γ es el arco de la curva $x = y^2$ que va del punto $(1, -1)$ al punto $(1, 1)$.

2. Halla el flujo del campo $(y, -x, z)$ respecto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada según la normal exterior.

3. Halla el área de la parte de la esfera unidad centrada en el origen e interior al cilindro $x^2 + y^2 - x = 0$.

4. Calcula la circulación del campo $\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ a lo largo de la curva $(2\cos t, 3\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Utiliza el teorema de Green para probar que coincide con la circulación sobre $(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

5. Determina de las formas siguientes cuales son exactas y, en su caso, obtiene una forma cuya diferencial sea la dada.

   a) $x^2dx + ydy$ en R^2.

   b) $xydy + xdz$ en R^3.

   c) $e^{xy}dx \wedge dy$ en R^2.

6. Prueba, dando su interpretación en el lenguaje de formas que $rot\,(grad\, f) = 0$ para toda función $f \in \mathcal{C}^2\left(R^3, R\right)$.

7. Calcula $\int_S zdx \wedge dy$ donde S es la superficie del toro obtenida girando la circunferencia $x = 0$, $(y-1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ alrededor del eje de las z orientada según la normal exterior.

8. Comprueba que la forma

$$\frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

   definida en $R^3 - \{(0,0,0)\}$ es cerrada pero no exacta.

9. Comprueba el teorema de Stokes en el siguiente caso particular: Calcula el flujo del rotacional del campo $F = (3y, -xz, yz^2)$ respecto a la superficie $2z = x^2 + y^2$, $z \leq 2$ previamente orientada mediante una integral de superficie y mediante la circulación de F respecto a la frontera de la superficie.

10. Sea S una superficie orientada. Sea $w = x(z^2-y^2)dy \wedge dz + y(x^2-z^2)dz \wedge dx + z(y^2-x^2)dx \wedge dy$. Expresa $\int_S w$ como una integral curvilínea sobre la frontera orientada de S.

11. Sea S la superficie de R^3 formada por S_1, la zona esférica definida mediante $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $1 \leq z \leq \frac{3}{2}$, y por S_2 la superficie cilíndrica definida por $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$. Sean ambas orientadas según la normal exterior. Calcula el flujo del campo $F = (ye^z, x^2(z^3+1), x^2+y^2)$ a través de S.

12. Calcula el flujo del campo $F = (x-2, y, z)\frac{1}{((x-2)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ a través de la frontera de un elipsoide que tiene el punto $(2,0,0)$ en su interior.